1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. CONCEPTOS GENERALES

➢ ***Definición***:

Se llama ***ecuación lineal con n incógnitas*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ a toda ecuación que puede escribirse de la forma:

$$a_1x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, b son constantes reales.

El número a_i es el coeficiente de la incógnita x_i (i = 1, 2, …,n) y el número b es el término independiente de la ecuación.

Si el término independiente es b = 0, se dice que la ecuación lineal es ***homogénea***.

Una ***solución de la ecuación lineal*** es cualquier conjunto de n números reales que sustituidos en las correspondientes incógnitas hacen que se verifique la ecuación.

❑ ***Ejemplo:***

La ecuación $2x_1 - x_2 + x_3 = -3$ tiene infinitas soluciones. Algunas son:

(-1, 2, 1) ; (-2, -1, 0) ; (0, 0, -3) ; (0, 3, 0)

➢ ***Definición***

Un ***sistema de m ecuaciones con n incógnitas*** es un conjunto de ecuaciones lineales que podemos escribir de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde:

- a_{ij}, son números reales y son los coeficientes del sistema. El subíndice i (i = 1,2,...,m) indica la ecuación y el subíndice j (j = 1,2,...,n) la incógnita.

  El escalar a_{ij} es el coeficiente de x_j en la i-ésima ecuación.
- b_i , i = 1, …, m, son números reales, llamados **términos independientes** del sistema.
- x_j, j = 1,…, n, son las **variables** del sistema.

En el caso de ser todos los términos independientes cero, $b_i = 0$, i = 1, 2, …, m, se dice que el ***sistema es homogéneo***.

Se denomina ***solución del sistema*** al conjunto de valores reales $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tales que al sustituir las incógnitas x_i por s_i (i = 1, 2, …, n) se verifican todas las ecuaciones del sistema.

Resolver un sistema es calcular su solución (o soluciones)

❑ *Ejemplos:*

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$ es un sistema lineal que tiene una única solución (-1, 2, 1)

2) $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - x = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$ es un sistema lineal homogéneo. Siempre tiene solución: x = y = z = 0.

Expresión matricial de un sistema.

Los conocimientos adquiridos sobre matrices facilitan la escritura de un sistema de ecuaciones lineales de manera más reducida.

A cada sistema

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right\}$$

le asociamos las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $A \in M_{m \times n}$ es la ***matriz de los coeficientes*** de las incógnitas

$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ $A^* \in M_{m \times n+1}$ es la ***matriz ampliada*** con los términos independientes

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $X \in M_{n \times 1}$ es la matriz columna formada por las incógnitas

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ $B \in M_{m \times 1}$ es la matriz columna formada por los términos independientes

Según esta notación matricial, el sistema de ecuaciones se puede escribir de la forma:

$A \cdot X = B$, o sea,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

❑ *Ejemplos:*

1) Sea el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) El siguiente sistema viene dado por su expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vamos a expresarlo mediante sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

3) Sea el siguiente sistema de orden 2×3 expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comprobar si $x = 1$; $y = -1$; $z = 0$ es una solución del sistema.

En la expresión matricial sustituimos la matriz de las incógnitas X por la solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Debemos ver si esta igualdad es verdad o falsa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+0 \\ -1-1+2 \\ 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ → La igualdad es cierta → $x = 1$; $y = -1$; $z = 0$ es solución.

Veamos otra forma de expresar un sistema en forma matricial: $A \cdot X = B$

Para ello, recordemos la siguiente propiedad del producto de matrices: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$A \cdot X = B \to (A \cdot X)^t = B^t \to X^t \cdot A^t = B^t$$

Tenemos, por tanto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots b_m \end{pmatrix}$$

Sistemas triangulares

➢ ***Definición***:

Un ***sistema escalonado* o *triangular*** es un sistema de ecuaciones lineales del tipo:

$$\left.\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m-1,n-1}x_{n-1} + a_{m-1,n}x_n & = b_{m-1} \\ a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right\}$$

❑ ***Ejemplo:***

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad 2y - z = 4 \\ \qquad 2z = 12 \end{cases}$$

La ventaja de estos sistemas es que son muy fáciles de resolver.

