12.1 – DISTRIBUCIÓN NORMAL. REPASO DE TÉCNICAS BÁSICAS

UTILIZACIÓN DE LA TABLA DE LA NORMAL N(0,1)

En la distribución N(0,1), a la variable se le suele representar por la letra z. La tabla nos da las probabilidades $P[z \le k]$ para valores de k de 0 a 4, de centésima en centésima. A estas probabilidades se las llama $\phi(k)$: $\phi(k) = P[z \le k]$ z se distribuye N(0,1)

$\phi(k)$ es la función de distribución de esta variable aleatoria.

El valor de k se busca así:
- Unidades y décimas en la columna de la izquierda
- Centésimas en la fila de arriba
- El número que nos da la tabla es el valor de : $\phi(k) = P[z \le k]$

<u>Ejemplo 1</u>: Sea Z ~ N(0,1) calcula:
a) $P[z \le 0{,}83]$ $= \phi(0{,}83) = 0{,}7967$
b) $P[z \le 2{,}3]$ = $\phi(2{,}30) = 0{,}9893$
c) $P[z \le 1]$ = $\phi(1{,}00) = 0{,}8413$

<u>Ejemplo 2</u> : Sea Z ~ N(0,1) calcula en valor de "k":
a) $P[z \le k] = 0{,}7190$ $\Rightarrow k = 0{,}58$
b) $P[z \le k] = 0{,}8645$ $\Rightarrow k \approx 1{,}1$
c) $P[z \le k] = 0{,}5537$ $\Rightarrow k \approx \dfrac{0{,}13 + 0{,}14}{2} = 0{,}135$

<u>Ejercicio 3</u> : Sea Z ~ N(0,1) calcula:
a) $P[z \le 0{,}45]$ $= \phi(0{,}45) = 0{,}6736$
b) $P[z \le 1{,}2]$ = $\phi(1{,}2) = 0{,}8849$
c) $P[z \le 7]$ $= 1$

<u>Ejercicio 4</u> : Sea Z ~ N(0,1) calcula en valor de "k":
a) $P[z \le k] = 0{,}5040$ $\Rightarrow k = 0{,}01$
b) $P[z \le k] = 0{,}62$ $\Rightarrow k \approx 0{,}31$
c) $P[z \le k] = 0{,}9735$ $\Rightarrow k \approx \dfrac{1{,}93 + 1{,}94}{2} = 1{,}935$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN N(0,1)
- Si $k \ge 0$, las probabilidades $\phi(k) = P[z \le k] = P[z < k]$ se encuentran directamente en la tabla.
- $P\,[z \ge k] = 1 - P[z < k] = 1 - \phi(k)$
- Para abscisas negativas: $P[z \le -k] = P[z \ge k] = 1 - \phi(k)$
- $P[a \le z \le b] = P[z \le b] - P[z \le a]$

<u>Ejemplo 5</u> : Sea Z ~ N(0,1) calcula:
a) $P[z \ge 1{,}86]$ = $1 - P[z < 1{,}86] = 1 - \phi(1{,}86) = 1 - 9686 = 0{,}0314$
b) $P[0{,}18 < z \le 1{,}29]$ = $P[z \le 1{,}29] - P[z \le 0{,}18] = \phi(1{,}29) - \phi(0{,}18) = 0{,}9015 - 0{,}5714 = 0{,}3301$
c) $P[-0{,}56 < z \le 1{,}9]$ $= P[z \le 1{,}9] - P[z \le -0{,}56] = \phi(1{,}9) - P[z \ge 0{,}56] = \phi(1{,}9) - [1 - P[z < 0{,}56]] = \phi(1{,}9) - 1 + \phi(0{,}56) = 0{,}9713 - 1 + 0{,}7123 = 0{,}6836$
d) $P[-1{,}83 < z < -1]$ = $P[z < -1] - P[z \le -1{,}83] = P[z > 1] - P[z > 1{,}83] = [1 - P[z \le 1]] - [1 - P[z \le 1{,}83] = 1 - \phi(1) + 1 + \phi(1{,}83) = -\phi(1) + \phi(1{,}83) = -0{,}8413 + 0{,}9664 = 0{,}1251$

Ejemplo 6 : Sea Z ~ N(0,1) calcula "k"

a) P[z < k] = 0,8365 $\Rightarrow$ k = 0,98

b) P[z > k] = 0,8365 $\Rightarrow$ P[z ≤ k] = 0,1635 (No está en la tabla, k es negativo) k = -s
P[z > -s] = 0,8365 $\Rightarrow$ P[z < s] = 0,8365 $\Rightarrow$ s = 0,98 $\Rightarrow$ k = -0,98

c) P[z < k] = 0,1894 (No está en la tabla, k es negative) k = -s
P[z < -s] = P[z > s] =0,1894 $\Rightarrow$ P[z ≤ s] = 0,9106 $\Rightarrow$ s ≈ 1,34 $\Rightarrow$ k ≈ -1,34

Ejercicio 7 : Halla las siguientes probabilidades en una distribución N(0,1)

a) P[z > 2,8] = 1 – P[z ≤ 2,8] = 1 - ϕ(2,8) = 1 – 0,9974 = 0,0026

b) P[z ≤ -1,8] = P[z ≥ 1,8] = 1 – P[z < 1,8] = 1 - ϕ(1,8) = 1 – 0,9641 = 0,0359

c) P[z > -1,8] = P[z < 1,8] = ϕ(1,8) = 0,9641

d) P[1,62 ≤ z < 2,3] = P[z < 2,3] – P[z < 1,62] = ϕ(2,3) - ϕ(1,62) = 0,9893 – 0,9474 = 0,0419

e) P[1 ≤ z ≤ 2] P[z < 2] – P[z < 1] = ϕ(2) - ϕ(1) = 0,9772 – 0,8413 = 0,1359

f) P[-0,61 ≤ z ≤ 1,4] = P[z < 1,4] – P[z < -0,61] = ϕ(1,4) – P[z > 0,61] = ϕ(1,4) – [1 – P[z ≤ 0,61] = ϕ(1,4) – 1 + ϕ(0,61) = 0,9192 – 1 + 0,7291 = 0,6483

g) P[-1 ≤ z ≤ 2] = P[z ≤ 2] – P[z < -1] = ϕ(2) – P[z > 1] = ϕ(2) – [1 – P[z ≤ 1] = ϕ(2) – 1 + ϕ(1) = 0,9772 – 1 + 0,8413 = 0,8185

h) P[-2,3 < z <-1,7] = P[z <-1,7] – P[z < -2,3] = P[z > 1,7] – P[z > 2,3] = [1 – P[z ≤ 1,7]– [1 – P[z ≤ 2,3] = 1 - ϕ(1,7) – 1 + ϕ(2,3) = -0,9554 + 0,9893 = 0,0339

i) P[-2 ≤ z ≤ -1] = P[z <-1] – P[z < -2] = P[z > 1] – P[z > 2] = [1 – P[z ≤ 1]– [1 – P[z ≤ 2] = 1 - ϕ(1) – 1 + ϕ(2) = -0,8413 + 0,9772 = 0,1359

Ejercicio 8 : Calcula el valor de k (exacta o aproximadamente) en cada uno de los siguientes casos:

a) P[z ≤ k] = 0,5 $\Rightarrow$ k = 0

b) P[z ≤ k] = 0,8729 $\Rightarrow$ k = 1,14

c) P[z ≤ k] = 0,9 $\Rightarrow$ k ≈ 1,28

d) P[z ≤ k] = 0,33 $\Rightarrow$ (0,33 no está en la tabla, k es negativo) k = -s
P[z ≤ -s] = 0,33 $\Rightarrow$ P[z ≥ s] = 0,33 $\Rightarrow$ P[z < s] = 0,67 $\Rightarrow$ s = 0,44 $\Rightarrow$ k = -0,44

e) P[z ≤ k] = 0,2 $\Rightarrow$ (0,2 no está en la tabla, k es negativo) k = -s
P[z ≤ -s] = 0,2 $\Rightarrow$ P[z ≥ s] = 0,2 $\Rightarrow$ P[z < s] = 0,8 $\Rightarrow$ s = 0,84 $\Rightarrow$ k = -0,84

f) P[z > k] = 0,12 $\Rightarrow$ P[z ≤ k] = 0,88 $\Rightarrow$ k = 1,175

g) P[z ≥ k] = 0,9971 $\Rightarrow$ P[z < k] = 0,0029 (no está en la tabla, k es negativo) k = -s
P[z ≥ -s] = 0,9971 $\Rightarrow$ P[z ≤ s] = 0,9971 $\Rightarrow$ s = 2,76 $\Rightarrow$ k = -2,76

h) P[z ≥ k] = 0,6 $\Rightarrow$ P[z < k] = 0,4 (no está en la tabla, k es negativo) k = -s
P[z ≥ -s] = 0,6 $\Rightarrow$ P[z ≤ s] = 0,6 $\Rightarrow$ s = 0,25 $\Rightarrow$ k = -0,25

CALCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN N(μ,σ)

Como ya sabemos, las probabilidades en dos distribuciones normales cualesquiera se reparten de forma análoga. Por tanto, para calcular probabilidades en una distribución N(μ,σ), la relacionaremos con la N(0,1) para la cual disponemos del recurso de las tablas.

