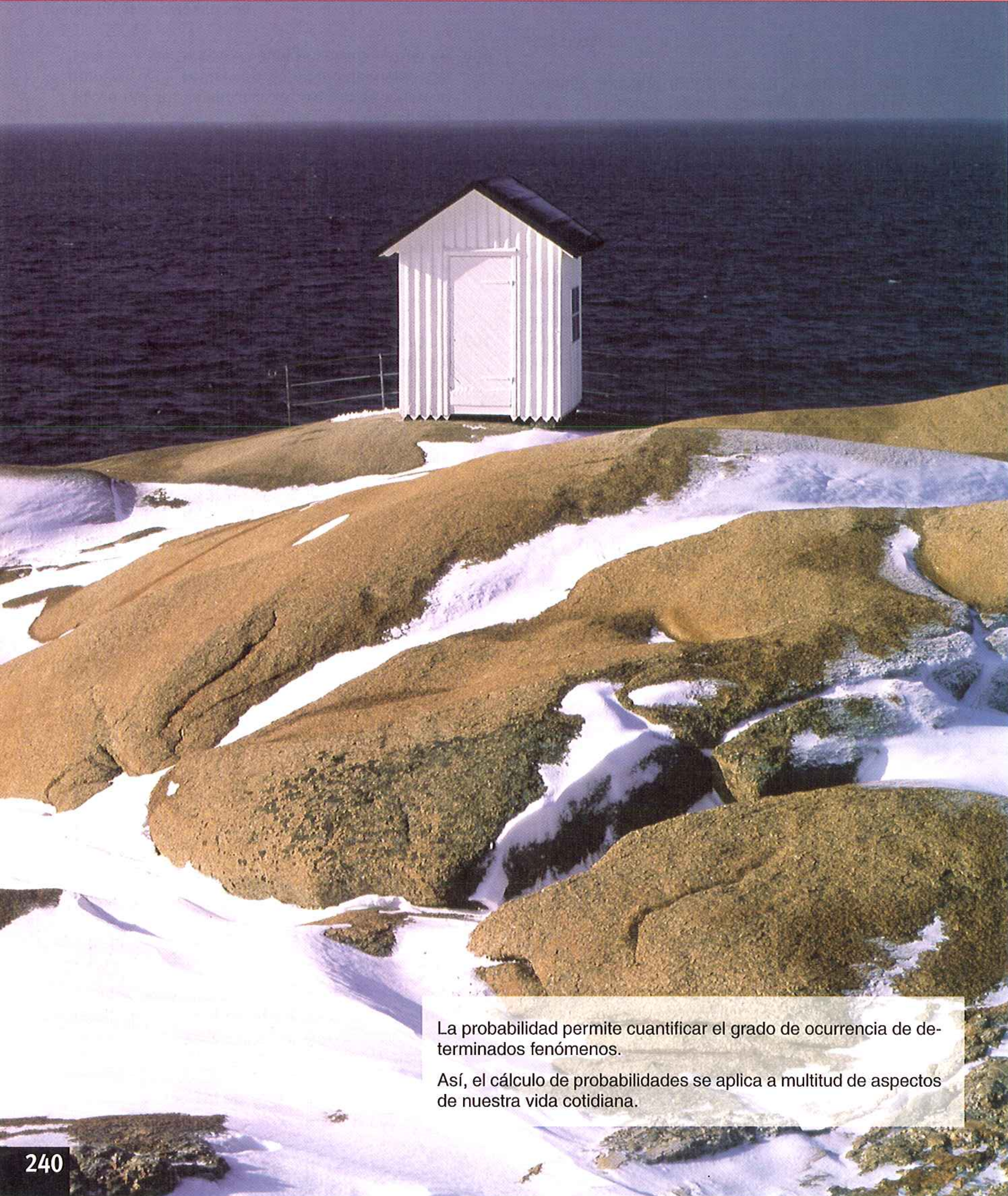
11 Probabilidad



La probabilidad permite cuantificar el grado de ocurrencia de determinados fenómenos.

Así, el cálculo de probabilidades se aplica a multitud de aspectos de nuestra vida cotidiana.

OBJETIVOS

Al final de la unidad serás capaz de:

- Conocer los conceptos de probabilidad y probabilidad condicionada.
- Utilizar técnicas personales de recuento, diagramas en árbol y tablas de contingencia para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos.
- Asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, relacionadas con fenómenos sociales o naturales, e interpretarlas.

CONTENIDOS

1. Sucesos
- 1.1. Suceso seguro y suceso imposible
- 1.2. Operaciones con sucesos
- 1.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

2. Definición y propiedades de la probabilidad
- 2.1. Definición experimental
- 2.2. Definición axiomática
- 2.3. Propiedades de la probabilidad

3. Cálculo de probabilidades
- 3.1. Regla de Laplace
- 3.2. Diagramas en árbol
- 3.3. Tablas de contingencia

4. Probabilidad condicionada
- 4.1. Concepto
- 4.2. Propiedades de la probabilidad condicionada
- 4.3. Sucesos dependientes y sucesos independientes
- 4.4. Teorema de la probabilidad total
- 4.5. Teorema de Bayes

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD

Recuerda

Los diferentes tipos de configuraciones de k elementos que podemos formar con n elementos son:

¿Importa el orden?	¿Se repiten?		Configuración	Ejemplo
Sí	No	$k<n$	**Variaciones** de n elementos tomados de k en k. $V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$	Los números de cuatro cifras diferentes que pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 son: $V_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$ números
		$k=n$	**Permutaciones** de n elementos. $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$	Los números de cinco cifras diferentes que pueden formarse con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9 son: $P_5 = 5! = 120$ números
	Puede		**Variaciones con repetición** de n elementos tomados de k en k. $VR_{n,k} = n^k$	Los números de tres cifras que pueden formarse con los dígitos 2, 4, 6 y 8 son: $VR_{4,3} = 4^3 = 64$ números
	Sí, pero cada elemento un número predeterminado	$k=n$	**Permutaciones con repetición** de n elementos del tipo $n_1, n_2, \ldots, n_k$. $PR_n^{n_1,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$	Los números de siete cifras que pueden formarse con 3 cuatros y 4 cincos son: $PR_7^{3,4} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ números
No	No		**Combinaciones** de n elementos tomados de k en k. $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$	Las configuraciones que podemos formar al extraer cinco cartas de una baraja de 48 cartas son: $C_{48,5} = \dbinom{48}{5} = \dfrac{48!}{5! \cdot 43!} = 1\,712\,304$
	Sí		**Combinaciones con repetición** de n elementos tomados de k en k. $CR_{n,k} = \dbinom{n+k-1}{k}$	Las configuraciones que podemos formar al extraer cinco cartas de una baraja de 48 cartas con reposición son: $CR_{48,5} = \dbinom{48+5-1}{5} = \dbinom{52}{5} = \dfrac{52!}{5! \cdot 47!} = 2\,598\,960$

1. Sucesos

Al repetir un mismo experimento en igualdad de condiciones, puede que obtengamos siempre el mismo resultado o que éste sea imprevisible. En el primer caso, decimos que el experimento es **determinista.** En el segundo, decimos que es **aleatorio.**

El primer paso que hay que efectuar para estudiar un experimento aleatorio consiste en determinar el conjunto de **resultados posibles.** A cada uno de ellos se le llama **suceso elemental.**

El conjunto de todos los resultados posibles se denomina **espacio muestral** y se representa por la letra griega **Ω.**

Así, por ejemplo, en el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y observar su puntuación, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Considera ahora la situación *A: obtener un número par.* Podemos expresarla mediante el conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, que es un subconjunto de Ω.