En el ejemplo anterior, despejando de la última ecuación sale $z = 6$, de la segunda sale $y = 5$ y de la tercera ecuación sale $x = -9$:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \to x + 5 + 6 = 2 \to x = -9 \\ \quad 2y - z = 4 \to 2y - 6 = 4 \to 2y = 10 \to y = 5 \\ \qquad 2z = 12 \to z = 6 \end{cases}$$

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Atendiendo al número de sus soluciones, los sistemas se clasifican en:

- Sistemas ***Incompatibles***: no admiten ninguna solución.
- Sistemas ***compatibles***: admiten alguna solución. Éstos se clasifican en:
  - Sistemas ***compatibles determinados***: tienen una única solución.
  - Sistemas ***compatibles indeterminados***: tienen infinitas soluciones.

❑ ***Ejemplos:***

- Sistema compatible determinado: $\begin{cases} 3x - y + z = -3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - 2y - z = 2 \end{cases}$ Solución: x = 1, y = 2, z = -4
- Sistema compatible indeterminado: $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 3z = 3 \end{cases}$ Solución: $x = 1 - \lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

  (la tercera ecuación es suma de las dos anteriores)
- Sistema incompatible: $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} -7y + 2z = -2 \\ -7y + 2z = -11 \end{cases} \to 0 = 9 \to$ No hay solución

Sistemas de ecuaciones equivalentes

- ***Definición:***

Dos ***sistemas*** de ecuaciones se llaman ***equivalentes*** cuando admiten las mismas soluciones

Propiedades de la equivalencia de sistemas

- *Primera propiedad*: Si en un sistema **S** hay una ecuación que es combinación lineal de otra u otras ecuaciones, podemos suprimirla y obtenemos otro sistema $\mathbf{S}_1$ que es equivalente a **S**.

  NOTA: Una ecuación es combinación lineal de otra u otras, si se obtiene de ellas al multiplicarlas por un número y sumándolas o restándolas.

- *Segunda propiedad*: Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituye una ecuación por una combinación lineal de ella misma con otras ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente al primero.

La primera propiedad permite eliminar ecuaciones nulas, iguales y proporcionales.

La segunda propiedad permite ir transformando un sistema en otros equivalentes más fáciles de resolver.

2 SISTEMA DE ELIMINACIÓN DE GAUSS. DISCUSIÓN DE UN SISTEMA

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas se trata de obtener un sistema escalonado equivalente al inicial. Es decir, el método de Gauss consiste en triangular la matriz de los coeficientes.

Se efectúan las siguientes transformaciones para obtenerlo:

- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.
- Intercambiar dos ecuaciones entre sí.
- Cambiar el orden de las incógnitas.
- Suprimir una ecuación que:
  - Sea proporcional a otra.
  - Sea combinación lineal de otras ecuaciones.
  - Tenga todos los elementos nulos (coeficientes y término independiente).

- ***Ejemplo:***

Resuelve aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F3-F1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3+F2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ 2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-y=3 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases}$$

Solución: x = 3, y = -2, z = 0

Discusión del sistema

A la hora de discutir un sistema escalonado, en el cual todas las ecuaciones son linealmente independientes, se pueden presentar tres situaciones:

a) Si el nº de ecuaciones = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

b) Si el nº de ecuaciones > nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

c) Si hay una ecuación de la forma $0 \cdot x = b$, siendo $b \neq 0$, el sistema es incompatible.

❑ *Ejemplos:*

a) $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ x+y-z=2 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3+F2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3-F1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible (3ª ecuación: $0 \cdot x = -1$), por tanto, no hay solución.

b) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:E3+E1]{E2:E2+E1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:E3-2E2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado.