Si x es N(μ,σ), para calcular la probabilidad P[b < x < k] se procede del siguiente modo: P[b < x < k] = $P\left[\frac{b-\mu}{\sigma} < z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right]$. El cambio $k \Rightarrow \frac{k-\mu}{\sigma}$ se llama tipificación de la variable. La variable ya tipificada sigue una distribución N(0,1)

Ejemplo 9 **:En una distribución N(66,8), calcular:**

a) P[x < 70] $= P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} < \dfrac{70-66}{8}\right] = P[z < 0{,}5] = \phi(0{,}5) = 0{,}6915$

b) P[x > 80] = $P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} > \dfrac{80-66}{8}\right] = P[z > 1{,}75] = 1 - P[z < 1{,}75] = 1 - \phi(1{,}75) = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$

c) P[70 < x < 80] = $P\left[\dfrac{70-66}{8} < \dfrac{x-\mu}{\sigma} < \dfrac{80-66}{8}\right] = P[0{,}5 < z < 1{,}75] = P[z < 1{,}75] - P[z \le 0{,}5] =$
$\phi(1{,}75) - \phi(0{,}5) = 0{,}9599 - 0{,}6915 = 0{,}2684$

Ejemplo 10 **:En una distribución N(66,8), calcula k para que se den las siguientes igualdades:**

a) P[x ≤ k] = 0,9788 $\Rightarrow P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{k-66}{8}\right] = 0{,}9788 \Rightarrow \dfrac{k-66}{8} = 2{,}3 \Rightarrow k = 8.2{,}3 + 66 = 84{,}4$

b) P[x ≤ k] = 0,15 $\Rightarrow P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{k-66}{8}\right] = 0{,}15$ (0,15 no está en la tabla $\dfrac{k-66}{8} = -s$

$P[z \le -s] = 0{,}15 \Rightarrow P[z \ge s] = 0{,}15 \Rightarrow P[z < s] = 0{,}85 \Rightarrow s=1{,}04 \Rightarrow \dfrac{k-66}{8} = -1{,}04 \Rightarrow k=-1{,}04.8 + 66=57{,}68$

c) P[x ≥ k] = 0,6808 $\Rightarrow P[x<k]=0{,}3192 \Rightarrow P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} < \dfrac{k-66}{8}\right]=0{,}3192$ (no está en la tabla) $\dfrac{k-66}{8} = -s$

$P[z<-s]=0{,}3192 \Rightarrow P[z \ge s]=0{,}3192 \Rightarrow P[z<s]=0{,}6808 \Rightarrow s=0{,}47 \Rightarrow \dfrac{k-66}{8} = -0{,}47 \Rightarrow k=-0{,}47.8+66=62{,}24$

Ejercicio 11 **: En una distribución N(18,4), halla las siguientes probabilidades:**

a) P[x ≤ 20] $= P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{20-18}{4}\right] = P[z \le 0{,}5] = \phi(0{,}5) = 0{,}6915$

b) P[x ≥ 16,5] $= P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \ge \dfrac{16{,}5-18}{4}\right] = P[z \ge -0{,}375] = P[z \le 0{,}375] = \dfrac{0{,}6443+0{,}6480}{2} = 0{,}64615$

c) P[x ≤ 11] $= \left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{11-18}{4}\right]=P[z \le -1{,}75]=P[z \ge 1{,}75]=1 - P[z < 1{,}75]=1 - \phi(1{,}75)=1-0{,}9599=0{,}0401$

d) P[19 ≤ x ≤ 23] = $\left[\dfrac{19-18}{4} \le \dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{23-18}{4}\right] = P[0{,}25 \le z \le 1{,}25] = P[z \le 1{,}25] - P[z < 0{,}25] =$
$\phi(1{,}25) - \phi(0{,}25) = 0{,}8944 - 0{,}5987 = 0{,}2957$

e) P[11 ≤ x < 25] = $\left[\dfrac{11-18}{4} \le \dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{25-18}{4}\right] = P[-1{,}75 \le z \le 1{,}75] = P[z \le 1{,}75] - P[z < -1{,}75] =$
$\phi(1{,}75) - P[z \ge 1{,}75] = \phi(1{,}75) - [1 + P[z < 1{,}75]] = \phi(1{,}75) - 1 + \phi(1{,}75) = 0{,}9599.2 - 1 = 0{,}9198$

Ejercicio 12 **: En una distribución N(6;0,9), calcula k para que se den las siguientes igualdades:**

a) P[x ≤ k] = 0,9772 $\Rightarrow P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}9772 \Rightarrow \dfrac{k-6}{0{,}9} = 2 \Rightarrow k = 7{,}8$

b) P[x ≤ k] = 0,8 $\Rightarrow P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}8 \Rightarrow \dfrac{k-6}{0{,}9} = 0{,}84 \Rightarrow k = 8{,}756$

c) P[x ≤ k] = 0,3 $\Rightarrow P\left[\dfrac{x-\mu}{\sigma} \le \dfrac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}3$ (No está en la tabla) $\Rightarrow \dfrac{k-6}{0{,}9} = -s$

$P[z \le -s] = 0{,}3 \Rightarrow P[z \ge s] = 0{,}3 \Rightarrow P[z < s] = 0{,}7 \Rightarrow s = 0{,}52 \Rightarrow \dfrac{k-6}{0{,}9} = -0{,}52 \Rightarrow k = 5{,}532$

d) P[x ≥ k] = 0,6331 ⇒ P[x < k] = 0,3669 ⇒ $P\left[\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-6}{0,9}\right]$ = 0,3669 (No está en la tabla) ⇒

$\frac{k-6}{0,9}$ = -s ⇒ P[z ≤ -s]=0,3669 ⇒ P[z ≥ s]=0,3669 ⇒ P[z < s]=0,6331⇒s=0,34 ⇒ $\frac{k-6}{0,9}$ =-0,34 ⇒ k=5,694

12.2 – INTERVALOS CARACTERÍSTICOS

Si la variable x tiene una distribución de media μ, se llama **intervalo característico** correspondiente a una probabilidad p a un intervalo centrado en la media, (μ - k, μ + k) tal que la probabilidad de que x pertenezca a dicho intervalo es p:

$$P[\mu - k < x < \mu + k] = p$$

INTERVALOS CARACTERÍSTICOS EN DISTRIBUCIONES N(0,1)

En una distribución normal N(0,1), si (-k,k) es el intervalo característico correspondiente a una probabilidad p, es decir, si P[-k < z < k] = p = 1 - α

⇒ $P[z > z_{\alpha/2}] = \alpha/2$ ⇒ $P[z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2$ ⇒ Intervalo característico = $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$

<u>Ejemplo 13</u>: Si Z~N (0,1) calcular el intervalo característico con una probabilidad del 90%

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ (-Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \to 1-\alpha = 0,9 \to \alpha = 0,1 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{0,1}{2} = 0,95 \xrightarrow[\text{TablaN(0,1)}]{} Z_{\alpha/2} = 1,645 \end{array}\right.$$

Intervalo característico (-1,645, 1,645)

Significado: Z está en el intervalo (-1,645, 1,645) con una probabilidad del 90%

<u>Ejercicio 14</u>: Si Z~N (0,1) calcular el intervalo característico con una probabilidad del 99%

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ (-Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \to 1-\alpha = 0,99 \to \alpha = 0,01 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995 \xrightarrow[\text{TablaN(0,1)}]{} Z_{\alpha/2} = 2,575 \end{array}\right.$$

Intervalo característico (-2,575, 2,575)

Significado: Z está en el intervalo (-2,575, 2,575) con una probabilidad del 99%

(Lógicamente el intervalo es mayor que el obtenido en el ejemplo 1)

INTERVALOS CARACTERÍSTICOS EN DISTRIBUCIONES N(μ,σ)

En una distribución normal N(μ,σ), si (μ - k , μ + k) es el intervalo característico correspondiente a una probabilidad p, es decir, si P[μ - k < X < μ + k] = p = 1 - α

⇒ $P[z > z_{\alpha/2}] = \alpha/2$ ⇒ $P[z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2$ ⇒ Intervalo característico = $(\mu - z_{\alpha/2}.\sigma, \mu + z_{\alpha/2}.\sigma)$

<u>Ejemplo 15</u>: Si X ~ N (173,6) calcular el intervalo característico con una probabilidad del 90%