*Se llama **suceso** a cualquier subconjunto de Ω, es decir, a cualquier conjunto de resultados posibles. Los sucesos se representan mediante letras mayúsculas.*

Decimos que un suceso se **verifica** u **ocurre** al realizar un experimento aleatorio si el resultado obtenido forma parte de dicho suceso.

EJEMPLO 1

Tenemos una urna con ocho bolas numeradas del 1 al 8 y consideramos el experimento consistente en extraer una bola y observar su número.

a) *Determina el espacio muestral del experimento y define por extensión los siguientes sucesos:*

A: sacar un número menor que 5   B: sacar un número par

b) *Al extraer una bola de la urna se observa el número 8. Indica si se verifican los sucesos* A *y* B.

a) Los resultados posibles son los números del 1 al 8. Luego:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Por consiguiente:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

b) Se verifican los sucesos tales que 8 sea uno de sus elementos. Así pues, se verifica *B,* pero no *A.*

ACTIVIDADES

1. Realizamos el experimento aleatorio en el que se extrae una carta de una baraja española y se mira su palo.

   a) Determina el espacio muestral.

   b) Define por extensión los sucesos *A: sacar oros* y *B: sacar copas o bastos.*

   c) Al extraer una carta, obtenemos un basto. Indica si se verifican los sucesos *A* y *B.*

FÍJATE

Al estudiar un experimento aleatorio hay que especificar claramente qué se entiende por *resultado.*

Así, por ejemplo, al lanzar un dado puede interesarnos saber la puntuación que muestra su cara superior... o la distancia a la que lo hemos lanzado.

Sin embargo, si no hay posibilidad de confusión, consideraremos como resultados los que se derivan de forma natural del contexto del experimento.

FÍJATE

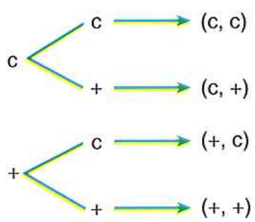
Los sucesos formados por un único elemento se identifican con los sucesos elementales.

Experimentos compuestos

Un experimento es *compuesto* si está formado por varios experimentos *simples,* simultáneos o sucesivos.

Así, lanzar una moneda es un *experimento simple,* mientras que lanzar una moneda y un dado, lanzar dos monedas... son *experimentos compuestos.*

Para averiguar el espacio muestral de un experimento compuesto es útil emplear un *diagrama en árbol.* Así, por ejemplo, en el caso del lanzamiento de dos monedas:



$\Omega = \{(c, c), (c, +), (+, c), (+, +)\}$

1.1. Suceso seguro y suceso imposible

De entre los sucesos que se pueden considerar al realizar un experimento aleatorio hay algunos que poseen características especiales.

Vamos a estudiar estos sucesos tomando como ejemplo el experimento que consiste en lanzar un dado.

Tipo de suceso	Ejemplo
Se llama **suceso seguro** al que contiene todos los resultados posibles del experimento. Este suceso se verifica siempre y coincide con el espacio muestral Ω.	El suceso *A: sacar un número menor o igual que 6* está formado por todos los resultados posibles del experimento: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Este suceso se verifica siempre.
Se llama **suceso imposible** al subconjunto de Ω que no contiene ningún resultado posible del experimento. Este suceso no se verifica nunca y coincide con el conjunto vacío $\varnothing$.	El suceso *B: sacar un 0* no está formado por ningún resultado posible del experimento: $B = \varnothing$ Este suceso no se verifica jamás.

RECUERDA

- Se llama **unión** de **dos conjuntos** A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$

- Se llama **intersección** de **dos conjuntos** A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

- Se llama **diferencia** de **dos conjuntos** A y B al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

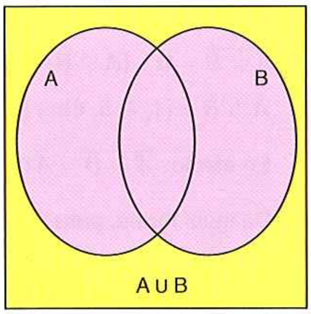
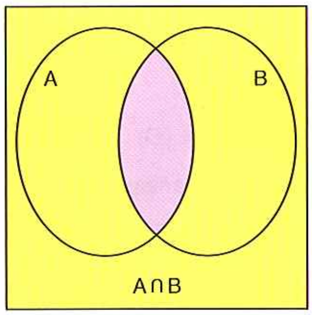
  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$

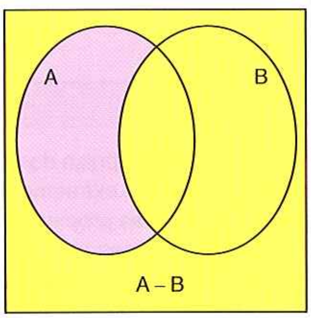
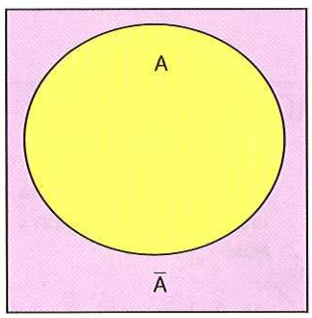
- Se llama **conjunto vacío** a aquel que no tiene elementos. Se representa por el símbolo $\varnothing$.

1.2. Operaciones con sucesos

Hemos visto que los diferentes sucesos asociados a un experimento aleatorio son subconjuntos del espacio muestral Ω.

Por tanto, podemos realizar con ellos las operaciones habituales con conjuntos.

Unión	Intersección
Se llama **unión** de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A o en B. Se representa por $\boldsymbol{A \cup B}$. El suceso $A \cup B$ se verifica si se verifican A o B. 	Se llama **intersección** de los sucesos A y B al suceso formado por todos los resultados que están en A y en B a la vez. Se representa por $\boldsymbol{A \cap B}$. El suceso $A \cap B$ se verifica si se verifican simultáneamente A y B. 

Diferencia	Complemento
Se llama **diferencia** entre el suceso A y el suceso B al suceso formado por todos los resultados que están en A, pero no en B. Se representa por $\boldsymbol{A - B}$. El suceso $A - B$ se verifica si se verifica A, pero no se verifica B. 	Se llama **complemento** o **contrario** del suceso A, y se representa por $\boldsymbol{\bar{A}}$, al suceso formado por todos los resultados del experimento que no están en A, es decir, a la diferencia $\Omega - A$. El suceso $\bar{A}$ se verifica si no se verifica A. 

