PAU.7.4. Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Obtenga los valores del número real *a* para los que A tiene matriz inversa.

b) Halle, si es posible, la matriz inversa de A en el caso *a* = 0.

a) La matriz A tiene inversa si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 1) + 2(1 - a) - (a^2 - 1) - (a + 1)(1 - a) = a^3 - 3a + 2$$

$|A| = 0 \to a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 (a + 2) = 0 \to a = -2,\ a = 1$

Existe inversa si $\forall a \in \mathbb{R} - \{-2,1\}$

b) Si a = 0 $\to$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

PAU.7.6. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial A · X = B

$$A \cdot X = B \to X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 + 2 + 1 = 5 \to A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

PAU.7.7. Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Halle, si existe, la matriz inversa de M.

b) Calcule la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$.

a) |M| = -2 – 2 + 1 + 4 = 1

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{Adj}(M)^t \to M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = M$$

b) $X \cdot M + M = 2M^2 \to X \cdot M = 2M^2 - M \to X = (2M^2 - M) \cdot M^{-1}$

Según el apartado anterior se verifica que $M^{-1} = M \rightarrow M^2 = M \cdot M = M \cdot M^{-1} = I$

Por tanto, se tiene que $X = (2I - M) \cdot M = 2M - M \cdot M = 2M - I$

$$2M - I = 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

5.2. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1 + a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvalo cuando a = 0. (1 punto)

<u>*SOLUCIÓN*</u>

a) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 2 & a-1 & 1+a \\ 0 & a+1 & -a-1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)(a+1) - 2(a+1) - (a+1)(a-1) + (a+1)(a-1) = (a+1)(a^2 - a - 2) = 0$$

$|A| = 0$ si $(a+1)^2 \cdot (a-2) = 0 \rightarrow a = -1,\ a = 2$

- Si $a = -1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ rang A = 2 ; rang A^* = 3 $\rightarrow$ S. I.
- Si $a = 2 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2=F2+3F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ S. I.
- Si $a \neq -1,\ a \neq 2 \rightarrow$ rang A = rang A^* = 3 = nº incógnitas $\rightarrow$ S.C.D.

b) Para $a = 0 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{c} -x + 2y - z = 1 \\ y - z = 2 \\ 2z = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y - z - 1 \rightarrow x = -1 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ y = z + 2 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{array}\right. \rightarrow \text{Solución: } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

5.4. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=1 \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

SOLUCIÓN

a) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2+1+1-a-a-1 = a^2-2a+1 = (a-1)^2 = 0 \rightarrow a = 1$

Para a = 1 $\rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$ rang A = rang A* = 1 $\rightarrow$ S.C.I.

b) x + y – z = 1 $\rightarrow$ x = 1 – y – z $\rightarrow$ Solución: $(1-\lambda-\mu, \lambda, \mu) \ \ \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

5.5. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay-z=1+a \\ x+y-az=2 \\ x-y-z=a \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

SOLUCIÓN

a) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1+a \\ 1 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a \end{array}\right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1-a^2+1+a-a = 1-a^2 = 0 \rightarrow a = \pm 1$

- Para a = 1 $\rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$ rang A = rang A^* = 2 < nº incógnitas $\rightarrow$ S.C.I.
- Para a = -1 $\rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F3-F1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ rang A = 2 ; rang A^* = 3 $\rightarrow$ S.I.

b) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2+z \\ x-y=1+z \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{3}{2}+z \ ; \ y = \frac{1}{2} \rightarrow$ Solución: $\left(\frac{3}{2}+\lambda, \frac{1}{2}, \lambda\right) \ \ \lambda \in \mathbb{R}$