

Problemas con enunciado

18. Un tendero dispone de una furgoneta en la que puede cargar hasta 800 kg y de 500 € para gastar. Va al mercado central a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,70 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg.

a) Venderá las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,60 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

b) ¿Cambiaría la solución si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg?

Solución:

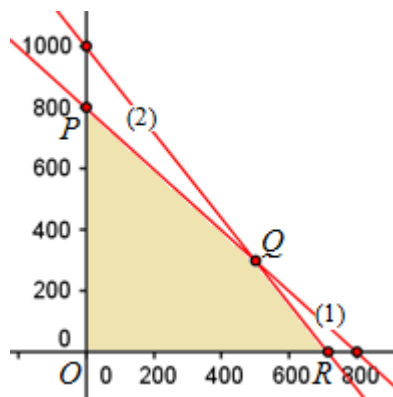
a) El beneficio por cada kg de manzanas es de 0,20 €; y por cada kg de naranjas, de 0,10 €. Por tanto, si compra x kg de manzanas e y de naranjas, el beneficio viene dado por la función $f(x, y) = 0,20x + 0,10y$

Las restricciones son:

$x + y \leq 800 \rightarrow$ la furgoneta puede cargar hasta 800 kg

$0,70x + 0,50y \leq 500 \rightarrow$ dispone de 500 euros.

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.



Los vértices son:

$O = (0, 0)$; $P = (0, 800)$;

$Q: \begin{cases} x + y = 800 \\ 0,70x + 0,50y = 500 \end{cases} \Rightarrow Q(500, 300)$;

$R = (714,3, 0)$

El máximo de la función objetivo, $f(x, y) = 0,20x + 0,10y$, se da en alguno de los vértices de la región factible.

El beneficio que se obtiene en cada caso es:

En O , $f(0,0) = 0$. En P , $f(0, 800) = 80$ €.

En Q , $f(500, 300) = 130$ €. En R , $f(714,3, 0) = 142,86$ €.

El máximo beneficio se obtiene comprando solo manzanas: 714,3 kg. Ese beneficio será de 142,86 euros.

b) Si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg, la función de beneficios es $g(x, y) = 0,20x + 0,15y$. En este caso, el beneficio que se obtiene en cada vértice es:

En O , $g(0,0) = 0$. En P , $f(0, 800) = 120$ €.

En Q , $f(500, 300) = 145$ €. En R , $f(714,3, 0) = 142,86$ €.

El máximo beneficio, que es de 145 €, se obtiene comprando 500 kg de manzanas y 300 de naranjas.

19. Una empresa textil tiene en su almacén 4000 toallas de baño (grandes) y 3000 toallas de mano (pequeñas). Para favorecer su venta las distribuye en lotes de dos tipos, A y B. Cada lote del tipo A contiene 1 toalla de baño y 1 de manos. Cada lote del tipo B contiene 2 toallas de baño y 1 de manos. La empresa obtiene un beneficio de 2 euros por cada lote del tipo A y 3 euros por cada lote del tipo B.

Halla el número de lotes de cada tipo para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:

Los datos del enunciado se resumen en la siguiente tabla:

Lote	Cantidad	T. baño	T. manos	Beneficio
A	x	x	x	$2x$
B	y	$2y$	y	$3y$
Disponible		4000	3000	

El objetivo es maximizar los beneficios. Esto es:

Maximizar $B(x, y) = 2x + 3y$

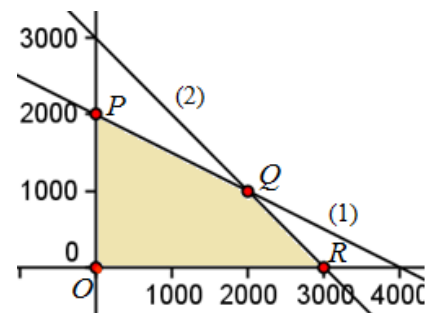
restringido por:

$$x + 2y \leq 4000 \quad (1)$$

$$x + y \leq 3000 \quad (2)$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Estas restricciones generan la región factible sombreada en la figura.