FÍJATE

Representaremos por $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto formado por todos los sucesos asociados a un experimento.

$\mathcal{P}(\Omega)$, junto con las operaciones unión, intersección y complemento, constituye un **álgebra de Boole.**

FÍJATE

Puesto que:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

escribiremos simplemente:

$A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$

Propiedades de las operaciones con sucesos

Se puede demostrar que las operaciones anteriores cumplen las propiedades de la siguiente tabla.

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificativa	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Existencia de elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$
Complementación	$A \cup \bar{A} = \Omega$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Involución	$\bar{\bar{A}} = A$	
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

EJEMPLO 2

Extraemos una carta de una baraja española y observamos su palo. Efectúa las siguientes operaciones con los sucesos P: sacar copas, Q: no sacar espadas *y* R: no sacar ni oros ni espadas.

a) $\bar{R}$ b) $R \cup Q$ c) $R \cap Q$ d) $Q - P$

Si designamos por *O* (oros), *C* (copas), *E* (espadas) y *B* (bastos) los cuatro palos de la baraja, tenemos que:

$$\Omega = \{O, C, E, B\}$$

Así pues:

$$P = \{C\} \; ; \; Q = \{O, C, B\} \; ; \; R = \{C, B\}$$

De esta manera:

a) $\bar{R} = \Omega - R = \{O, C, E, B\} - \{C, B\} = \{O, E\}$

b) $R \cup Q = \{C, B\} \cup \{O, C, B\} = \{O, C, B\}$

c) $R \cap Q = \{C, B\} \cap \{O, C, B\} = \{C, B\}$

d) $Q - P = \{O, C, B\} - \{C\} = \{O, B\}$

EJEMPLO 3

Lanzamos un dado y observamos su puntuación. Comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan con los sucesos A: sacar 2 ó 3 *y* B: sacar más de 4.

Expresamos los sucesos A, $\bar{A}$, B y $\bar{B}$ por extensión:

$$A = \{2, 3\} \; ; \; \bar{A} = \{1, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{5, 6\} \; ; \; \bar{B} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Así pues, para la primera ley de De Morgan:

$\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \Omega - (\{2, 3\} \cup \{5, 6\}) = \{1, 4\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 4\}$

En efecto: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

De igual forma, para la segunda ley de De Morgan:

$\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \Omega - (\{2, 3\} \cap \{5, 6\}) = \Omega - \emptyset = \Omega$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 4, 5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$

En efecto: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

ACTIVIDADES

2. Extraemos una carta de una baraja española. Considera los sucesos *A: obtener una espada* y *B: obtener un as,* y describe por comprensión y por extensión los siguientes sucesos:

   a) $A \cap \bar{B}$ *b)* $\bar{\bar{A}}$ *c)* $\overline{A \cup B}$ *d)* $\bar{A} \cap \bar{B}$

3. De una bolsa donde hay 20 bolas numeradas del 1 al 20, extraemos una. Comprueba que se cumplen las propiedades asociativa y distributiva con los sucesos *A: obtener número par, B: obtener número primo* y *C: obtener un número tal que la suma de sus cifras sea 5.*

1.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Dos o más sucesos son **compatibles** si pueden verificarse simultáneamente; es decir, si tienen al menos un resultado común. En caso contrario, son **incompatibles** y su intersección es el conjunto vacío $\varnothing$.

Considera el experimento consistente en lanzar un dado. Los sucesos $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{4, 5\}$ cumplen lo siguiente:

A y *B* son compatibles, y *B* y *C* son incompatibles.

Sean ahora los sucesos $D = \{1, 2\}$, $E = \{4, 5\}$ y $F = \{6\}$. Observa en la figura 1 que todas las parejas posibles que se pueden formar entre estos sucesos (*D* y *E*, *D* y *F*, *E* y *F*) son incompatibles, ya que sus respectivas intersecciones son $\varnothing$.

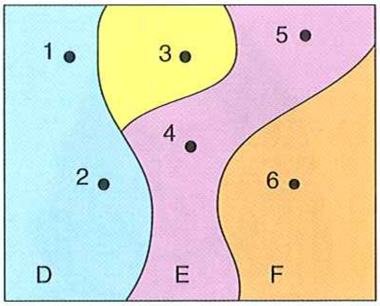
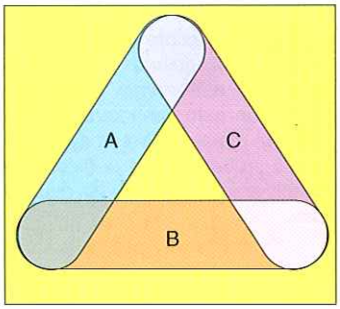


Fig. 1.

Decimos que tres o más sucesos son **incompatibles dos a dos** si es incompatible cualquier pareja que se pueda formar entre ellos.

FÍJATE

Tres o más sucesos incompatibles dos a dos son también incompatibles. Sin embargo, a la inversa no es cierto: tres o más sucesos pueden ser incompatibles sin ser incompatibles dos a dos.



Sistema completo de sucesos

Considera de nuevo el experimento que consiste en lanzar un dado. Los sucesos $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5\}$ e $I = \{6\}$ cumplen lo siguiente:

- Su unión es el espacio muestral: $G \cup H \cup I = \Omega$
- Son incompatibles dos a dos: $G \cap H = \varnothing$, $G \cap I = \varnothing$, $H \cap I = \varnothing$

Decimos que *G*, *H* e *I* forman un *sistema completo de sucesos.*

*Si Ω es el espacio muestral de un experimento aleatorio, los sucesos $A_1, ..., A_n$ forman un **sistema completo de sucesos** si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

S1. $A_1 \cup ... \cup A_n = \Omega$

S2. $A_1, ..., A_n$ *son incompatibles dos a dos.*

EJEMPLO 4

Extraemos una bola de una urna donde hay una bola blanca (B), una roja (R) y una negra (N). Averigua si son compatibles o incompatibles los sucesos U = {B, R}, V = {R, N} y W = {B, N}.

— ¿Forman U, V y W un sistema completo de sucesos?

Tenemos que $U \cap V \cap W = \varnothing$. Por tanto, *U*, *V* y *W* son incompatibles.

— Para ver si *U*, *V* y *W* forman un sistema completo de sucesos debemos comprobar S1 y S2:

S1: $U \cup V \cup W = \{B, R\} \cup \{R, N\} \cup \{B, N\} = \{B, R, N\} = \Omega \Rightarrow$ Se cumple.

S2: $U \cap V = \{R\}$, $V \cap W = \{N\}$ y $U \cap W = \{B\} \Rightarrow$ No se cumple.

Vemos que *U*, *V* y *W* no son incompatibles dos a dos, por lo que no forman un sistema completo de sucesos.

