Análisis

1) Halle $f\,'(2)$, $g\,'(4)$ y $h\,'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}\,; \quad g(x) = (x^2+9)^3\,; \quad h(x) = \mathrm{L}(x^2+1)\,. \qquad \textit{(3 puntos)}$$

2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x) = \frac{3-x}{x-2} \qquad \textit{(5 puntos)}$$

3) Sea f la función definida por: *(2 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+bx+3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

Soluciones

1) Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}; \quad g(x) = (x^2+9)^3; \quad h(x) = \mathrm{L}(x^2+1).$$

Simplemente, aplicando las reglas de derivación, se obtiene:

$$f'(x) = 2x - \frac{32x}{x^4} = 2x - \frac{32}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4 - \frac{32}{8} = 4 - 4 = 0$$

$$g'(x) = 3(x^2+9)^2 2x = 6x(x^2+9)^2 \quad \Rightarrow \quad g'(4) = 24(16+9)^2 = 15.000$$

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad h'(0) = \frac{0}{1} = 0$$

2) Estudiar y dibujar, basándose en el estudio previo, la gráfica de la función:

$$g(x) = \frac{3-x}{x-2}$$

a) Dominio: $D(f) = \mathrm{R} - \{2\}$, ya que 2 anula el denominador, y no se puede dividir entre cero.

b) Par/Impar: $g(-x) = \dfrac{3+x}{-x-2} = \dfrac{3+x}{-(x+2)} = -\dfrac{3+x}{x-2}$ que no coincide ni con $g(x)$ ni con $-g(x)$. Por tanto, ni es par, ni impar.

c) Intersecciones con los ejes: Si $x = 0 \Rightarrow y = -3/2$. Corta a OY en $(0, -3/2)$.

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{3-x}{x-2} \Rightarrow 0 = 3-x$ (siempre que la solución no anule el denominador $x-2$) $\Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ Corta a OX en $(3, 0)$.

d) Monotonía y extremos relativos: $g'(x) = \dfrac{-(x-2)-(3-x)}{(x-2)^2} = \dfrac{-x+2-3+x}{(x-2)^2} = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$

- Discontinuidades de g ó de g': $x = 2$, que anula el denominador tanto de una como de otra.
- Puntos que anulan g': No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos R en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
g'	–	∄	–
g	↘	∄	↘

No tiene extremos relativos.

e) Curvatura y puntos de inflexión: $g''(x) = \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{2}{(x-2)^3}$

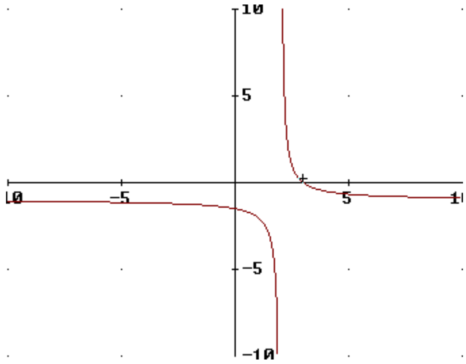
- Discontinuidades de g ó de g'': $x = 2$
- Puntos que anulan g': No hay (el numerador nunca se anula).

Dividimos R en intervalos por el único punto obtenido, y resulta:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
g''	–	∄	+
g	∩	∄	∪

No tiene puntos de inflexión, puesto que $x = 2$ no pertenece al dominio.

f) <u>Gráfica</u>:



3) Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

En primer lugar, para ser derivable debe ser continua. Como en las dos zonas en las que se define f lo hace con expresiones polinómicas, que siempre son continuas, sólo hay que exigirle la continuidad en el punto de separación de ambas zonas de definición, o sea, en $x = 1$. Como $f(1)$ existe, y vale $4+b$, y los límites laterales son:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax^2 + 1) = a+1 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + bx + 3) = 4+b$$

hay que exigir: $a+1 = 4+b \ \Rightarrow \ a = 3+b$

Por otra parte, $f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Exigimos que $f'(1^-) = f'(1^+) \ \Rightarrow \ 2a = 2+b$. Sustituyendo aquí $a = 3+b$:

$2(3+b) = 2+b \ \Rightarrow \ 6+2b = 2+b \ \Rightarrow \ b = -4$.

Sustituyendo: $a = 3+b = 3-4 = -1$

Luego $a = -1$, $b = -4$.