Los vértices son:

$$O = (0, 0); P = (0, 2000); Q: \begin{cases} x + 2y = 4000 \\ x + y = 3000 \end{cases} \Rightarrow Q = (2000, 1000); R = (3000, 0)$$

El beneficio máximo se obtiene en alguno de los vértices de la región factible. Ese beneficio es:

En O , $B(0, 0) = 0$ €.

En P , $B(0, 2000) = 6000$ €.

En Q , $B(2000, 1000) = 4000 + 3000 = 7000$ €.

En R , $B(3000, 0) = 6000$ €.

Para maximizar el beneficio deben venderse 2000 lotes del tipo A y 1000 del tipo B. El beneficio máximo será de 7000 euros.

20. Una empresa constructora dispone de 93000 m² de terreno urbanizable. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: una en parcelas de 400 m², que albergarán a familias de una media de cinco miembros, y cuyo precio de venta será de 200000 euros; otra, en parcelas de 300 m², en donde vivirán familias de una media de cuatro miembros, y costarán 160000 euros. Las autoridades del municipio le imponen dos condiciones:

1.^a El número de casas no puede superar las 275;

2.^a El número de habitantes esperado no puede ser superior a 1200 personas.

¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para maximizar los ingresos por venta?

Solución:

Construyendo x viviendas grandes (400 m²) e y pequeñas, se tendrá:

Viviendas	Número	Superficie	Personas	Ingresos (miles)
Grandes	x	$400x$	$5x$	$200x$
Pequeñas	y	$300y$	$4y$	$160y$
Condiciones	275	93000	1200	

El problema consiste en:

Maximizar $I(x, y) = 200x + 160y$ (en miles de €)

Restringido por:

$$x + y \leq 275 \quad (1)$$

$$400x + 300y \leq 93000 \quad (2)$$

$$5x + 4y \leq 1200 \quad (3)$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

La región factible es el pentágono de vértices:

$O(0, 0)$, $A(0, 275)$, $B(100, 175)$, $C(120, 150)$ y $D(232,5, 0)$

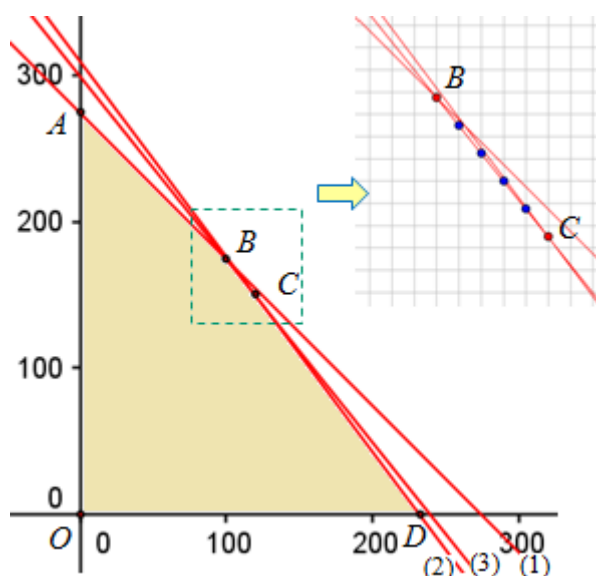
Los ingresos en cada vértice son:

$$I(0, 275) = 4320000 \text{ €};$$

$$I(100, 175) = 4800000 \text{ €};$$

$$I(120, 150) = 4800000 \text{ €};$$

$$I(232,5, 0) = 4650000 \text{ €}$$



El máximo se da en B y C , indistintamente. Por tanto, valen todos los pares de coordenadas enteras pertenecientes al segmento BC , que son: $B(100, 175)$, $(104, 170)$, $(108, 165)$, $(112, 160)$, $(116, 155)$, $C(120, 150)$. En cada caso, los ingresos ascenderán a 4800000 euros.

21. Una empresa conservera puede enlatar diariamente un máximo de 1000 kg de atún. Tiene dos tipos de envases (latas pequeñas y grandes), cuyo contenido neto es de 90 g y 400 g, respectivamente. Por razones de producción, el número de latas pequeñas no puede superar el doble de las grandes. Si la ganancia empresarial es de 0,30 € por lata pequeña y de 0,80 € por grande, ¿cómo debe planificarse la producción para que esa ganancia sea máxima?

Solución:

Sean x e y , respectivamente, el número de latas pequeñas y grandes que se envasan.