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ (\mu - Z_{\alpha/2}.\sigma, \mu + Z_{\alpha/2}.\sigma) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \to 1-\alpha = 0,9 \to \alpha = 0,1 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{0,1}{2} = 0,95 \xrightarrow[\text{TablaN(0,1)}]{} Z_{\alpha/2} = 1,645 \end{array}\right.$$

Intervalo característico (173 -1,645.6,173 +1,645.6) = (163,13; 182,87)

Significado: X está en el intervalo (163,13; 182,87) con una probabilidad del 90%

Ejercicio 16: Si X ~ N (173,6) calcular el intervalo característico con una probabilidad del 95%

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (\mu - Z_{\alpha/2}.\sigma, \mu + Z_{\alpha/2}.\sigma) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \to 1-\alpha = 0,95 \to \alpha = 0,05 \\ P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,05}{2} = 0,975 \xrightarrow[\text{TablaN}(0,1)]{} Z_{\alpha/2} = 1,96 \end{array}\right.$$

Intervalo característico (173 -1,96.6,173 +1,96.6) = (161,24; 184,76)
Significado: X está en el intervalo (161,24; 184,76) con una probabilidad del 95%

Ejercicio 17: El peso de las cajas de leche siguen una distribución normal de media 1 Kg y desviación típica 50 gr. Hallar el intervalo característico con una probabilidad del 95%

X ~ N(1; 0,05)

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (\mu - Z_{\alpha/2}.\sigma, \mu + Z_{\alpha/2}.\sigma) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \to 1-\alpha = 0,95 \to \alpha = 0,05 \\ P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,05}{2} = 0,975 \xrightarrow[\text{TablaN}(0,1)]{} Z_{\alpha/2} = 1,96 \end{array}\right.$$

Intervalo característico (1 -1,96.0,05,1 +1,96.0,05) = (0,902; 1,098)
Significado: Una caja de leche pesa entre 0,902 y 1,098 Kg con una probabilidad del 95%

12.3 – DISTRIBUCIÓN DE LAS MEDIAS MUESTRALES

DISTRIBUCIÓN DE LAS MEDIAS MUESTRALES

Dada una población de media μ y desviación típica σ, no necesariamente normal, la distribución de las medias de las muestras de tamaño n:

- Tiene la misma media, μ, que la población.
- Su desviación típica es $\sigma/\sqrt{n}$ y, por consiguiente, desminuye al aumentar n.
- Cuando n≥30 es prácticamente normal.

$$\left.\begin{array}{c} \text{Si } X \approx N(\mu, \sigma) \\ \text{ó} \\ \text{Si } n > 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$P[z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow$ Intervalo característico = $(\mu - z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Ejemplo 18: En una distribución N(20,6), tomamos muestras de tamaño 64.
a) ¿Cuál es la distribución de las medias de la muestra?

Como $X \sim N(20,6) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(20, \dfrac{6}{\sqrt{64}}) = N(20; 0,75)$

Es decir, es una Normal de media 20 y desviación típica 0,75

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 19 y 21?

$$P\left[19 \le \overline{X} \le 21\right] \underset{\overline{X} \sim N(20;0,75)\ \text{Tipificamos}}{=} P\left[\frac{19-20}{0,75} \le Z \le \frac{21-20}{0,75}\right] = P\left[-1,33 \le Z \le 1,33\right] =$$

= P[Z≤1,33] – P[Z < -1,33] = P[Z ≤1,33] – P[Z>1,33] = P[Z ≤1,33] – (1 - P[Z ≤1,33])

$$\underset{\text{Miramos en la tabla de la N(0,1)}}{=} 0,9082 - 1 + 0,9082 = 0,8164$$

Ejercicio 19 : Los parámetros de una variable son μ = 16,4 σ = 4,8. Nos disponemos a extraer una muestra de n = 400 individuos.

a) Halla el intervalo característico para la media muestral correspondiente a una probabilidad p = 0,99.

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (\mu - Z_{\alpha/2}\sigma, \mu + Z_{\alpha/2}\sigma) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \rightarrow 1-\alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,01}{2} = 0,995 \underset{TablaN(0,1)}{\rightarrow} Z_{\alpha/2} = 2,575 \end{array}\right.$$

Intervalo característico (16 -2,575.4,8, 16 +2,575.4,8) = (3,64; 28,36)

b) Calcula P [16 < $\bar{x}$ < 17]

Como n = 400 > 30 $\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(16, \frac{4,8}{\sqrt{400}}) = N(16; 0,24)$

$$P\left[16 \leq \bar{X} \leq 17\right] \underset{x \approx N(16;0,24) Tipificamos}{=} P\left[\frac{16-16}{0,24} \leq Z \leq \frac{17-16}{0,24}\right] = P\left[0 \leq Z \leq 4,17\right] = P[Z \leq 4,17] - P[Z < 0] =$$

$$\phi(4,17) - \phi(0) \underset{\text{Miramos en la tabla de la N(0,1)}}{=} 1 - 0,5 = 0,5$$

DISTRIBUCIÓN DE LA SUMA DE TODOS LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA

Puesto que $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$, sabemos que $\sum_{i=1}^{n} x_i$ se distribuye normal de media nμ y desviación típica

$$n\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma\sqrt{n}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{Si } X \approx N(\mu,\sigma) \\ \text{ó} \\ \text{Si } n > 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

$P[z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow$ Intervalo característico = $(n\mu - z_{\alpha/2}.\ \sigma\sqrt{n}\ ,\ n\mu + z_{\alpha/2}.\ \sigma\sqrt{n})$

Ejemplo 20 : Los sueldos, en euros, de los empleados de una fábrica se distribuyen N(1200, 400). Se elige al azar una muestra de 25 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus sueldos sea superior a 35.000 euros?

$$\text{Si } X \approx N(1200,400) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(25.1200, 400\sqrt{25}) = N(30.000, 2000)$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} x_i > 35000\right] = P\left[Z > \frac{35000-30000}{2000}\right] = P[Z > 2,5] = 1 - P[Z \leq 2,5] = 1 - \phi(2,5) = 1 - 0,9938$$

$= 0,0062$

Halla el intervalo característico para las sumas de 25 individuos, correspondientes a una probabilidad del 0,9.

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (n\mu - Z_{\alpha/2}\sigma.\sqrt{n}, n\mu + Z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{n}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \rightarrow 1-\alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,1}{2} = 0,95 \underset{TablaN(0,1)}{\rightarrow} Z_{\alpha/2} = 1,645 \end{array}\right.$$

Intervalo característico $(25.1200-1,645.\ 400\sqrt{25}\ ,25.1200+1,645.\ 400\sqrt{25}) = (26710;\ 33290)$

Significado: La suma de los sueldos de 25 empleados está entre 26710 y 33290 euros con una probabilidad del 90%

<u>Ejemplo 21</u>: Las bolsas de azúcar envasadas por una cierta máquina tienen de media 500 gr y desviación típica 35 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

a) Calcular la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de un paquete sea menor que 495 gr.

$X \sim N(500, 35)$

$$P[\overline{X} < 495] \underset{\text{Como } X \sim N(500,35) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(500, \frac{35}{\sqrt{100}}) = N(500;3,5) \Rightarrow \text{Tipificamos}}{=} P[Z < \frac{495-500}{3,5}] = P[Z < -1,43]$$

$$= P[Z > 1,43] = 1 - P[Z \leq 1,43] \underset{\text{Miramos en la tabla de la N(0,1)}}{=} 1 - 0,9236 = 0,0764$$

b) Hallar el intervalo característico de la media muestral para una probabilidad del 95%

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ (\mu - Z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \rightarrow 1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975 \xrightarrow[\text{TablaN(0,1)}]{} Z_{\alpha/2} = 1,96 \end{array}\right.$$

Intervalo característico $(500 - 1,96.\frac{35}{\sqrt{100}}; 500 + 1,96.\frac{35}{\sqrt{100}}) = (493,1; 506,9)$

Significado: La media de los pesos están en el intervalo (493,1;506,9) con una probabilidad del 95%

c) Calcular la probabilidad de que una caja de 100 bolsas pese más de 51 Kg.

$$P[\sum X_i > 51.000] \underset{\text{Como } X \sim N(500,35) \Rightarrow \sum X_i \sim N(n\mu, \sigma.\sqrt{n}) = N(100.500, 35.\sqrt{100}) = N(50.000;350) \Rightarrow \text{Tipificamos}}{=} P[Z >$$

$$\frac{51000-50000}{35}] = P[Z > 2,86] = 1 - P[Z \leq 2,86] \underset{\text{Miramos en la tabla de la N(0,1)}}{=} 1 - 0,9979 = 0,0021$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja pese más de 550 gr?

$$P[X > 550] \underset{X \sim N(500,35) \rightarrow \text{Tipificamos}}{=} P[Z > \frac{550-500}{35}] = P[Z > 1,43] = 1 - P[Z \leq 1,43] \underset{\text{Miramos en la tabla de la N(0,1)}}{=}$$

$$= 1 - 0,9236 = 0,0764$$

<u>Ejercicio 22</u> : Los pesos en kilogramos de los soldados de una promoción siguen una distribución normal N(69,8). Las guardias en un regimiento están formadas por 12 soldados.

a) Hallar la probabilidad de que la media de los pesos de los soldados de una guardia sea superior a 71 Kg.