Hay dos ecuaciones l.i., con lo cual, consideramos una de las incógnitas como parámetro y expresamos las restantes en función de dicho parámetro.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y+z=-2x \\ y=3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=-2x+3y=-2x+9x=7x \\ y=3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=7x \\ y=3x \end{cases}$$

Solución: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:E3-E1]{E2:E2-2E1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:6E2+E3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ 23z=69 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2+2-3=1 \\ y=7-9=-2 \\ z=3 \end{cases} \rightarrow \text{Solución:}(1, -2, 3)$$

3 SISTEMAS DE CRAMER. REGLA DE CRAMER

➢ ***Definición:***

Se llaman ***sistemas de Cramer*** aquellos sistemas de ecuaciones lineales que cumplen las siguientes condiciones:

a) Tiene el mismo nº de ecuaciones que de incógnitas: m = n

b) El determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es no nulo: $|A| \neq 0$

Regla de Cramer

Todos los sistemas de Cramer son compatibles determinados y su solución única viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

donde

- A_i es la matriz que se obtiene a partir de la matriz de los coeficientes, cambiando la columna i por la columna de los términos independientes
- A es la matriz formada por los coeficientes.

Demostración:

Consideramos un sistema de Cramer escrito en forma matricial: $A \cdot X = B$

Al ser un sistema de Cramer se verifica que $|A| \neq 0$ y, por tanto, existe la matriz inversa A^{-1}.

Multiplicando los dos miembros de la ecuación matricial por la izquierda por A^{-1}, queda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos este producto, obtenemos:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}}{|A|} \ ; \ x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}}{|A|} ; \ \ldots.; \ x_n = \frac{b_1A_{n1} + b_2A_{n2} + \ldots + b_nA_{nn}}{|A|}$$

Cada uno de los numeradores de las incógnitas x_i es el desarrollo del determinante de la matriz A sustituyendo la columna i por la columna de los términos independientes. Es decir:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ ; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ ; \ \ldots\ldots \ ; \ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

❑ *Ejemplos:*

1. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-3y+3z=-2 \\ 2x+y-z=6 \\ 3x+2y+2z=6 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+12+3-9+4+2=14 \neq 0 \ \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{28}{14} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{14}{14} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-14}{14} = -1$$

2. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+z=4 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \ \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{4} = 3$$

3. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ 2x-y+3z=5 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \rightarrow \text{Es un sistema de Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-6} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1$$

4 DISCUSIÓN DE SISTEMAS. TEOREMA DE ROUCHE - FRÖBENIUS

La regla de Cramer no es aplicable en el caso de que el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas sea cero, ni tampoco en el caso de que el número de ecuaciones sea distinto del número de incógnitas.

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ $A \in M_{m \times n}$ matriz formada por los coeficientes de las incógnitas.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ $A^* \in M_{m \times n+1}$ matriz ampliada con los términos independientes.

Se verifica el siguiente ***teorema de Rouché-Fröbenius***:

"La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución (es compatible) si, y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada, A*".

Un sistema es compatible $\Leftrightarrow$ rg (A) = rg (A*).

Además si:

- rg (A) = rg (A*) = nº incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- rg (A) = rg(A*) < nº incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

  En este último caso se tiene que nº parámetros = nº incógnitas – rg (A)

Demostración:

($\Rightarrow$) Si el sistema es compatible admite al menos una solución.
Sea $(s_1, s_2, \dots\dots, s_n)$ una solución del sistema, sustituyendo en el sistema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \dots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \dots + a_{mn}s_n = b_m \end{array}\right\}$$

Sustituyendo los términos independientes b_i en la matriz ampliada, obtenemos:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{11}s_1 + \dots + a_{1n}s_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{21}s_1 + \dots + a_{2n}s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{m1}s_1 + \dots + a_{mn}s_n \end{array}\right)$$

La última columna de la matriz ampliada, A*, es combinación lineal de las restantes columnas, por tanto puede eliminarse a la hora de calcular el rango, quedando precisamente la matriz A.

Por tanto:

$$rg(A) = rg(A^*)$$

($\Leftarrow$) Supongamos que rg(A) = rg(A*) = r

Existe al menos un menor de orden r no nulo. Por tanto esas r ecuaciones dan lugar a un sistema equivalente al primitivo, ya que las m – r restantes ecuaciones que no intervienen en dicho menor son combinación lineal de las ecuaciones que dan lugar a dicho menor.