Objetivo: maximizar $f(x, y) = 0,30x + 0,80y$

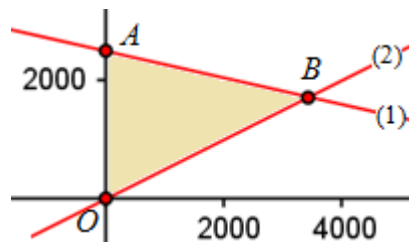
Restricciones:

$$0,09x + 0,4y \leq 1000; \quad x \leq 2y; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

La región factible es el triángulo de vértices:

$O(0, 0)$, $A(0, 2500)$ y

$B(200000/58, 100000/58) \approx (3448, 1724)$.



El máximo se da en B , y vale 2413,60 €.

22. Una fábrica de caramelos los produce de dos tipos, masticable y normal. La empresa debe fabricar, para cada tipo de caramelo, entre 300 kg y 3000 kg a la semana. El caramelo masticable se vende a 3 €/kg; el normal 2,5 €/kg. Sabiendo que la producción total no puede ser superior a 5100 kilos de caramelo a la semana, ¿cuántos debe producir de cada tipo para maximizar los ingresos?

Solución:

Si se producen x kg de masticable e y kg de normal, el problema consiste en:

Maximizar $f(x, y) = 3x + 2,5y$

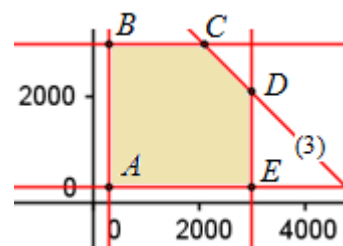
Restringida por:

$$300 \leq x \leq 3000; \quad 300 \leq y \leq 3000; \quad x + y \leq 5100$$

La región factible es el polígono de vértices:

$A(300, 300)$; $B(300, 3000)$; $C(2100, 3000)$;

$D(3000, 2100)$; $E(2100, 300)$



El máximo, que vale 14250 €, se da en D : cuando se fabrican 3000 kg de caramelo masticable y 2100 kg de caramelo normal.

23. Para abonar una finca se necesitan 400 kg de nitrógeno y 600 kg de fósforo. En el mercado hay dos marcas de abonos, P y Q . Cada paquete de abono P contiene 2 kg de nitrógeno y 6 de fósforo, mientras que cada paquete de Q contiene 4 kg de nitrógeno y otros 4 de fósforo. Si el abono Q es un 25% más caro que el P , ¿cuántos paquetes hay que comprar de cada marca para abonar la finca con el menor coste posible?

Solución:

Si se compran x paquetes de la marca P (un precio 1 u.m.) e y paquetes de la marca Q (cuyo precio será 1,25 u.m.) la información se resume en la tabla:

Marca	Cantidad	Nitrógeno	Fósforo	Precio
P	x	$2x$	$6x$	$1 \cdot x$
Q	y	$4y$	$4y$	$1,25 \cdot y$
Necesidades		400	600	

Con esto, el problema es:

Minimizar $f(x, y) = x + 1,25y$

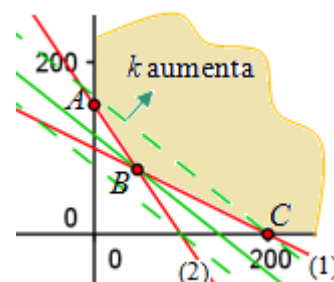
Restringida por:

$$2x + 4y \geq 400; \quad 6x + 4y \geq 600; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

La región factible, no acotada, tiene vértices en $A(0, 150)$, $B(50, 75)$ y $C(200, 0)$.

La ecuación de las rectas de nivel es $x + 1,25y = k$; su nivel aumenta cuando se desplazan hacia la derecha.

Por tanto, el mínimo se da en B . Hay que comprar 50 paquetes de la marca P y 75 de la Q . El precio a pagar es $f(50, 75) = 50 + 1,25 \cdot 75 = 143,75$ €.