Como $X \sim N(69,8) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(69, \frac{8}{\sqrt{12}}) = N(69; 2,31)$

$$P[\overline{X} > 71] = P[Z > \frac{71-69}{2,31}] = P[Z > 0,87] = 1 - P[Z \leq 0,87] = 1 - \phi(0,87) = 1 - 0,8078 = 0,1922$$

b) Obtener el intervalo característico para $\overline{x}$ correspondiente a una probabilidad de 0,9

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ (\mu - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \rightarrow 1-\alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \frac{0,1}{2} = 0,95 \underset{\text{TablaN(0,1)}}{\rightarrow} Z_{\alpha/2} = 1,645 \end{array}\right.$$

Intervalo característico $(69 - 1,645.\frac{8}{\sqrt{12}}, 69 + 1,645.\frac{8}{\sqrt{12}}) = (65,2; 72,8)$

Significado: La media de los pesos están en el intervalo (65,2; 72,8) con una probabilidad del 90%

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los pesos de los soldados de una guardia sea menor que 800 Kgs?

$$\text{Si } X \approx N(69{,}8) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(12.69, 8\sqrt{12}) = N(828{,}27{,}71)$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} x_i < 800\right] = P\left[Z < \frac{800-828}{27{,}71}\right] = P[Z < -1{,}01] = P[Z > 1{,}01] = 1 - P[Z \leq 1{,}01] = 1 - \phi(1{,}01) =$$

$1 - 0{,}8438 = 0{,}1562$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la guardia, elegido al azar, pese más de 93 Kg?

$$P[X > 93] = P\left[Z > \frac{93-69}{8}\right] = P[Z > 3] = 1 - P[Z \leq 3] = 1 - \phi(3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

12.4 – EN QUÉ CONSISTE LA ESTADÍSTICA INFERENCIAL

ESTIMACIÓN PUNTUAL Y ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

Los parámetros de la población se pueden estimar a partir de los de la muestra. Así:
La media muestral, $\overline{x}$, sirve para estimar la media poblacional, μ.
La desviación típica muestral, s, es un estimación de la desviación típica poblacional, σ

La estimación puntual (el valor de μ es aproximadamente $\overline{x}$), sirve de poco mientras desconozcamos cuál es el grado de aproximación de $\overline{x}$ a μ.

La estimación por intervalos: A partir de una muestra de tamaño n podemos estimar el valor de un parámetro de la población del siguiente modo:
- Dando un intervalo dentro del cual confiamos que esté el parámetro. Se llama intervalo de confianza.
- Hallando la probabilidad de que tal cosa ocurra. A dicha probabilidad se le llama nivel de confianza.

Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, mayor eficacia tendremos en nuestra estimación.

La eficacia de esta estimación se manifiesta de dos formas:
- En el tamaño del intervalo (cuanto más pequeño, más precisos estamos siendo)
- En el nivel de confianza (más nivel de confianza significa más seguridad en la estimación).

Tamaño de la muestra, longitud del intervalo y nivel de confianza son tres variables estrechamente relacionadas. Conocidas dos de ellas obtendremos la tercera.

12.5 – INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

Se desea estimar la media, μ, de una población cuya desviación típica, σ, es conocida.

Para ello se recuerde a una muestra de tamaño n en la cual se obtiene una media muestral, $\overline{x}$.

Si la población de partida es normal, o si el tamaño de la muestra es $n \geq 30$, entonces el **intervalo de confianza** de μ con un nivel de confianza de $(1-\alpha).100\%$ es: $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

<u>Ejemplo 23</u> : Deseamos valorar el grado de conocimientos en historia de una población de varios miles de alumnos. Sabemos que la desviación típica es 2,3. Nos proponemos estimar la media poblacional pasando una prueba a 100 alumnos.
a) Calcular el intervalo característico para la media muestral correspondiente a una probabilidad de 0,95.
Como n = 100 > 30

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (\mu - Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \rightarrow 1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,05}{2} = 0,975 \xrightarrow[\text{TablaN(0,1)}]{} Z_{\alpha/2} = 1,96 \end{array}\right.$$

Intervalo característico $(\mu - 1,96.\ \dfrac{2,3}{\sqrt{100}};\ \mu + 1,96.\ \dfrac{2,3}{\sqrt{100}}) = (\mu - 0,45;\ \mu + 0,45)$

Significado: La media muestral dista menos de 0,45 de la poblacional con una probabilidad del 95%

b) Una vez realizada la prueba a 100 alumnos concretos, se ha obtenido una media de 6,32. Hallar el intervalo de confianza con un nivel de significación del 95%

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (\overline{X} - Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \rightarrow 1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,05}{2} = 0,975 \xrightarrow[\text{TablaN(0,1)}]{} Z_{\alpha/2} = 1,96 \end{array}\right.$$

Intervalo de confianza $(6,32 - 1,96.\ \dfrac{2,3}{\sqrt{100}};\ 6,32 + 1,96.\ \dfrac{2,3}{\sqrt{100}}) = (5,87;6,77)$

Significado: La media poblacional está en el intervalo (5,87;6,77) con un nivel de confianza del 95%

<u>Ejemplo 24</u> : Para estimar la media de los resultados que obtendrán al resolver un cierto test los alumnos de 4º de ESO de toda una comunidad autónoma, se les pasa dicho test a 400 de ellos escogidos al azar. Los resultados obtenidos vienen recogidos en la siguiente tabla

x_i	1	2	3	4	5
f_i	24	80	132	101	63

A partir de ellos, estima con un nivel de confianza del 95% el valor de la media poblacional.

Como n = 400 > 30   El intervalo de confianza $\mu \in (\overline{X} - Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Hallamos al media y la desviación típica de la muestra:

x_i	f_i	$x_i.fi$	$x_i^2.f_i$
1	24	24	24
2	80	160	320
3	132	396	1180
4	101	404	1616
5	63	315	1575
	N = 400	1299	4723

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i.f_i}{N} = \frac{1299}{400} = 3,2475$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2.f_i}{N} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{4723}{400} - 3,2475^2} = \sqrt{1,26} = 1,12$$

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (\overline{X} - Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \\ P[Z \leq Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,05}{2} = 0,975 \xrightarrow[\text{TablaN(0,1)}]{} Z_{\alpha/2} = 1,96 \end{array}\right.$$

$$\mu \in (3,2475 - 1,96.\frac{1,12}{\sqrt{400}}; 3,2475 + 1,96.\frac{1,12}{\sqrt{400}}) = (3,14;\ 3,36)$$

Significado: Tenemos una confianza del 95% de que la nota media de la población total esté comprendida entre (3,14; 3,36).

<u>Ejercicio 25</u> : De una variable estadística, conocemos la desviación típica 8, pero desconocemos la media. Para estimarla, extraemos una muestra de tamaño n = 60 cuya media es 37. Estima la media poblacional mediante un intervalo de confianza del 99%.

Como n = 60 > 30

$$\left.\begin{array}{l} P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ (\overline{X} - Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\alpha = p \to 1-\alpha = 0,99 \to \alpha = 0,01 \\ P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{0,01}{2} = 0,995 \underset{\text{TablaN}(0,1)}{\rightarrow} Z_{\alpha/2} = 2,575 \end{array}\right.$$

Intervalo de confianza $(37 - 2,575.\dfrac{8}{\sqrt{60}}\ ;\ 37 + 2,575.\dfrac{8}{\sqrt{60}}) = (34,34;39,66)$

Significado: La media poblacional está en el intervalo (34,34;39,66) con un nivel de confianza del 99%

12.6 – RELACIÓN ENTRE NIVEL DE CONFIANZA, ERROR ADMISIBLE Y TAMAÑO DE LA MUESTRA

El valor E = $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se llama **error máximo admisible.**

Depende de α y de n del siguiente modo:

- Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, menor es E (más estrecho es el intervalo, es decir, más afinaremos en la estimación).
- Cuanto mayor sea 1 – a (es decir, cuanto más seguros queramos estar de nuestra estimación), mayor es E.

Cuanto mayor es 1 - α, mayor es $z_{\alpha/2}$ y, por tanto, mayor es E.