Consideramos las r incógnitas que intervienen en el menor como incógnitas principales y las restantes n – r incógnitas como parámetros.

De esta forma tenemos un sistema de Cramer, por tanto, es compatible.

Clasificación y discusión del sistema según el teorema de Rouché

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sea rg(A) = r

1) Si rg (A) ≠ rg(A*), el sistema es incompatible y no tiene solución.

2) Si rg (A) = rg(A*), el sistema es compatible y tiene solución.

a) rg (A) = rg (A*) = r = n (nº de incógnitas), el sistema es compatible determinado.

Su única solución se puede determinar mediante la regla de Cramer.

b) Si rg(A) = rg(A*) = r < n, el sistema es compatible indeterminado.

El sistema tiene infinitas soluciones que se determinan de la siguiente manera:

Consideramos las r ecuaciones que forman parte del menor, las restantes se suprimen del sistema.

Consideramos las r incógnitas que intervienen en el menor como incógnitas principales. Las restantes n – r incógnitas se consideran como un único término junto con el término independiente.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{array}\right\}$$

Las soluciones de las r incógnitas principales quedan expresadas en función de los n – r parámetros, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

❑ *Ejemplos:*

1) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=2 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

rg A = rg A* = 2 ya que F3 = F1 + F2 ; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

Si rg (A) = rg(A*) = 2 $\rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Consideramos del sistema las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte del menor y consideremos como incógnitas principales aquellas cuyos coeficientes aparecen en el menor:

$$\begin{cases} x+y=3-z \\ x=2-z \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-z & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{z-2}{-1}=2-z \qquad ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-1}=\frac{2-z-3+z}{-1}=1$$

Las infinitas soluciones del sistema son: x = 2 – z ; y = 1 ; z = z , es decir, $(2-\lambda,\ 1,\ \lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

2) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x-3y-5z=-4 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

|A| = 0 ya que F3 + F2 + F1 = 0 $\rightarrow$ rg A = 2 , considerando que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=2+3\neq 0$

Estudiamos el rango de A*:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right)\xrightarrow{F3=F3+F2+F1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=4\neq 0 \rightarrow \text{rg } A^*=3$$

Por tanto, el sistema es incompatible.

5 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS: MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Ya hemos visto dos procedimientos de resolución de sistemas: método de Gauss y la regla de Cramer.

El método de la matriz inversa consiste en expresar el sistema en forma matricial **A·X** = B y despejar la matriz X, siempre que exista su inversa, A^{-1}:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

❑ ***Ejemplos:***

1) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} -x+y+z=-1 \\ x-3z=-18 \\ 2x-5y+3z=52 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -5-6-3+15 = 1$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj}\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los adjuntos de cada elemento de A^T:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -15 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3+5) = -8 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(3+6) = -9 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(5-2) = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Calculamos la matriz X, solución del sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Por tanto, la solución del sistema es: x = 3, y = -5, z = 7

2) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 5 \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj}\left(A^T\right) = \frac{1}{5}\cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5}\cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: x = 1, y = 2, z = -1

6 DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON PARÁMETROS

En este apartado estudiaremos algunos ejemplos de discusión de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

Recuerda que hay dos procedimientos para analizar el nº de soluciones del sistema:

- El teorema de Rouchè-Fröbenius.
- El método de Gauss.

Hay tres métodos de resolución de sistemas lineales compatibles:

- El método de Gauss.
- La regla de Cramer.
- Empleando la matriz inversa.

❑ *Ejemplos:*

1) Sea considera el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2y+z&=a \\ (a-2)x+y+3z&=0 \\ (a-1)y&=1-a \end{aligned}\right\}$$

a) Estudie el sistema, según los valores de a $\in \mathbb{R}$.

b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

Consideramos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-1=5\neq 0 \quad \to \text{rg } A \geq 2$$

$|A| = (a-2)\cdot(a-1) = 0$ si $a = 1$, $a = 2$

Por tanto, rg A = 2 si a = 1, a = 2.