24. Para estar convenientemente alimentado, un caballo necesita 12 unidades de un alimento A_1 , otras 12 de A_2 y 10 de A_3 . En el mercado hay dos tipos de piensos, P_1 y P_2 , cuyos precios respectivos son 3 y 2 €/kg. El pienso P_1 proporciona 1, 2 y 5 unidades de A_1 , A_2 y A_3 ; mientras que P_2 suministra 4, 2 y 1 unidad de A_1 , A_2 y A_3 , respectivamente en ambos casos. ¿Cuántos kg de cada pienso hay que comprar para alimentar a un caballo a un coste mínimo?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Pienso	Cantidad	A_1	A_2	A_3	Coste
P_1	x	x	$2x$	$5x$	$3x$
P_2	y	$4y$	$2y$	y	$2y$
Necesidad		12	12	10	

Con esto, el problema es:

Minimizar $f(x, y) = 3x + 2y$

Restringida por:

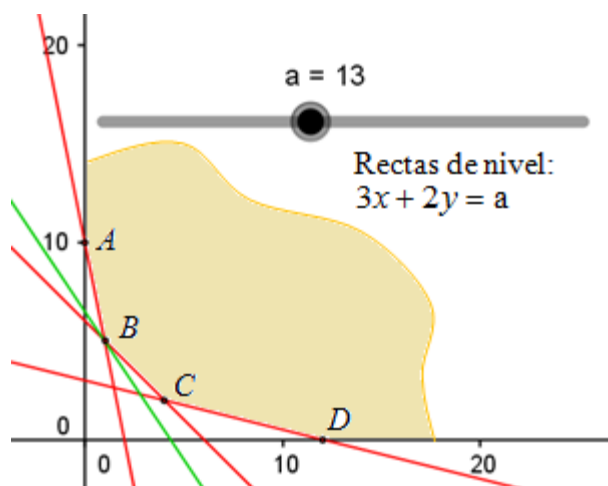
$$x + 4y \geq 12; \quad 2x + 2y \geq 12;$$

$$5x + y \geq 10; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

La región factible, no acotada, tiene vértices en $A(0, 10)$, $B(1, 5)$, $C(4, 2)$ y $D(12, 0)$.

La ecuación de las rectas de nivel es $3x + 2y = a$; su nivel disminuye cuando se desplazan hacia la izquierda.

Por tanto, el mínimo se da en B . Hay que comprar 1 kg del tipo P_1 y 5 kg del tipo P_2 . El precio a pagar es $f(1, 5) = 3 + 2 \cdot 5 = 13$ €.



Observación: En este problema he creado con GeoGebra el “deslizador” $3x + 2y = a$. Moviendo el punto se desplaza la recta: la recta más a la izquierda en contacto con la región factible es la que pasa por el punto B , siendo $a = 13$.

(Puedes crearlo tecleando $2x+y=a$ intro Crea deslizadores ...)

25. Una empresa tiene dos centros de producción (C1 y C2) en los que fabrica tres tipos de artículos A1, A2 y A3. Dicha empresa debe fabricar diariamente un mínimo de 360 unidades del artículo A1, 320 del A2 y 180 del A3. La producción por hora en cada centro viene dada en la siguiente tabla:

Producción	A1	A2	A3
En C1	25	30	10
En C2	30	20	18

Si cada hora de funcionamiento cuesta 800 euros en C1 y 1000 en C2, ¿cuántas horas debe funcionar cada centro para que, produciendo, al menos, lo necesario, se reduzcan al mínimo los costes de producción?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Producción	Horas	A1	A2	A3
En C1	x	$25x$	$30x$	$10x$
En C2	y	$30y$	$20y$	$18y$
Necesidades		360	320	180

Si C1 y C2 funcionan x e y horas, respectivamente, el coste será de $f(x, y) = 800x + 1000y$.

El objetivo es minimizar esa suma.

Restricciones:

$$25x + 30y \geq 360; \quad 30x + 20y \geq 320;$$

$$10x + 18y \geq 180; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta, cuyos vértices son:

$A(0, 16)$, $B(6, 7)$, $C(7,2, 6)$ y $D(18,0)$.