ACTIVIDADES

4. Dados el experimento que consiste en extraer una carta de una baraja española y los sucesos *A: obtener un rey*, *B: obtener copas o espadas*, *C: obtener una figura* y *D: obtener el tres de bastos*, indica si los siguientes sucesos son compatibles o incompatibles:

   a) *A* y *B* *b)* *A* y *C* *c)* *B* y *D* *d)* *A*, *C* y *D* *e)* *A*, *B* y *C* *f)* *A*, *B* y *D*

5. Considera el experimento consistente en lanzar un dado con forma de dodecaedro regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 12, y describe tres sistemas completos de sucesos.

DANIEL BERNOULLI

Matemático y físico suizo (1700-1782).

Hijo de Johann I Bernoulli, ejerció en San Petersburgo y Basilea. Realizó un aporte importante al cálculo de probabilidades cuando sistematizó el uso de los métodos infinitesimales.

Sus trabajos sobre probabilidades incluyen aplicaciones a los negocios, a la astronomía y a la medicina. En este sentido, cabe destacar un ensayo sobre la aplicación de las probabilidades al estudio de la inclinación de las órbitas planetarias.

2. Definición y propiedades de la probabilidad

En primero nos referimos a la **probabilidad** como una medida del grado de certeza sobre la ocurrencia o no de un suceso. Recordemos las definiciones experimental y axiomática de la probabilidad y su relación.

2.1. Definición experimental

Efectuamos varias series de N realizaciones de un experimento aleatorio:

- El número de veces que se verifica un suceso A en cada una de ellas se llama **frecuencia absoluta** de A y se simboliza por n_A.
- El cociente entre las frecuencias absolutas y el número de realizaciones, N, del experimento se llama **frecuencia relativa** del suceso A y se simboliza por f_A.

A medida que aumenta el número de realizaciones del experimento, las frecuencias relativas de un suceso tienden hacia cierto valor. Esta propiedad permite dar la siguiente definición experimental de la probabilidad de un suceso:

Dado cualquier suceso A *asociado a un experimento aleatorio, llamamos* **probabilidad de A, P(A)***, al número hacia el que tienden las frecuencias relativas de* A *al aumentar el número de realizaciones del experimento.*

2.2. Definición axiomática

Aunque la definición experimental que acabamos de estudiar parece satisfacer la intuición, tiene ciertos inconvenientes:

- Sería necesario repetir infinitas veces el experimento para conocer el límite de las frecuencias relativas, lo que no es factible.
- Nada nos asegura que la regularidad de las frecuencias relativas sea cierta para cualquier número de repeticiones del experimento.

Para superar estos problemas se da una **definición axiomática** de la probabilidad de un suceso, matemáticamente mucho más rigurosa:

Lenguaje matemático

En matemáticas, un **axioma** es una afirmación que se acepta sin demostración.

Dado el espacio muestral Ω *asociado a un experimento aleatorio, llamamos* **probabilidad** *a una función:*

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$A \rightarrow P(A)$$

que asocia a cada suceso A *un número real llamado* **probabilidad de A, P(A)***, y que cumple los siguientes axiomas:*

A1. La probabilidad de cualquier suceso A *es positiva o cero:* $P(A) \geq 0$

A2. La probabilidad del suceso seguro vale 1: $P(\Omega) = 1$

A3. La probabilidad de la unión de un conjunto (finito o infinito) de sucesos incompatibles dos a dos, $A_1, \ldots, A_i, \ldots$*, es la suma de las probabilidades de los sucesos:*

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_i) + \ldots$$

Relación entre las definiciones axiomática y experimental

Como es lógico, las dos definiciones de probabilidad han de ser coherentes.

De hecho, los axiomas se corresponden directamente con propiedades de las frecuencias relativas que se consideran evidentes por sí mismas.

A continuación, puedes comprobar la relación entre los axiomas y dichas propiedades de las frecuencias relativas.

Definición axiomática	Definición experimental
$P(A) \geq 0$	Si realizamos N pruebas de un experimento ($N > 0$), el suceso A ocurrirá n_A veces ($n_A \geq 0$). $\dfrac{n_A}{N} \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq 0$
$P(\Omega) = 1$	Si realizamos N pruebas de un experimento ($N > 0$), el suceso seguro Ω ocurrirá las N veces. $\dfrac{N}{N} = 1 \Rightarrow P(\Omega) = 1$
Si $A_1, ..., A_i, ...$ son incompatibles: $P(A_1 \cup ... \cup A_i \cup ...) =$ $= P(A_1) + ... + P(A_i) + ...$	Realizamos N pruebas de un experimento ($N > 0$). Si los sucesos $A_1, ..., A_i, ...$ ocurren $n_{A_1}, ..., n_{A_i}, ...$ veces ($n_{A_1}, ..., n_{A_i}, ... \geq 0$), el suceso $A_1 \cup ... \cup A_i \cup ...$ ocurrirá $n_{A_1} + ... + n_{A_i} + ...$ veces, por ser $A_1, ..., A_i, ...$ incompatibles. $\dfrac{n_{A_1} + ... + n_{A_i} + ...}{N} = \dfrac{n_{A_1}}{N} + ... +$ $+ \dfrac{n_{A_i}}{N} + ... \Rightarrow P(A_1 \cup ... \cup A_i \cup ...) =$ $= P(A_1) + ... + P(A_i) + ...$

ACTIVIDADES

6. La tabla de la derecha muestra los resultados obtenidos tras efectuar diversas realizaciones del experimento consistente en extraer una bola de una urna que contiene ocho bolas blancas y dos bolas negras.

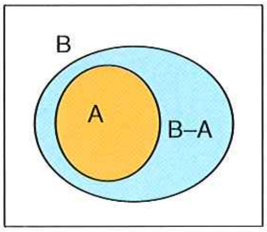
— Completa la tabla y comprueba la definición axiomática de la probabilidad a partir de dichos resultados.

Suceso		Realizaciones del experimento (N)							
		50	100	150	200	250	300	350	400
Blanca	n_A	34	73	113		191		275	
	f_A	0,680			0,720	0,764	0,773		0,795
Negra	n_B		27	37	56		68	75	82
	f_B	0,320	0,270			0,236	0,227		

Demostración de P2.
$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Si $A \subset B$, de la figura se deduce que:

$$B = A \cup (B - A)$$



Luego:

$$P(B) = P(A \cup (B - A))[1]$$

Puesto que A y $B - A$ son incompatibles, aplicando el axioma A3 se tiene:

$$P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \quad [2]$$

Así, de [1] y [2] se obtiene que:

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad [3]$$

Finalmente, como por el axioma A1 se cumple que $P(B - A) \geq 0$, de [3] se deriva que:

$$P(B) \geq P(A)$$

2.3. Propiedades de la probabilidad

Las principales propiedades de la probabilidad son:

P1. Las probabilidades de los sucesos A y $\bar{A}$ suman 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

P2. La probabilidad de un suceso A contenido en otro suceso B es menor o igual que la probabilidad de B:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

P3. La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles A y B es la suma de sus probabilidades menos la de su intersección:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Estas propiedades son fáciles de demostrar a partir de la definición axiomática de probabilidad. En el margen puedes ver, a modo de ejemplo, la demostración de P2.