E, n y α son tres variables estrechamente relacionadas. Conocidas dos de ellas obtendremos la tercera despejando de la fórmula: E = $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

<u>Ejemplo 26</u> : La desviación típica de los resultados de las distintas mediciones que se realizan para calcular la duración de un proceso es 0,5 sg. ¿Cuál es el número de medidas que hay que realizar para que con un 99% de confianza, el error de la estimación no exceda de 0,1 sg.?

$$\left[\begin{array}{l} \sigma = 0,5 \\ n = ? \\ 1-\alpha = 0,99 \\ E < 0,1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E = Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - \dfrac{0,01}{2} = 0,995 \to Z_{\alpha/2} = 2,575 \end{array}\right.$$

$0,1 = 2,575.\dfrac{0,5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 12,875 \Rightarrow n = 165,77 \Rightarrow n = 166 \Rightarrow$ Debemos tomar 166 medidas

<u>Ejemplo 27</u> : Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo sabe que la desviación típica de las distintas mediciones del mismo es 0,5 sg. Desea estimar el tiempo medio de reacción con un error máximo de 0,1 sg, para lo cual realiza 100 experiencias. Dí con que nivel de confianza podrá dar el intervalo ($\overline{X}$ -0,1; $\overline{X}$ +0,1)

$$\left[\begin{array}{l} \sigma = 0,5 \\ n = 100 \\ 1-\alpha = ? \\ E = 0,1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E = Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,1 = Z_{\alpha/2}.\dfrac{0,5}{\sqrt{100}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2 \\ P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ P[Z \le 2] \underset{\text{Miramos en la tabla de la N}(0,1)}{=} 0,9772 \end{array}\right.$$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,9772 \Rightarrow \alpha = 0,0456 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9544 \Rightarrow 95,44\% \Rightarrow$ El nivel de confianza es del 95,44%

Ejemplo 28 : **Un ganadero de reses bravas quiere estimar el peso medio de los toros de su ganadería con un nivel de confianza del 95%. Para ello toma una muestra de 30 toros y los pesa. Obtiene una media de 507 Kg y una desviación típica de 32 Kg. ¿Cuál es el error cometido?**

$$\begin{bmatrix} \sigma = 32 \\ n = 30 \\ 1-\alpha = 0,95 \\ E = ? \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} E = Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - \dfrac{0,05}{2} = 0,975 \to Z_{\alpha/2} = 1,96 \end{bmatrix}$$

$E = 1,96.\dfrac{32}{\sqrt{30}} = 11,45$ Kg $\Rightarrow$ El error es de 11,45 Kg.

Ejercicio 29: **Un coronel desea estimar la estatura media de todos los soldados de su regimiento con un error menor que 0,5 cm utilizando una muestra de 30 soldados. Sabiendo que σ = 5,3 cm. ¿Cuál será el nivel de confianza con el que se realiza la estimación?**

$$\begin{bmatrix} \sigma = 5,3 \\ n = 30 \\ 1-\alpha = ? \\ E = 0,5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} E = Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,5 = Z_{\alpha/2}.\dfrac{5,3}{\sqrt{30}} \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 0,52 \\ P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \\ P[Z \le 0,52] \underset{\text{Miramos la tabla de N(0,1)}}{=} 0,6985 \end{bmatrix}$$

$1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,6985 \Rightarrow \alpha = 0,603 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,397 \Rightarrow 39,7\%$

El nivel de confianza es del 39,7%

Ejercicio 30 : **El cociente intelectual de un cierto colectivo tiene una media μ desconocida y una desviación típica σ = 8. ¿De qué tamaño debe ser la muestra con la cual se estime la media con un nivel de confianza del 99% y un error admisible E = 3?**

$$\begin{bmatrix} \sigma = 8 \\ n = ? \\ 1-\alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 0,01 \\ E = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P[Z \le Z_{\alpha/2}] = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - \dfrac{0,01}{2} = 0,995 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575 \\ E = Z_{\alpha/2}.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3 = 2,575.\dfrac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 6,87 \Rightarrow n = 47,15 \end{bmatrix}$$

El tamaño de la muestra debe ser de 48.

EJERCICIOS REPASO (Libro páginas 294-297)

INFERENCIA ESTADÍSTICA. ESTIMACIÓN DE LA MEDIA

CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN N(0,1)

- Si $k \geq 0$, las probabilidades $\phi(k) = P[z \leq k] = P[z < k]$ se encuentran directamente en la tabla.
- $P[z \geq k] = 1 - P[z < k] = 1 - \phi(k)$
- Para abscisas negativas: $P[z \leq -k] = P[z \geq k] = 1 - \phi(k)$
- $P[a \leq z \leq b] = P[z \leq b] - P[z \leq a]$

CALCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN N(μ,σ)

$$P[b < x < k] = P\left[\frac{b-\mu}{\sigma} < z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right] =$$

Tipificar   Tabla N(0,1)

$$z \Rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma}$$

12.2 – INTERVALOS CARACTERÍSTICOS

INTERVALOS CARACTERÍSTICOS EN DISTRIBUCIONES N(0,1)

$X \sim N(0,1) \Rightarrow p = 1 - \alpha \Rightarrow P[z > z_{\alpha/2}] = \alpha/2 \Rightarrow P[z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow$ I.C. $= (-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$

INTERVALOS CARACTERÍSTICOS EN DISTRIBUCIONES N(μ,σ)

$X \sim N(\mu,\sigma) \Rightarrow p = 1 - \alpha \Rightarrow P[z > z_{\alpha/2}] = \alpha/2 \Rightarrow P[z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow$ I.C. $= (\mu - z_{\alpha/2}.\sigma, \mu + z_{\alpha/2}.\sigma)$

12.3 – DISTRIBUCIÓN DE LAS MEDIAS MUESTRALES

DISTRIBUCIÓN DE LAS MEDIAS MUESTRALES

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si } X \approx N(\mu,\sigma) \\ \text{ó} \\ \text{Si } n > 30\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow P[z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow \text{I.C.} = \left(\mu - z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

DISTRIBUCIÓN DE LA SUMA DE TODOS LOS INDIVIDUOS DE LA MUESTRA

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si } X \approx N(\mu,\sigma) \\ \text{ó} \\ \text{Si } n > 30\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \Rightarrow P[z \leq z_{\alpha/2}]=1-\alpha/2 \Rightarrow \text{I.C.}=(n\mu - z_{\alpha/2}.\sigma\sqrt{n}, n\mu + z_{\alpha/2}.\sigma.\sqrt{n})$$

12.5 – INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

Si la población de partida es normal, o si el tamaño de la muestra es $n \geq 30$, entonces el **intervalo de confianza** de μ con un nivel de confianza de $(1 - \alpha)$ .100% es: $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

12.6 – RELACIÓN ENTRE NIVEL DE CONFIANZA, ERROR ADMISIBLE Y TAMAÑO DE LA MUESTRA

El valor $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se llama **error máximo admisible.**

INFERENCIA ESTADÍSTICA.

ESTIMACIÓN DE LA MEDIA

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJERCICIO 1 : Los pesos, en kilogramos, de un grupo de personas se distribuyen según una *N*(70, 10). Calcula, en este grupo de personas, la probabilidad de:
a) Pesar más de 85 kg. b) Pesar entre 65 y 75 kg.

Solución: X es $N(70, 10)$

a) $P[X > 85] = P\left[Z > \frac{85-70}{10}\right] = P[Z > 1,5] = 1 - P[Z \le 1,5] = 1 - 0,9332 = 0,0668$

b) $P[65 < X < 75] = P\left[\frac{65-70}{10} < Z < \frac{75-70}{10}\right] = P[-0,5 < Z < 0,5] = P[Z < 0,5] - P[Z \le -0,5] =$
$P[Z < 0,5] - P[Z \ge 0,5] = P[Z < 0,5] - [1 - P[Z < 0,5]] = 0,6915 - 1 + 0,6915 = 0,383$

EJERCICIO 2 : En una distribución *N*(18, 4), halla la probabilidad de que *X* valga:
a) Más de 25. b) Entre 15 y 30.

Solución: X es $N(18, 4)$

a) $P[X > 25] = P\left[Z > \frac{25-18}{4}\right] = P[Z > 1,75] = 1 - P[Z \le 1,75] = 1 - 0,9599 = 0,0401$

b) $P[15 < X < 30] = P\left[\frac{15-18}{4} < Z < \frac{30-18}{4}\right] = P[-0,75 < X < 3] = P[Z < 3] - P[Z \le -0,75] =$
$P[Z < 3] - P[Z \ge 0,75] = P[Z < 3] - [1 - P[Z < 0,75]] = 0,9987 - 1 + 0,7734 = 0,7721$

INTERVALO CARACTERISTICO

EJERCICIO 3 : Obtén el intervalo característico para el 95%, en una distribución *N*(120, 25).

Solución: El intervalo característico es de la forma: $(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$
Para el 95%, $1 - \alpha = 0,95$; $\alpha = 0,05 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$
Por tanto, el intervalo será: $(120 - 1,96 \cdot 25;\ \ 120 + 1,96 \cdot 25)$, es decir: (71; 169)
Esto significa que el 95% de los individuos están en este intervalo.