- Si $a = 1 \to A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ rg A* = 2 = rg A $\to$ sistema compatible indeterminado.

Tenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2y+z&=1 \\ -x+y+3z&=0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 2y+z&=1 \\ y+3z&=x \end{aligned}\right\} \to y=\frac{3-x}{5};\ z=\frac{2x-1}{5}$$

Las soluciones son $(5\lambda, 3-\lambda, 2\lambda-1) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

- Si a = 2 → $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ → rg A* ≠ rg A → sistema incompatible.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6-6+1 = -11 \neq 0 \ \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

- Si a ≠ 2 , a ≠ 1 → rg A* = rg A = 3 → sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z=a \\ (a-2)x+y+3z=0 \\ (a-1)y=1-a \end{array}\right\} \rightarrow y=\frac{1-a}{a-1}=-1 \ \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y+z=a \\ (a-2)x+y+3z=0 \\ (a-1)y=1-a \end{array}\right\} \rightarrow y=\frac{1-a}{a-1}=-1$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, obtenemos: -2 + z = a → z = a + 2

Empleando la 2ª ecuación, calculamos x:

$$(a-2)x - 1 + 3(a+2) = 0 \rightarrow (a-2)\,x = 1 - 3a - 6 \ \rightarrow \ x = \frac{5+3a}{2-a}$$

También se podía aplicar la regla de Cramer:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow |A| = (a-2)\cdot(1-a) \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{array}\right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1-a & a-1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3a(a-1)+5(1-a)}{(a-2)(a-1)} = \frac{(3a+5)(1-a)}{(a-2)(a-1)} = \frac{3a+5}{2-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a-2 & 0 & 3 \\ 0 & 1-a & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(a-2)(a-1)}{(a-2)(a-1)} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ a-2 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(a-2)\left[2(1-a)-a(a-1)\right]}{(a-2)(a-1)} = -\frac{(-2-a)(a-1)}{a-1} = 2+a$$

2) Dado el número real a, se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+z=a \\ ax-y+z=1 \\ -ax-y+z=a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema según los valores de a.

b) Resuelva el sistema para el caso a = 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F3=F2-F3} \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-1)=0 \to a = 1, a = 0$

- Si a = 0 $\to$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$ rg A* $\neq$ rg A $\to$ sistema incompatible.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{rg } A^* = 3$$

- Si a = 1 $\to$ $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$ rg A* = rg A $\to$ sistema compatible indeterminado.

- Si a = 2 $\to$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$ |A| = 4 (sustituyendo a = 2)

  Aplicando el método de Gauss para resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2=-F1+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

  El sistema triangular equivalente que hemos obtenido es:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=2 \\ x+y=-1 \\ 4x=-1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{4}+\frac{6}{4}+z=2 \to z=\frac{3}{4} \\ y=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4} \\ x=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

  Por tanto la solución del sistema es: $\left(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

3) Estudiar el sistema para los distintos valores del parámetro “a”. Resolver en caso de ser compatible.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser un sistema homogéneo el rang(A) = rang(A*), por tanto, admite la solución trivial (0, 0, 0)

|A| = (2a + 2 + 45) – (-5a + 3 – 12) = 7a + 56

|A| = 0 $\rightarrow$ 7a + 56 = 0 $\rightarrow$ a = – 8

Si a = – 8 $\rightarrow$ rang (A) = rang(A*) = 2 < nº incógnitas $\rightarrow$ S.C.I.

Si a $\neq$ – 8 $\rightarrow$ rang (A) = rang(A*) = 3 = nº incógnitas $\rightarrow$ S.C.D.

Resolución para a = -8

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2\leftrightarrow F1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-5F1]{F2=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -19 & 7 \\ 0 & -38 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+8y-3z=0 \\ -19y+7z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+8y=3z \\ 19y=7z \end{array}\right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{\begin{array}{l} x=3z-8y=3\lambda-\dfrac{56\lambda}{19}=\dfrac{\lambda}{19} \\ y=\dfrac{7\lambda}{19} \end{array}\right.$$

Solución: x = λ, y = 7λ, z = 19λ