EJEMPLO 5

Halla la probabilidad de los sucesos $\bar{C}$, $C \cap \bar{C}$ *y* B, *sabiendo que:*

$$P(A) = \frac{3}{4} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{3} \qquad P(A \cup B) = \frac{2}{3} \qquad P(C) = \frac{3}{5}$$

Como consecuencia de la propiedad P1, tenemos que:

$$P(C) + P(\bar{C}) = 1 \Rightarrow P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Puesto que $C \cap \bar{C} = \varnothing$ y sabemos que $P(\varnothing) = 0$, entonces:

$$P(C \cap \bar{C}) = P(\varnothing) = 0$$

De acuerdo con la propiedad P3 de la probabilidad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Por consiguiente:

$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

ACTIVIDADES

7. Se lanza un dado con forma de dodecaedro y se observa la puntuación de la cara superior. Utiliza las relaciones de inclusión entre los siguientes sucesos para ordenarlos de menor a mayor probabilidad:

   A: sacar un múltiplo de 4; C: sacar par

   B: sacar un múltiplo de 3; D: sacar un número primo

8. Se sabe que en el transcurso de una sesión de bolsa, la probabilidad de que se devalúe el dólar es 0,4; la de que se devalúe el franco suizo, 0,06; y la de que se devalúe alguna de las dos monedas, 0,43.

   Calcula la probabilidad de que al finalizar dicha sesión se hayan devaluado las dos monedas.

3. Cálculo de probabilidades

Veamos cómo obtener la probabilidad de un suceso en dos casos particulares: experimentos cuyos sucesos elementales son equiprobables y experimentos compuestos.

3.1. Regla de Laplace

En cualquier experimento aleatorio en el que los sucesos elementales son equiprobables podemos aplicar la **regla de Laplace:**

La probabilidad de un suceso A *se obtiene dividiendo el* ***número de resultados que forman el suceso*** **A** *entre el* ***número de resultados posibles.***

Si llamamos *casos favorables* a los resultados que forman el suceso A y *casos posibles* a los resultados posibles del experimento, tenemos:

$$P(A) = \frac{\textbf{Casos favorables a } A}{\textbf{Casos posibles}}$$

En el margen puedes ver la justificación de este resultado.

EJEMPLO 6

Al extraer tres cartas de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad del suceso A: obtener tres figuras?

En este caso, el espacio muestral está constituido por todos los tríos que pueden formarse con tres cartas distintas de la baraja, teniendo en cuenta que no importa el orden en que se extraigan.

El suceso A es el conjunto de todos los tríos que pueden formarse con tres figuras distintas cualesquiera:

$$A = \{(11O, 11C, 12C), (10C, 11E, 12B), \dots\}$$

Calculamos, entonces, el número de casos posibles: $C_{48,3} = \binom{48}{3} = 17\,296$

Como hay 12 figuras, el número de casos favorables a A es: $C_{12,3} = \binom{12}{3} = 220$

Y aplicando la regla de Laplace: $P(A) = \dfrac{220}{17\,296} = 0{,}0127$

RECUERDA

Dado un experimento aleatorio, decimos que los sucesos elementales son **equiprobables** cuando es igualmente posible obtener uno cualquiera de ellos.

Demostración de la regla de Laplace

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio con n sucesos elementales equiprobables:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

Puesto que la unión de los sucesos elementales es el espacio muestral y, además, son incompatibles dos a dos, se cumple que:

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1 \cup \dots \cup \omega_n) =$$
$$= \underbrace{P(\omega_1) + \dots + P(\omega_n)}_{n \text{ sumandos}} = nP(\omega_i)$$

Luego:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

Consideremos un suceso cualquiera A formado por k resultados:

$$A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$$

Razonando análogamente como antes, se tiene que:

$$P(A) = P(\omega_1 \cup \dots \cup \omega_k) =$$
$$= P(\omega_1) + \dots + P(\omega_k) = kP(\omega_i)$$

sustituyendo $P(\omega_i)$ por su valor, tenemos:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Observa que $\frac{k}{n}$ representa el cociente entre el número de resultados que forman el suceso A, k, y el número de resultados posibles del experimento, n.

ACTIVIDADES

9. Cogemos al azar una ficha de un juego de dominó. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

   A: que sea la cinco doble

   B: que la suma de los puntos sea 10

10. Un juego consiste en lanzar dos dados. Si la diferencia entre los puntos de ambos es impar, ganamos. En cambio, si la diferencia es par, perdemos. Calcula la probabilidad de ganar y la de perder.

11. En una rifa de 100 000 números (del 0 al 99 999) se sortea un coche.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio comprando 4 números?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que la papeleta premiada acabe en 2?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que la papeleta premiada no acabe en 24?

3.2. Diagramas en árbol

La probabilidad de un suceso en un experimento compuesto, puede calcularse a partir de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples que lo componen.

Los experimentos compuestos pueden representarse por diagramas en árbol, donde cada resultado viene dado por un camino del diagrama, y en el que cada rama tiene asignada una probabilidad.

Así pues, para calcular la probabilidad de un suceso debemos tener en cuenta:

D1. La probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de ese camino.

D2. La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de cada uno de los caminos que conducen a la verificación del suceso.

Veamos a continuación unos ejemplos.

EJEMPLO 7

Lanzamos tres veces una moneda. Calcula la probabilidad del suceso A: obtener tres caras.

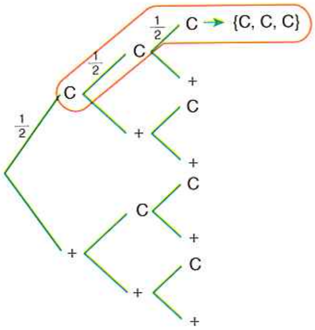
Consideremos los sucesos *C: obtener cara* y *+: obtener cruz.* El espacio muestral del experimento es:

$\Omega = \{+++, ++C, +C+, C++, +CC, C+C, CC+, CCC\}$

Así pues, el número de casos posibles es 8 y el número de casos favorables al suceso *A: obtener tres caras* es 1. Por tanto, aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

Comprobamos que este resultado coincide con el que obtenemos si empleamos un diagrama en árbol.