EJERCICIO 4 : En una distribución normal con media $\mu = 15$ y desviación típica $\sigma = 3,2$, obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k,\ \mu + k)$, de forma que el 90% de los individuos estén en ese intervalo.

Solución: Se trata de hallar el intervalo característico correspondiente al 90%. Este intervalo es de la forma:$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$
Para el 90%, $1 - \alpha = 0,9$; $\alpha = 0,1 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$
Por tanto, el intervalo será: $(15 - 1,645 \cdot 3,2;\ \ 15 + 1,645 \cdot 3,2)$, es decir: (9,736; 20,264)

DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA

<u>EJERCICIO 5</u> : En una determinada población, los pesos se distribuyen según una normal de media $\mu = 65$ kg y varianza 49. Si extraemos muestras de tamaño 64:

a) ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de los pesos en una de esas muestras sea mayor de 66,5 kg?

Solución: $\mu = 85$, $\sigma = \sqrt{49} = 7$, $n = 64$

a) $X \sim N(\mu, \sigma) = N(65{,}7) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N\left(65; \frac{7}{8}\right)$.

b) $P[\bar{x} > 66{,}5] = P\left[z > \frac{66{,}5 - 65}{\frac{7}{8}}\right] = P[z > 1{,}71] = 1 - P[z \leq 1{,}71] = 1 - 0{,}9564 = 0{,}0436$

<u>EJERCICIO 6</u> : La media de edad de los lectores de una determinada revista es de 17,2 años, y la desviación típica, 2,3 años. Si elegimos muestras de 100 lectores:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra está comprendida entre 16,7 y 17,5 años?

b) ¿Cuál es la distribución de las medias muestrales?

Solución: $\mu = 17{,}2$; $\sigma = 2{,}3$; $n = 100$

a) $X \sim N(\mu, \sigma) = N(17{,}2;2{,}3) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(17{,}2;\ 0{,}23)$

$P[16{,}7 < \bar{x} < 17{,}5] = P\left[\frac{16{,}7 - 17{,}2}{0{,}23} < z < \frac{17{,}5 - 17{,}2}{0{,}23}\right] = P[-2{,}17 < z < 1{,}30] =$

$= P[z < 1{,}30] - P[z \leq -2{,}17] = P[z < 1{,}30] - P[z \geq 2{,}17] = P[z < 1{,}30] - (1 - P[z < 2{,}17]) =$

$= 0{,}9032 - (1 - 0{,}9850) = 0{,}8882$

b) Ya hemos hallado, en el apartado anterior, que las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen N (17,2; 0,23).

INTERVALO CARACTERÍSTICO PARA LA MEDIA

<u>EJERCICIO 7</u> : La duración de cierto tipo de batería sigue una distribución normal de media 3 años y desviación típica de 0,5 años. Si se toman muestras de tamaño 9, halla un intervalo en el que estén comprendidos el 99% de las duraciones medias de las baterías de cada muestra.

Solución: $X \sim N(3;\ 0{,}5)$, n = 9

El intervalo característico es de la forma: $\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 99%, $1 - \alpha = 0{,}99$; $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow P[Z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[Z \leq z_{\alpha/2}] = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Por tanto, el intervalo será: $\left(3 - 2{,}575 \cdot \frac{0{,}5}{3};\ 3 + 2{,}575 \cdot \frac{0{,}5}{3}\right)$; es decir : (2,57; 3,43)

Por tanto, las duraciones medias de las baterías en el 99% de las muestras estarán comprendidas entre 2,57 y 3,43 años.

<u>EJERCICIO 8</u> : La edad de los alumnos de 2º de Bachillerato de cierto instituto sigue una distribución *N* (17,6; 0,5). Los agrupamos al azar de 10 en 10 para una competición. Halla el intervalo característico del 95% correspondiente a las edades medias de los grupos.

Solución: $X \sim N(17{,}6;\ 0{,}5)$, n = 10

El intervalo característico es de la forma: $\left(\mu - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 95%, $1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}025 \Rightarrow P[\,Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\,Z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Por tanto, el intervalo será: $\left(17{,}6 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{10}};\ 17{,}6 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{10}}\right)$; es decir : (17,29; 17,91)

Por tanto, las edades medias en el 95% de los grupos están entre 17,29 y 17,91 años.

INTERVALO DE CONFIANZA

<u>EJERCICIO 9</u> : La estatura de los habitantes mayores de edad de una determinada ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 36 cm². En una muestra aleatoria de 80 individuos de esta ciudad, hemos obtenido una estatura media de 172 cm. Determina un intervalo de confianza del 95,44% para la estatura media de los habitantes mayores de edad de dicha ciudad.

Solución: $X \sim N(\mu,6)$, n = 80, $\bar{x} = 172$

El intervalo de confianza es de la forma: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 95,44%, $1-\alpha = 0{,}9544$; $\alpha = 0{,}0455 \Rightarrow P[\,Z \le z_{\alpha/2}] = 1-\alpha/2 \Rightarrow P[\,Z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}9772 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2$

Por tanto, el intervalo será: $\left(172 - 2\cdot\frac{6}{\sqrt{80}};\ 172 + 2\cdot\frac{6}{\sqrt{80}}\right)$; es decir, $(170{,}66;\ 173{,}34)$

Tenemos una confianza del 95,44% de que la estatura media de toda la población está entre 170,66 y 173,34 cm.

<u>EJERCICIO 10</u> : La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento, fabricadas por cierta máquina, fue de 0,824 cm, y la desviación típica fue de 0,042 cm. Halla los límites de confianza al 95% para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.

Solución: $X \sim N(\mu;0{,}042)$, n = 200, $\bar{x} = 0{,}824$

El intervalo de confianza es de la forma: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 95%, $1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}025 \Rightarrow P[\,Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\,Z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Por tanto, el intervalo será: $\left(0{,}824 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}042}{\sqrt{200}};\ 0{,}824 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}042}{\sqrt{200}}\right)$; es decir: (0,818; 0,830)

Tenemos la confianza del 95% de que la media de la población está comprendida entre 0,818 y 0,830 cm.

ERRORES

<u>EJERCICIO 11</u> : El peso, en kilogramos, de un determinado colectivo se distribuye según una normal de desviación típica igual a 5 kg.
¿Cuántos individuos debemos seleccionar en la muestra si queremos que la media de la muestra no difiera en más de 1kg de la media de la población, con probabilidad 0,95?

Solución: $\sigma = 5$ kg y $E = 1$ kg.

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para el 95%, $1 - \alpha = 0,95$; $\alpha = 0,025 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Sustituimos en la expresión anterior y despejamos n:

$$1 = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = 1{,}96 \cdot 5 = 9{,}8 \quad \rightarrow \quad n = 96{,}04$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 97 individuos.

<u>EJERCICIO 12</u> : En una muestra de 1 000 personas, mayores de 18 años, de una ciudad, hemos obtenido una estatura media de 1,72 m y una desviación típica de 0,4 m.
Con estos datos, hemos concluido que, la estatura media de los habitantes mayores de 18 años de esa ciudad está entre 170 cm y 174 cm. ¿Con qué nivel de confianza hemos llegado a dicha conclusión?

Solución: Sabemos que $E = \frac{174 - 170}{2} = 2\text{ cm} = 0{,}02\text{ m}$

Como no conocemos σ, tomamos $s = 0,4$ m. Y sabemos que $n = 1\,000$.

La expresión que nos da el error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}02 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{1\,000}} \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = \frac{0{,}02 \cdot \sqrt{1\,000}}{0{,}4} = 1{,}58$$

$P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\ Z \le 1,58] = 0,9429 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9429 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0{,}1142 \quad \rightarrow \quad 1 - \alpha = 0{,}8858$

El nivel de confianza es del 88,58%.

REPASO

<u>EJERCICIO 13</u> : El peso de una carga de naranjas, en gramos, sigue una distribución *N*(175, 12). Calcula la probabilidad de que una naranja elegida al azar pese:
a) Más de 200 gramos. **b) Entre 150 y 190 gramos.**

Solución:

a) $p[x > 200] = p\left[\frac{x - 175}{12} > \frac{200 - 175}{12}\right] = p[z > 2,08] = 1 - p[z \le 2,08] = 1 - 0,9812 = 0,0188$

b) $p[150 < x < 190] = p\left[\frac{150 - 175}{12} < \frac{x - 175}{12} < \frac{190 - 175}{12}\right] =$

$= p[-2,08 < z < 1,25] = p[z < 1,25] - p[z \le -2,08] =$

$= p[z < 1,25] - p[z \succ 2,08] = p[z < 1,25] - (1 - p[z < 2,08]) = = 0,8944 - (1 - 0,9812) = 0,8756$

<u>EJERCICIO 14</u> : Las puntuaciones obtenidas en un test que se ha pasado a 100 000 personas se distribuyen según una *N* (50, 5). Si tomamos muestras de 100 de esas personas:

a) ¿Cómo se distribuyen las medias muestrales, $\bar{x}$?

b) Calcula la probabilidad de que la media de las puntuaciones en una de esas muestras esté comprendida entre 49 y 51 puntos.