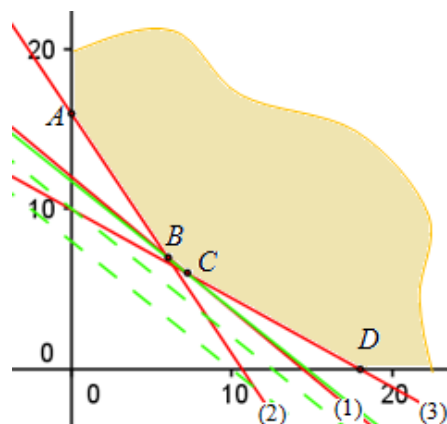
La función objetivo toma los valores:

$$f(0,16) = 16000; \quad f(6,7) = 11800,$$

$$f(7,2,6) = 11760; \quad f(18,0) = 14400$$

La solución más económica es que el centro C1 funcione durante 7,2 horas y el centro C2, durante 6.

En la figura se trazan las rectas de nivel $800x + 1000y = k$.



26. (Propuesto en Selectividad). Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante. El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Pintura	kilos	A	B	Beneficio
Mate	x	$0,4x$	$0,6x$	$4x$
Brillante	y	$0,2y$	$0,8y$	$5y$
Disponible		200	500	

Con esto, el problema es:

Maximizar $B(x, y) = 4x + 5y$

Restringida por:

$$0,4x + 0,2y \leq 200; \quad 0,6x + 0,8y \leq 500;$$

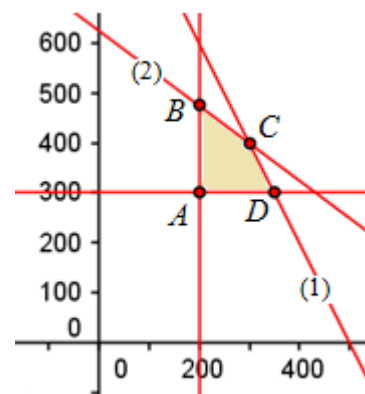
$$x \geq 200; \quad y \geq 300; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

La región factible, acotada, tiene vértices en:

$A(200, 300)$, $B(200, 475)$, $C(300, 400)$ y $D(350, 300)$.

El beneficio en cada vértices es: 2300, 3175, 3200 y 2900 euros, respectivamente.

El máximo es de 3200 €, y se da cuando se fabrican 300 kg de pintura mate y 400 kg de pintura brillante.



27. (Propuesto en Selectividad). Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Tarta	Cantidad	Masa	Crema	Nata	Beneficio
Chocolate	x	x	$2x$		$10x$
Choc y crema	y	$2y$	y	y	$12y$
Disponible		100	80	46	

Con esto, el problema es:

Maximizar $B(x, y) = 10x + 12y$

Restringida por:

$$x + 2y \leq 100; \quad 2x + y \leq 80;$$

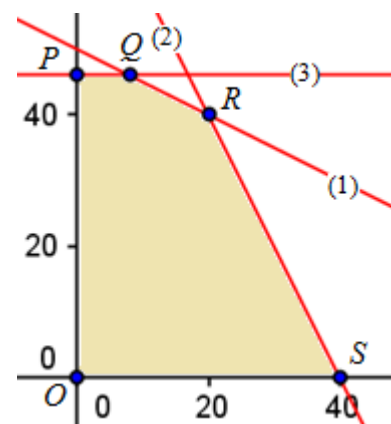
$$y \leq 46; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

Los vértices de la región factible son:

$O(0, 0)$, $P(0, 46)$, $Q(8, 46)$, $R(20, 40)$ y $S(40, 0)$.

El beneficio en cada vértices es: 0, 552, 632, 680 y 400 euros, respectivamente.

El máximo es de 680 €, y se da cuando se fabrican 20 tartas de chocolate y 20 de chocolate y nata.



28. Una empresa tiene dos plantas de producción (P_1 y P_2) de cierto artículo que vende en tres ciudades (C_1 , C_2 y C_3). En P_1 produce 5000 unidades y en P_2 , 7000 unidades; estas 12000 unidades las vende así: 3500 en C_1 , 4000 en C_2 y 4500 en C_3 . Los costes de transporte, en euros por unidad de producto, desde las plantas de producción a los centros de ventas son los siguientes:

	a C1	a C2	a C3
Desde P1	30	25	35
Desde P2	22,5	37,5	40

Determina qué número de artículos debe enviar la empresa desde cada planta a cada ciudad para que los costes de transporte sean mínimos.