Fíjate en la figura. El camino señalado es el único que verifica el suceso *A: obtener tres caras.*

Luego, según D1, se tiene:

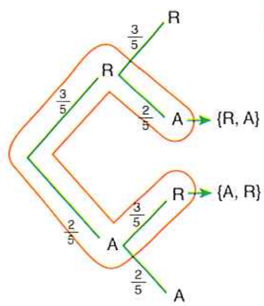
$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

EJEMPLO 8

Una bolsa contiene tres bolas rojas y dos bolas azules. Extraemos, sucesivamente y con reposición, dos bolas y observamos su color. ¿Cuál es la probabilidad del suceso S: obtener una bola roja y una bola azul, *sin importar el orden?*

Consideremos los sucesos *R: sacar bola roja* y *A: sacar bola azul.*

Elaboramos un diagrama en árbol con los diferentes resultados posibles, en el que señalaremos los caminos favorables al suceso *S*.



Para calcular la probabilidad de cada rama utilizaremos la regla de Laplace. Según D1, la probabilidad de cada camino es:

$$P(\{R, A\}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{25} \quad , \quad P(\{A, R\}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

Finalmente, según D2, si sumamos las probabilidades de cada camino, obtenemos la probabilidad del suceso *S:*

$$P(S) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

ACTIVIDADES

12. Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de obtener un cinco en cada dado.

13. Lanzamos dos veces un dado con forma de tetraedro. ¿Cuál es la probabilidad del suceso *A: la suma de los puntos de las caras ocultas es un múltiplo de dos?*

14. Sean dos urnas U_1 y U_2. U_1 contiene una bola blanca y dos negras, y U_2, dos bolas blancas y una negra. Se lanza una moneda y, si sale cara, se extrae una bola de la urna U_1 y, si sale cruz, se extrae una bola de la urna U_2. Halla la probabilidad del suceso *A: obtener una bola blanca.*

3.3. Tablas de contingencia

Un experimento compuesto también puede representarse a partir de una tabla de contingencia.

Una tabla de contingencia es una distribución en filas y columnas (una matriz) referida a dos características, en que cada una de ellas presenta dos o más sucesos. En los márgenes de la tabla se indican las sumas de las filas y columnas.

Veamos la forma de aplicar una tabla de contingencia para resolver un problema de probabilidad.

EJEMPLO 9

Disponemos de dos bolsas, B_1 y B_2. La primera contiene siete bolas blancas y cinco bolas negras y la segunda, tres bolas blancas y nueve negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca de la bolsa B_2? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola negra?

Elaboramos la tabla de contingencia.

	Blanca	Negra	Total
B_1	7	5	12
B_2	3	9	12
Total	10	14	24

Es posible determinar la probabilidad de cada uno de los sucesos observando las correspondientes celdas de la tabla.

La probabilidad de obtener una bola blanca de la bolsa B_2 es $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (celdas 2 y 4 de la tercera fila).

La probabilidad de obtener una bola negra es $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ (celdas 3 y 4 de la cuarta fila).

FÍJATE

El resultado del ejemplo 9 coincide con el que obtenemos si empleamos un diagrama en árbol.

$$P(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{12} = \frac{4}{24} + \frac{9}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

Las tablas de contingencia y los diagramas en árbol están íntimamente relacionados, de modo que podemos construir uno de ellos a partir del otro.

A la derecha puedes observar la tabla de contingencia correspondiente al ejemplo 8.

Para calcular la probabilidad del suceso *S: obtener una bola roja y una bola azul sin importar el orden,* debemos sumar las probabilidades correspondientes a las casillas que verifican este suceso.

$$P(S) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

	Roja	Azul	Total
1.ª extracción	3	2	5
2.ª extracción	3	2	5
Total	6	4	10

ACTIVIDADES

15. Resuelve la actividad 14 utilizando una tabla de contingencia.

16. Disponemos de dos dados trucados D_1 y D_2. El primero tiene una cara con un «1», dos caras con un «2» y tres caras con un «3» y el segundo, dos caras con un «1», dos caras con un «2» y dos caras con un «3». Se elige un dado al azar. Elabora la tabla de contingencia y el diagrama en árbol correspondientes.

    a) Determina la probabilidad de obtener un «2».

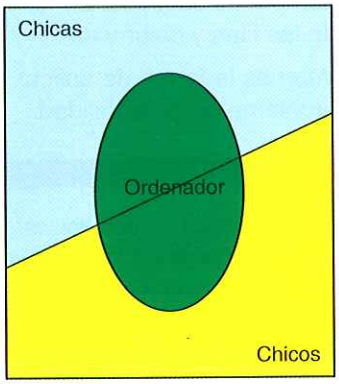
    b) Si se ha obtenido un «3», ¿qué probabilidad hay de que hayamos elegido el dado D_1?

Si accedes a la página **www.ub.es/stat/GrupsInnovacio/Statmedia/demo/Temas/Capitulo1/B0C1m1t7.htm**, podrás visualizar un ejemplo de probabilidad condicionada y calcular de forma interactiva la probabilidad de un suceso condicionado a otro.

4. Probabilidad condicionada

4.1. Concepto

En ocasiones, disponer de información previa sobre un suceso hace que varíe su probabilidad. Veámoslo mediante un ejemplo.



En un centro escolar de N escolares, n_o tienen ordenador y n_m son chicas. Al elegir un escolar al azar, estamos interesados en los sucesos *A: escoger un escolar que tenga ordenador* y *B: escoger una chica.*

Para calcular la probabilidad de estos dos sucesos aplicamos la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{n_o}{N} \qquad P(B) = \frac{n_m}{N}$$

Si n_{om} son los escolares que tienen ordenador y son chicas, la probabilidad del suceso $A \cap B$: *escoger una chica que tenga ordenador* será:

$$P(A \cap B) = \frac{n_{om}}{N}$$

Supongamos ahora que queremos calcular la probabilidad de que un escolar tenga ordenador, eligiendo sólo entre la población femenina. Esto equivale a calcular la probabilidad de A sabiendo de antemano que el escolar elegido es chica, es decir, que ha ocurrido B.

Esta probabilidad se representa por $P(A/B)$ y se dice que es *la probabilidad de* A *condicionada a* B. Así:

$$P(A/B) = \frac{n_{om}}{n_m}$$

Y dividiendo numerador y denominador por N se tiene que:

$$P(A/B) = \frac{n_{om}}{n_m} = \frac{\frac{n_{om}}{N}}{\frac{n_m}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Si enunciamos esta conclusión de forma general, obtenemos:

Dados dos sucesos A *y* B, *tales que* P(B) $\neq$ *0, se llama* ***probabilidad de* A *condicionada a* B,** P (A/B)*, al cociente:*

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

De la probabilidad condicionada se deriva una expresión que resulta muy útil en el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Esta expresión es conocida como **principio de la probabilidad compuesta** o **regla del producto.**

FÍJATE

Por la propiedad conmutativa de la intersección de sucesos:

$$A \cap B = B \cap A$$

Así pues, la expresión:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

puede escribirse también como:

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

4.2. Propiedades de la probabilidad condicionada

Las principales propiedades de la probabilidad condicionada son:

PC1. Si un suceso B está contenido en un suceso C, entonces la probabilidad de B condicionada a A es menor o igual que la probabilidad de C condicionada a A.

$$B \subset C \Rightarrow P(B/A) \leq P(C/A)$$

PC2. Si un suceso B está contenido en otro suceso A, entonces la probabilidad del suceso B condicionada a A es el cociente entre la probabilidad del suceso B y la probabilidad del suceso A.

$$B \subset A \Rightarrow P(B/A) = P(B)/P(A)$$

PC3. Si un suceso A está contenido en otro suceso B, entonces la probabilidad del suceso B condicionada a A es igual a uno.

$$A \subset B \Rightarrow P(B/A) = 1$$

Estas propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades de la probabilidad y de la definición de probabilidad condicionada. En el margen puedes ver, a modo de ejemplo, la demostración de PC1.