Solución: n = 100

a) $X \sim N(50;5) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(50;\ 0{,}5)$

b) Como sabemos que $\bar{x}$ es $N(50;\ 0{,}5)$

$$P[49 < \bar{x} < 51] = P\left[\frac{49-50}{0{,}5} < z < \frac{51-50}{0{,}5}\right] = P[-2 < z < 2] = P[z < 2] - P[z \le -2] = P[z < 2] - P[z \ge 2] =$$

$= P\ [z < 2] - (1 - P\ [z < 2]) = 0{,}9772 - 1 + 0{,}9772 = 0{,}9544$

<u>EJERCICIO 15</u> : En una panadería se han pesado 60 panecillos de un determinado tipo, obteniendo una media de 100 gramos y una desviación típica de 9. Halla el intervalo de confianza al 95% para el peso medio de los panecillos de ese tipo.

Solución: $X \sim N(100;9)$ $n = 60$

El intervalo de confianza es de la forma: $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 95%, $1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

En este caso sería: $\left(100 - 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{60}};\ 100 + 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{60}}\right)$, es decir: $(97{,}72;\ 102{,}28)$

Tenemos una confianza del 95% de que el peso medio de ese tipo de panecillos esté comprendido entre 97,72 y 102,28 gramos.

<u>EJERCICIO 16</u> : En un test de inteligencia, las puntuaciones se distribuyen según una normal con desviación típica 15. Se desea estimar el valor de la puntuación media poblacional, con un error menor de 3 puntos, y con un nivel de confianza del 95%. ¿De qué tamaño, como mínimo, debemos seleccionar la muestra?

Solución: Sabemos que $\sigma = 15$ y que $E = 3$ puntos.

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para el 95%, $1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\ Z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Sustituimos en la expresión anterior y obtenemos el valor de *n*:

$3 = 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 15}{3} = 9{,}8 \rightarrow n = 96{,}04$

Habrá que tomar muestras de, al menos, 97 individuos.

<u>EJERCICIO 17</u> : En una muestra de 150 personas de un determinado colectivo, hemos obtenido una edad media de 38 años y una varianza de 36. Con estos datos, hemos concluido que la edad media de la población (de ese colectivo) está comprendida entre 37,04 y 38,96 años. ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha llegado a dicha conclusión?

Solución: Como no conocemos σ, tomamos $s = \sqrt{36} = 6$ años, y sabemos que $n = 150$ personas.

La expresión que nos da el error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Sabemos que $E = \frac{38{,}96 - 37{,}04}{2} = 0{,}96$ años.

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$:

$$0{,}96 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{6}{\sqrt{150}} \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = \frac{0{,}96 \cdot \sqrt{150}}{6} \approx 1{,}96 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} \approx 1{,}96$$

$P[Z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[Z < 1{,}96] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[Z < 1{,}96] = 0{,}975 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$ $\Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow$ El nivel de confianza es del 95%

<u>EJERCICIO 18</u> : La duración de las bombillas de cierta marca sigue una distribución normal de media 780 horas, con desviación típica 200. Si consideramos muestras de 50 de esas bombillas, halla el intervalo característico del 95% correspondiente a las medias muestrales.

Solución: $X \sim N(780;200) \Rightarrow$

El intervalo característico es de la forma: $\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 95%, $1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow P[\ Z \leq z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow P[\ Z \leq z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Por tanto, el intervalo será: $\left(780 - 1{,}96 \cdot \frac{200}{\sqrt{50}};\ 780 + 1{,}96 \cdot \frac{200}{\sqrt{50}}\right)$, es decir: $(724{,}56,\ 835{,}44)$

<u>EJERCICIO 19</u> : Se sabe que la presión sistólica de los individuos de una determinada población sigue una distribución N (127, 24). Si extraemos muestras de tamaño 25:

a) ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) Calcula la probabilidad de que la media de las presiones sistólicas en una de esas muestras esté comprendida entre 126,5 y 128.

Solución: n = 25

a) $X \sim N(\mu, \sigma) = N(127;24) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(127;\ 4{,}8)$

b) $P[126{,}5 < \bar{x} < 128] = P\left[\frac{126{,}5 - 127}{4{,}8} < z < \frac{128 - 127}{4{,}8}\right] = P[-0{,}10 < z < 0{,}21] =$

$= P[z < 0{,}21] - P[z \leq -0{,}10] = P[z < 0{,}21] - P[z \geq 0{,}10] = P[z < 0{,}21] - (1 - P[z < 0{,}10]) =$

$= 0{,}5832 - (1 - 0{,}5398) = 0{,}123$

<u>EJERCICIO 20</u> : El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal *N*(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades. **b) Entre 180 y 220 unidades.**

Solución:

a) $p[x > 200] = p\left[\frac{x - 192}{12} > \frac{200 - 192}{12}\right] = p[z > 0{,}67] = 1 - p[z \leq 0{,}67] = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $p[180 < x < 220] = p\left[\frac{180 - 192}{12} < \frac{x - 192}{12} < \frac{220 - 192}{12}\right] =$

$= p[-1 < z < 2{,}33] = p[z < 2{,}33] - p[z \leq -1] = p[z < 2{,}33] - p[z \geq 1] = p[z < 2{,}33] - (1 - p[z < 1]) =$

$= 0{,}9901 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8314$

<u>EJERCICIO 21</u> : Las ventas diarias, en euros, en un determinado comercio siguen una distribución *N*(950, 200). Calcula la probabilidad de que las ventas diarias en ese comercio:
a) Superen los 1200 euros. **b) Estén entre 700 y 1000 euros.**

Solución:

a) $p[x > 1200] = p\left[\frac{x - 950}{200} > \frac{1200 - 950}{200}\right] = p[z > 1,25] = 1 - p[z \le 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$

b) $p[700 < x < 1000] = p\left[\frac{700 - 950}{200} < \frac{x - 950}{200} < \frac{1000 - 950}{200}\right] =$
$= p[-1 < z < 0,25] = p[z < 0,25] - p[z \le -1] = p[z < 0,25] - p[z \ge 1] = p[z < 0,25] - (1 - p[z < 1]) =$
$= 0,5987 - (1 - 0,8413) = 0,44$

<u>EJERCICIO 22</u> : En un campamento de verano, hemos pesado a 49 niñas y niños, obteniendo una media de 60 kg y una desviación típica de 6 kg. Halla los límites de confianza al 99% para el peso medio de las niñas y niños del campamento.

Solución: n = 49, $\overline{x}$ = 60, s = 6

El intervalo de confianza es de la forma: $\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\quad \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 99%, 1 - α = 0,99 ; α = 0,01 ⇒ P[Z ≤ $z_{\alpha/2}$] = 1 - α/2 ⇒ P[Z ≤ $z_{\alpha/2}$] = 0,995 ⇒ $z_{\alpha/2}$ = 2,575

En este caso será: $\left(60 - 2,575 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}};\quad 60 + 2,575 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}}\right)$; es decir : (57,79; 62,21)

Tenemos la confianza del 99% de que el peso medio de las niñas y niños del campamento esté entre 57,79 kg y 62,21 kg.

<u>EJERCICIO 23</u> : El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con varianza 9. ¿Cuántos individuos debemos seleccionar en la muestra si queremos que la media muestral no difiera en más de 1 kg de la media de la población, con probabilidad 0,99?

Solución: Sabemos que $\sigma = \sqrt{9} = 3$ y que $E = 1$ kg.

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para el 99%, 1 - α = 0,99 ; α = 0,01 ⇒ P[Z ≤ $z_{\alpha/2}$] = 1 - α/2 ⇒ P[Z ≤ $z_{\alpha/2}$] = 0,995 ⇒ $z_{\alpha/2}$ = 2,575

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos el valor de *n*:

$1 = 2,575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = 2,575 \cdot 3 = 7,725 \quad \rightarrow \quad n \approx 59,68$

Habrá que tomar una muestra de al menos, 60 individuos.

<u>EJERCICIO 24</u> : Los sueldos de las empleadas y empleados de una empresa se distribuyen según una normal de media 1 500 euros y de desviación típica 300 euros. Si consideramos muestras de tamaño 40, halla el intervalo característico del 99% para los sueldos medios de las muestras.

