Ficha n^o 1: Sistemas de ecuaciones lineales: Método de Gauss

Alumno:

1. Resuelve los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{c} 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=3 \\ 7x+3y+5z=2 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible determinado
La solución es $H=\left\{\left(\frac{11}{5},-\frac{14}{5},-1\right)\right\}$

b. $\left.\begin{array}{c} x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=3 \\ 6x+5y+z=7 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado
La solución es:$H=\left\{\left(\frac{4}{7}-z,z+\frac{5}{7},z\right)/z\in\mathbb{R}\right\}$

c. $\left.\begin{array}{c} x+2y-z=2 \\ 3x+y+2z=3 \\ 2x-1y+3z=1 \\ 10x+5y+5z=11 \end{array}\right\},$

El sistema es compatible indeterminado
La solución es:$H=\left\{\left(\frac{4}{5}-z,z+\frac{3}{5},z\right)/z\in\mathbb{R}\right\}$

d. $\left.\begin{array}{c} 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=3 \\ 7x+3y+2z=4 \end{array}\right\}$

El sistema es incompatible

e. $\left.\begin{array}{c} 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=3 \\ 7x+3y+5z=4 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible determinado.
La solución es $H=\left\{\left(\frac{19}{15},-\frac{16}{15}-\frac{1}{3}\right)\right\}$

f. $\left.\begin{array}{c} 3x+2y-z+t=2 \\ 4x+y+3z+t=3 \\ 7x+3y+2z+2t=4 \end{array}\right\}$

El sistema es incompatible

g. $$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z+t=2 \\ 4x+y+3z+t=3 \\ 7x+3y+5z+2t=4 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado
La solución es $H=\left\{\left(y+\frac{7}{3}, y, -\frac{1}{3}, -5y-\frac{16}{3}\right)\ /\ y\in\mathbb{R}\right\}$

h. $$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z+t=2 \\ 4x+y+3z+t=3 \\ 7x+3y+5z+2t=5 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado
La solución es:$H=\{(y+1, y, 0, -5y-1)\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

i. $$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z+t=2 \\ 4x+y+3z+t=3 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible doblemente indeterminado
La solución es:$H=\{(y-4z+1, y, z, 13z-5y-1)\ /\ y,z\in\mathbb{R}\}$

2. *(Valencia 2007)* Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=\alpha \end{array}\right\}$
   a) Justifica que para cualquier valor de α el sistema tiene solución única
   b) Encuentra la solución del sistema en función del parámetro α
   c) Determina el valor de α para el que la solución (x,y,z) del sistema satisface la ecuación $x+y+z=1$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+2z=\alpha \\ 3x+4y+6z=3 \\ 6x+3y+2z=5 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & \alpha \\ 3 & 4 & 6 & | & 3 \\ 6 & 3 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2^a ec' = 2^a ec - 3{\cdot}1^a ec \\ 3^a ec' = 3^a ec - 6{\cdot}1^a ec \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & \alpha \\ 0 & -5 & 0 & | & 3-3\alpha \\ 0 & -15 & -10 & | & 5-6\alpha \end{pmatrix} \rightarrow [3^a ec'' = 3^a ec' - 3{\cdot}2^a ec']$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & \alpha \\ 0 & -5 & 0 & | & 3-3\alpha \\ 0 & 0 & -10 & | & -4+3\alpha \end{pmatrix}$$

Como todos los elementos de la diagonal principal son no nulos; el sistema es compatible determinado (solución única) independientemente del valor que asignemos al parámetro α

Con lo que el sistema inicial es equivalente a resolver

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=\alpha \\ -5y=3-3\alpha \\ -10z=-4+3\alpha \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema; tendremos:
De la 3^a ec obtenemos que $z=\frac{4-3\alpha}{10}$
De la 2^a ec obtenemos que $y=\frac{3\alpha-3}{5}$
Sustituyendo el valor de estas incógnitas en la 1^a ec.