Demostración de PC1

Aplicando la definición de probabilidad condicionada, tenemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$$

Si $B \subset C$, podemos deducir que:

$$A \cap B \subset A \cap C$$

Entonces, por la propiedad P2 de la probabilidad, se tiene:

$$P(A \cap B) \leq P(A \cap C)$$

Y, puesto que $P(A) > 0$, se cumple que:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq \frac{P(A \cap C)}{P(A)}$$

Luego efectivamente se verifica el enunciado de la propiedad PC1:

$$P(B/A) \leq P(C/A)$$

EJEMPLO 10

Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de que la puntuación obtenida sea un dos, sabiendo que dicha puntuación es un número primo.

Hemos de calcular la probabilidad $P(A/B)$, donde *A: obtener un dos* y *B: obtener un número primo.*

Aplicaremos primero la ley de Laplace para calcular las probabilidades $P(A \cap B)$ y $P(B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Así pues, por la expresión de la probabilidad condicionada, tenemos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

Fíjate en que conocer a priori que el resultado es un número primo influye en la probabilidad de obtener un dos.

EJEMPLO 11

Considera el experimento lanzar un dado, y sean los sucesos:

A: sacar un número > 1

B: sacar un número impar ≥ 3

C: sacar un número $\neq 2$

Comprueba que se cumple la propiedad PC_1.

Los sucesos A, $A \cap B$ y $A \cap C$ son, respectivamente:

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \ ; \ A \cap B = \{3, 5\} \ ; \ A \cap C = \{3, 4, 5, 6\}$$

Puesto que el número de casos posibles es 6, aplicando la regla de Laplace, se tiene:

$$P(A) = \frac{5}{6}, P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(A \cap C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Y por la expresión de la probabilidad condicionada:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{5}$$

Vemos, pues, que efectivamente: $P(B/A) = \frac{2}{5} \leq \frac{4}{5} = P(C/A)$

ACTIVIDADES

17. Halla la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja española sea el rey de espadas, sabiendo que dicha carta es una figura.

18. Demuestra que si $A \cap B = \varnothing$, entonces se verifica que $P(B/A) = 0$.

FÍJATE

Si A y B son independientes, se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Esta definición se puede generalizar para más de dos sucesos.

Así, por ejemplo, tres sucesos A, B y C son independientes si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

4.3. Sucesos dependientes y sucesos independientes

Al lanzar dos veces un dado, el hecho de que se verifique o no el suceso *B: número par en el primer lanzamiento* no influye en el suceso *A: número impar en el segundo lanzamiento,* ni viceversa.

En este caso, la probabilidad de que ocurra un suceso *no está condicionada* a que ocurra el otro. Por tanto:

$$P(A/B) = P(A) \qquad\qquad P(B/A) = P(B)$$

A partir del principio de la probabilidad compuesta, se tiene que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Diremos, entonces, que ambos sucesos son *independientes.*

Dados dos sucesos A *y* B, *asociados a un mismo experimento aleatorio, diremos que* A *y* B *son* ***independientes*** *si se cumple:*

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

En caso contrario, se dice que A *y* B *son* ***dependientes.***

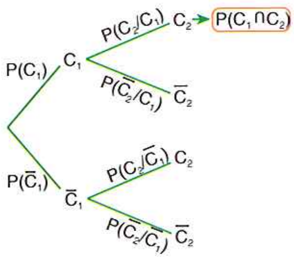
EJEMPLO 12

Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de que las dos sean bastos en los casos siguientes:

a) *Sin reemplazamiento de la primera carta extraída.*

b) *Con reemplazamiento de la primera carta extraída.*

Definimos los sucesos C_1: *la 1.ª carta es de bastos* y C_2: *la 2.ª carta es de bastos,* y elaboramos un diagrama en árbol en el que señalamos la probabilidad de que se verifique el suceso correspondiente a cada rama.



Así pues, la probabilidad buscada en ambos casos es la de la rama que verifica el suceso $C_1 \cap C_2$:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1)$$

Para calcular $P(C_1)$ aplicamos la regla de Laplace:

$$P(C_1) = \frac{12}{48}$$

Procedemos de igual forma para calcular $P(C_2/C_1)$, aunque ahora debemos tener en cuenta si la primera carta se devuelve al mazo o no antes de extraer la segunda.

a) Tras la primera extracción, en el mazo quedan sólo 47 cartas, una menos que al principio. Además, si la carta extraída ha sido un basto, sólo quedan 11 de ellos.

$$P(C_2/C_1) = \frac{11}{47}$$

Por tanto: $P(C_1 \cap C_2) = \dfrac{12}{48} \cdot \dfrac{11}{47} = 0{,}0585$

b) Tras la primera extracción, en el mazo hay las mismas 48 cartas que al principio. Luego el resultado de la primera extracción no afecta al resultado de la segunda. Así pues, C_1 y C_2 son sucesos independientes:

$$P(C_2/C_1) = P(C_2) = \frac{12}{48}$$

Por tanto:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \frac{12}{48} \cdot \frac{12}{48} = 0{,}0625$$

ACTIVIDADES

19. Extraemos dos bolas de una urna en la que hay cinco bolas blancas y tres negras. Calcula la probabilidad de los sucesos *A: las dos bolas son negras* y *B: la primera bola es blanca y la otra es negra* en los casos siguientes:

    a) Sin reemplazamiento de la primera bola extraída.

    b) Con reemplazamiento de la primera bola extraída.

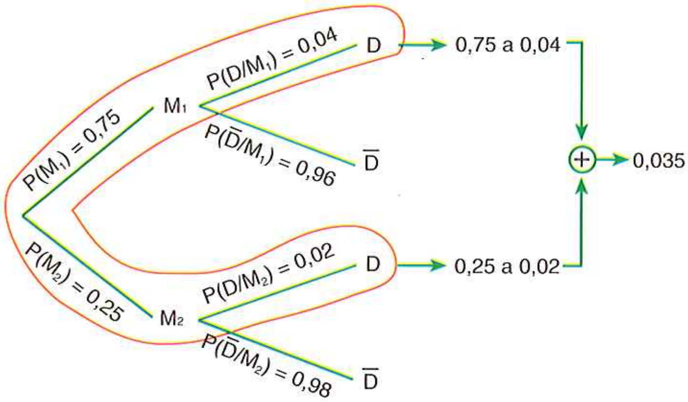
4.4. Teorema de la probabilidad total

A partir del concepto de probabilidad condicionada, es posible enunciar una regla práctica para calcular la probabilidad de ciertos sucesos. Considera para ello el siguiente ejemplo:

Una fábrica de tornillos dispone de dos máquinas que elaboran el 75 % y el 25 % de la producción total.