Solución:

En los problemas de este tipo se exige que toda la producción sea distribuida a los centros de ventas en las cantidades que precisa cada uno; por tanto, no pueden generarse stock del producto ni en las fábricas ni en los centros de ventas. (La generación de stock añade problemas considerables a las empresas; piensa, por ejemplo, en las dificultades de almacenaje que implica el exceso de producción de coches a una empresa automovilística).

En consecuencia, los 5000 artículos producidos en P1 deben distribuirse en las cantidades x , y , z a C1, C2, y C3, de manera que $x + y + z = 5000$. Pero, además, si desde P1 se envían x unidades a C1, el resto, hasta las 3500 necesarias en C1, deben ser enviadas desde P2; esto es, $3500 - x$ unidades serán las enviadas desde P2 a C1.

Del mismo modo, si de P1 a C2 se envían y , el resto necesario, $4000 - y$, deben enviarse desde P2. Y lo mismo para C3, que recibirá z desde P1 y $4500 - z$ desde P2.

En la siguiente tabla se resume lo dicho.

Envíos	a C1 (3500)	a C2 (4000)	a C3 (4500)
Desde P1 (5000)	x	y	z
Desde P2 (7000)	$3500 - x$	$4000 - y$	$4500 - z$

Como $x + y + z = 5000$, se tiene que $z = 5000 - x - y \Rightarrow 4500 - z = -500 + x + y$

Ahora bien, todas las cantidades anteriores deben ser mayores o iguales que cero y menores o iguales que las cantidades demandadas. Por tanto, se obtiene las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 3500 \quad (1); & \quad 0 \leq y \leq 4000 \quad (2); & \quad 0 \leq 5000 - x - y \leq 4500 \quad (3) \\ 0 \leq 3500 - x \leq 3500 \quad (4); & \quad 0 \leq 4000 - y \leq 4000 \quad (5); & \quad 0 \leq -500 + x + y \leq 4500 \quad (6) \end{aligned}$$

Transformando esas seis restricciones y observando que se repiten, quedan:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 3.500 & \quad (1) \text{ y } (4) \\ 0 \leq y \leq 4.000 & \quad (2) \text{ y } (5) \\ 500 \leq x + y \leq 5000 & \quad (3) \text{ y } (6) \end{aligned}$$

Recuerda que nuestro objetivo es abaratar, al máximo, los costes de transporte. Estos costes se hallan multiplicando las cantidades enviadas desde cada planta a cada ciudad por los respectivos costes de transporte unitario.

Se obtiene:

$$C(x, y) = 30x + 25y + 35(5000 - x - y) + 22,5(3500 - x) + 37,5(4000 - y) + 40(-500 + x + y)$$

$$C(x, y) = 12,5x - 7,5y + 383750$$

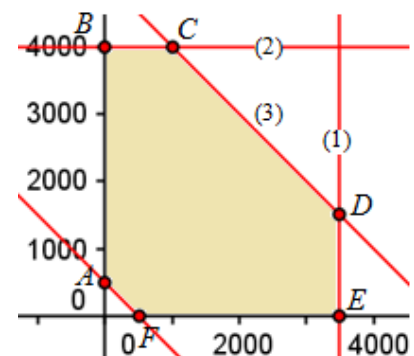
En definitiva, el objetivo es:

$$\text{Minimizar } C(x, y) = 12,5x - 7,5y + 383750$$

$$\begin{aligned} \text{sujeta a: } & 0 \leq x \leq 3500 & (1) \\ & 0 \leq y \leq 4000 & (2) \\ & 500 \leq x + y \leq 5000 & (3) \end{aligned}$$

La región factible es la adjunta. Sus vértices son:

$$A(0, 500), B(0, 4000), C(1000, 4000), \\ D(3500, 1500), E(3500, 0) \text{ y } F(500, 0).$$



El coste, el valor de $C(x, y) = 12,5x - 7,5y + 383750$, en cada uno de esos puntos es:
 → en A , 380000; en B , 353750; en C , 366250; en D , 416250; en E , 427500; en F , 390000.

El mínimo se da en B ; cuando $x = 0$ e $y = 4000$.

Luego, las cantidades a distribuir son:

Envíos	a C1 (3500)	a C2 (4000)	a C3 (4500)
Desde P1 (5000)	0	4000	1000
Desde P2 (7000)	3500	0	3500