$$x+\frac{9\alpha-9}{5}+\frac{4-3\alpha}{5}=\alpha \rightarrow x=\alpha+\frac{5-6\alpha}{5}=\frac{5-\alpha}{5}$$

Para cada α que consideremos el sistema tiene solución única y ésta es:

$$S=\left\{\left(\frac{5-\alpha}{5},\frac{3\alpha-3}{5},\frac{4-3\alpha}{10}\right)\right\}$$

Si ahora queremos determinar el valor de α tal que la solución $(x,y,z)=\left(\frac{5-\alpha}{5},\frac{3\alpha-3}{5},\frac{4-3\alpha}{10}\right)$ verifique la condición $x+y+z=1$.Entonces; se ha de verificar que:

$$\frac{5-\alpha}{5}+\frac{3\alpha-3}{5}+\frac{4-3\alpha}{10}=1$$

Resolviendo esta ecuación, obtendremos que:

$$\alpha=2$$

3) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ x-2y=0 \\ 4x-3y=0 \end{array}\right\}$

Sistema compatible determinado
La solución es la trivial $S=\{(0,0,0)\}$

b) $\left.\begin{array}{c} x-2y=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+z=0 \end{array}\right\},$

Sistema compatible indeterminado
La solución es el conjunto $S=\left\{\left(-\frac{2}{7}z,-\frac{1}{7}z,z\right)\ /\ z\in\mathbb{R}\right\}$
El conjunto solución también se puede expresar así:

$$S=\{(-2\alpha,-\alpha,7\alpha)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}$$

c) $\left.\begin{array}{c} x-2y-3t=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y-z=0 \\ 2y+t=0 \end{array}\right\}$

Sistema compatible determinado
La solución es la trivial $S = \{(0,0,0,0)\}$

d) $\left.\begin{array}{c} x-2y-3t=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+z+6t=0 \\ 7y+z-6t=0 \end{array}\right\}$

Sistema compatible indeterminado
La solución es el conjunto $S = \left\{\left(-\frac{2}{7}z, -\frac{1}{7}z, z, 0\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$
El conjunto solución también se puede expresar así:

$$S = \{(-2\alpha, -\alpha, 7\alpha, 0) \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

e) $\left.\begin{array}{c} x-2y-z+3t=0 \\ 2x+3y+5z-t=0 \\ 4x-y+3z+5t=0 \\ x+7y+8z-6t=0 \end{array}\right\}$

Sistema compatible doblemente indeterminado
La solución es el conjunto $S = \{(-y-2z, y, z, y+z) \ / \ y \ , \ z \in \mathbb{R}\}$

4. Determinar el valor del parámetro α para que el sistema $\left.\begin{array}{c} x-2y-z=0 \\ 2x+3y+5z=0 \\ 4x-y+\alpha z=0 \end{array}\right\}$ admita soluciones diferentes de la trivial.

Solución
Si $\alpha \neq 3 \rightarrow$El sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial $S = \{(0,0,0)\}$
Si $\alpha = 3 \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado (admite soluciones diferentes de la trivial)
Siendo sus soluciones los elementos del siguiente conjunto:

$$S = \{(-z, -z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$$

5. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{c} x-y+2z=5 \\ 3x-4y+z=3 \\ x+\alpha y-3z=-7 \end{array}\right\}$
   a) Encuentra para qué valor de α el sistema tiene infinitas soluciones
   b) Para dicho valor resuélvelo
   c) ¿Qué condición ha de verificar α para que el sistema tenga solución única? Resuelve el sistema para $\alpha = 3$ y para $\alpha = 5$.¿Cómo son las soluciones en ambos casos?

Solución
$\left\{\begin{array}{lll} \text{Si } \alpha \neq -2 & S.C.D & S = \left\{\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)\right\} \\ \text{Si } \alpha = -2 & S.C.I & S = \{(-7z+17, -5z+12, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\} \end{array}\right.$