Solución: X ~ N(1500,300)   n = 40

El intervalo característico es de la forma: $\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para el 99%, 1 - α = 0,99 ; α = 0,01 ⇒ P[Z ≤ $z_{\alpha/2}$] = 1 - α/2 ⇒ P[Z ≤ $z_{\alpha/2}$] = 0,995 ⇒ $z_{\alpha/2}$ = 2,575

Por tanto, el intervalo será: $\left(1\,500 - 2,575 \cdot \frac{300}{\sqrt{40}};\ 1\,500 + 2,575 \cdot \frac{300}{\sqrt{40}}\right)$, es decir: (1 377,86; 1 622,14)

INFERENCIA ESTADÍSTICA

ESTIMACIÓN DE LA MEDIA

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJERCICIO 1 : El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal N(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:
a) Superior a 200 unidades. b) Entre 180 y 220 unidades.

EJERCICIO 2 : Las ventas diarias, en euros, en un determinado comercio siguen una distribución N(950, 200). Calcula la probabilidad de que las ventas diarias en ese comercio:
a) Superen los 1200 euros. b) Estén entre 700 y 1000 euros.

EJERCICIO 3 : El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución N(10, 2). Calcula la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:
a) Menos de 7 horas. b) Entre 8 y 13 horas.

EJERCICIO 4 : La edad de un determinado grupo de personas sigue una distribución N(35, 10). Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegido al azar, tenga:
a) Más de 40 años. b) Entre 23 y 47 años.

EJERCICIO 5 : El peso de una carga de naranjas, en gramos, sigue una distribución N(175, 12). Calcula la probabilidad de que una naranja elegida al azar pese:
a) Más de 200 gramos. b) Entre 150 y 190 gramos.

INTERVALOS CARACTERÍSTICOS

EJERCICIO 6 : En una distribución normal con media $\mu = 8{,}2$ y desviación típica $\sigma = 2{,}1$, halla el intervalo característico para el 90%.

EJERCICIO 7 : En una distribución $N(25, 8)$, halla el intervalo característico correspondiente a una probabilidad $p = 0{,}99$.

EJERCICIO 8 : En una distribución $N(5, 2)$, obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k,\ \mu + k)$, tal que: $P[\mu - k < x < \mu + k] = 0{,}95$

DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA

EJERCICIO 9 : La edad de los miembros de una determinada asociación sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Sabemos que la distribución de las medias de las edades en muestras de tamaño 36 tiene como media 52 años y como desviación típica 0,5.
a) Halla la media y la desviación típica de la edad de los miembros de la asociación.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la asociación, elegido al azar, sea mayor de 60 años?

EJERCICIO 10 : En una distribución N (35, 6), tomamos muestras de tamaño 49.
a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?
b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 33 y 36?

EJERCICIO 11 : La duración de un determinado tipo de pilas sigue una distribución normal con una media de 50 horas y una desviación típica de 5 horas. Empaquetamos las pilas en cajas de 16:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las pilas de una de las cajas sea inferior a 48 horas?
b) ¿Cuál es la distribución de la duración media de las pilas de las cajas?

INTERVALO CARACTERÍSTICO PARA LA MEDIA

EJERCICIO 12 : El peso de las truchas de una piscifactoría se distribuye según una normal de media 150 gramos y varianza 1 225. Halla un intervalo en el que se encuentren el 95% de las medias de pesos de las muestras de tamaño 50.

EJERCICIO 13 : En un test de matemáticas que se pasó a 1 000 alumnos de 2º de Bachillerato, se observó que las puntuaciones obtenidas seguían una distribución N (67, 20).
Si consideramos muestras de 15 alumnos de los que hicieron el test, halla un intervalo en el que se encuentren el 99,73% de las puntuaciones medias de los alumnos de cada muestra.

EJERCICIO 14 : En un examen de oposición al que se presentaban 5 000 personas, la nota media ha sido de 4,2 puntos, con una desviación típica de 2,1. Si se toman muestras de 60 opositores, halla el intervalo característico del 90% para las notas medias de las muestras.

INTERVALO DE CONFIANZA

EJERCICIO 15 : En una muestra aleatoria de 200 estudiantes de 2º de Bachillerato, se ha observado que la asistencia media a una serie de actos culturales celebrados durante el mes de mayo fue igual a 8, con una desviación típica igual a 6. Determina el intervalo de confianza para la asistencia media de los alumnos de 2º de Bachillerato a los actos culturales celebrados durante el mes de mayo, con un nivel de significación del 5%.

EJERCICIO 16 : En una determinada empresa, se seleccionó al azar una muestra de 100 empleados cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 705 euros, con una desviación típica de 120 euros. Halla un intervalo de confianza al 99% para la media de los ingresos mensuales de todos los empleados de la empresa.

EJERCICIO 17 : Los pesos en una determinada población siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 5 kg. Pesando a 10 individuos de dicha población, se obtuvieron los siguientes resultados medidos en kilogramos:
62 65 63 58 64 60 57 62 60 58
Halla un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de la población.

ERRORES

EJERCICIO 18 : La edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la universidad sigue una distribución normal con varianza 0,36. Deseamos estimar la edad media de dichos estudiantes con un error menor de 0,2 años y con una confianza del 99,5%. ¿De qué tamaño, como mínimo, debemos seleccionar la muestra?

EJERCICIO 19 : En un determinado lugar, se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1 060 euros con una desviación típica de 200 euros. Si se considera un nivel de significación igual a 0,01, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor de 30 euros?

EJERCICIO 20 : Se sabe que el contenido de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal cuya varianza es conocida, teniendo un valor de 0,25. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante una muestra, admitiéndose un error máximo de 0,2 con una confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser, como mínimo, el tamaño de la muestra?

REPASO

EJERCICIO 21 : El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución $N(10, 2)$. Calcula la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

a) Menos de 7 horas. b) Entre 8 y 13 horas.

EJERCICIO 22 : En una determinada ganadería hemos pesado a 100 toros, obteniendo una media de 500 kg y 45 kg de desviación típica. Halla un intervalo de confianza al 95% para el peso medio de los toros de la ganadería.

EJERCICIO 23 : La duración media de un lavavajillas sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,5 años. ¿Cuántos lavavajillas tenemos que seleccionar en la muestra si queremos que la media muestral no difiera en más de 0,25 años de la media de la población, con un nivel de confianza del 90%?

EJERCICIO 24 : El tiempo empleado por los estudiantes para completar cierta prueba se distribuye normalmente con media 30 minutos y desviación típica 5. Si consideramos muestras de 81 estudiantes:

a) ¿Cuál es la distribución de las medias muestrales?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de los tiempos empleados por los estudiantes de la muestra sea mayor de 31 minutos?

EJERCICIO 25 : El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 500 gramos y desviación típica 50 gramos. Si extraemos muestras de tamaño 36:

a) ¿Cuál es la distribución de las medias muestrales?

b) Halla la probabilidad de que la media de los pesos en una de esas muestras sea mayor de 510 gramos.

EJERCICIO 26 : Las alturas de las alumnas de un instituto responden a una distribución normal de media 165 cm y desviación típica 5 cm. Si tomamos muestras de 36 alumnas, halla un intervalo en el que estén comprendidas el 95% de las medias de las estaturas de las muestras.

EJERCICIO 27 : En una muestra de 64 bombillas de un determinado tipo hemos obtenido una duración media de 305 días, con una desviación típica de 40 días. Con estos datos, hemos concluido que la duración media de este tipo de bombillas está entre 295,2 y 314,8 días. Halla el nivel de confianza con el que hemos llegado a dicha conclusión.

EJERCICIO 28 : La edad de un determinado grupo de personas sigue una distribución $N(35, 10)$. Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegido al azar, tenga:

a) Más de 40 años. b) Entre 23 y 47 años.

EJERCICIO 29 : La edad de un determinado colectivo de personas sigue una distribución normal, de media 38, y varianza 36. Si tomamos muestras de 16 de esas personas, halla el intervalo característico del 99% correspondiente a las edades medias de las muestras.

EJERCICIO 30 : El peso de las naranjas sigue una distribución normal de media 175 gramos y desviación típica 12 gramos. Si las metemos en bolsas de 10 naranjas:

a) ¿Cuál es la distribución de la media de los pesos de las naranjas de las bolsas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una de esas bolsas la media del peso de las naranjas esté comprendida entre 170 y 180 gramos?

EJERCICIO 31 : Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente, con media 70 kg y desviación típica 5 kg. Si consideramos muestras de tamaño 64:

a) Describe la distribución a la que se ajustan las medias muestrales

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una de esas muestras sea mayor de 71 kg?

EJERCICIO 32 : Se sabe que la talla de la población en edad escolar de un determinado lugar sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica 12 cm.

En una muestra de 20 individuos, hemos obtenido una media de 165 cm. Halla el intervalo de confianza al 90% para la talla media de la población.

EJERCICIO 33 : Se sabe que la talla de la población escolar de un determinado lugar sigue una distribución normal con una varianza de 144 cm^2. Se desea estimar el valor de la talla media poblacional mediante una muestra, con un error menor de 2 cm; y con un nivel de confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser, como mínimo, el tamaño de la muestra?