El porcentaje de tornillos defectuosos que produce cada máquina es, también respectivamente, del 4 % y del 2 %. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un tornillo al azar éste sea defectuoso?

Considera los sucesos *D: tornillo defectuoso,* M_1*: tornillo elaborado por la máquina 1* y M_2*: tornillo elaborado por la máquina 2.* Observa el diagrama en árbol de la figura.



Según el diagrama, podemos calcular la probabilidad de D a partir de la suma de las probabilidades de cada rama:

$$P(D) = 0,75 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,02 = 0,035$$

Observa que los términos de esta suma son:

$P(M_1) = 0,75$ $\quad P(M_2) = 0,25$ $\quad P(D/M_1) = 0,04$ $\quad P(D/M_2) = 0,02$

Así pues, podemos expresar $P(D)$ como:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2)$$

Si generalizamos este resultado, llegamos al enunciado del **teorema de la probabilidad total:**

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ *un sistema completo de sucesos y* B *un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si* $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ *son no nulas, se cumple que:*

$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

ACTIVIDADES

20. Disponemos de cuatro urnas con bolas, de tal manera que:

— En la primera urna hay cuatro bolas rojas y cinco blancas.

— En la segunda urna hay tres bolas rojas y ocho blancas.

— En la tercera urna hay cinco bolas rojas y dos blancas.

— En la cuarta urna hay dos bolas rojas.

Si elegimos una urna al azar y extraemos de ella una bola, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea roja?

Si accedes a la página **http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/2.html**, podrás reforzar los contenidos desarrollados en los apartados de la unidad, visitando los capítulos que aparecen en la página y resolviendo los ejercicios propuestos.

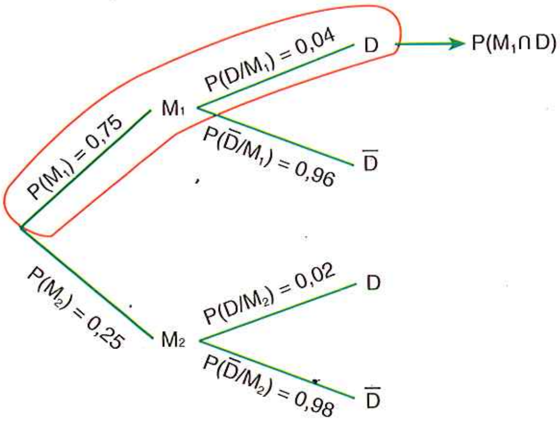
4.5. Teorema de Bayes

Vamos a estudiar el ejemplo del apartado anterior desde otro punto de vista. Si sabemos que un tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por cierta máquina?

Calculemos la probabilidad de que el tornillo haya sido fabricado por la máquina 1, sabiendo que ha resultado defectuoso, es decir, $P(M_1/D)$.

Según la definición de probabilidad condicionada, tenemos:

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$$



Por otro lado, del diagrama de la figura podemos calcular la probabilidad de $P(M_1 \cap D)$, que corresponde a la de la rama señalada:

$$P(M_1 \cap D) = P(M_1) \cdot P(D/M_1)$$

Si tenemos en cuenta además el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2)$$

llegamos finalmente a:

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D/M_1)}{P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_1)}$$

Con los datos del ejemplo:

$$P(M_1/D) = \frac{0,75 \cdot 0,04}{0,75 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,02} = 0,857$$

FÍJATE

En una situación en la que sea aplicable el teorema de Bayes:

$P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_n)$ se llaman **probabilidades *a priori*.**

$P(A_1/B)$, $P(A_2/B)$, ..., $P(A_n/B)$ se denominan **probabilidades *a posteriori*.**

$P(B/A_1)$, $P(B/A_2)$, ..., $P(B/A_n)$ reciben el nombre de **verosimilitudes.**

Al enunciar de forma general el resultado anterior se llega al llamado **teorema de Bayes:**

Sea $A_1, ..., A_i, ..., A_n$ *un sistema completo de sucesos y* B *un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si* $P(A_1), ..., P(A_i), ..., P(A_n)$ *son no nulas, se cumple que:*

$$\mathbf{P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}}$$

ACTIVIDADES

21. En un congreso se reúnen 250 médicos del Benelux, de los cuales 115 son holandeses; 65, belgas, y 70, luxemburgueses. De ellos, el 75 % de los holandeses, el 60 % de los belgas y el 65 % de los luxemburgueses están a favor de la utilización de determinada vacuna. Seleccionamos al azar uno de los médicos y resulta estar a favor del uso de la vacuna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Luxemburgo?

A

¿Cuál es la probabilidad de no coger ningún doble al seleccionar al azar tres fichas de un dominó? ¿Y la de coger alguno?

Consideremos los sucesos *A: no coger ningún doble* y *B: coger algún doble.* Aplicaremos la regla de Laplace.

Los casos posibles son los elementos del espacio muestral, que consta de $\binom{28}{3} = 3\,276$ resultados equiprobables, correspondientes a todas las formas de coger 3 fichas entre las 28 existentes.

Los casos favorables a A son $\binom{21}{3} = 1330$, es decir, las formas de coger 3 fichas entre las 21 que no son dobles. Entonces, por la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{1\,330}{3\,276} = 0{,}406$$

Para hallar $P(B)$ basta con observar que $B = \bar{A}$ y aplicar la propiedad P1 de la probabilidad: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Luego:

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}406 = 0{,}594$$

22. Calcula la probabilidad de que, al extraer cuatro cartas de una baraja española, todas sean de bastos:
    a) Si las cartas se extraen simultáneamente.
    b) Si las cartas se extraen una tras otra, devolviendo al mazo cada una antes de extraer la siguiente.

Sol.: *a)* 0,0025; *b)* 0,0039

23. Efectuamos una apuesta de la lotería Primitiva.
    a) ¿Cuál es la probabilidad de no acertar ningún número de la combinación ganadora?
    b) ¿Y la de acertar los seis?

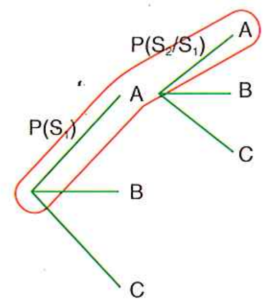
Sol.: *a)* 0,4360; *b)* $7{,}151 \cdot 10^{-8}$

B

La encuesta a un grupo de 160 jóvenes revela que 96 de ellos adquieren la publicación A, *48 adquieren la publicación* B *y 16 adquieren la publicación* C.

¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar a dos de ellos sean compradores de la publicación A*?*

Consideramos los sucesos S_1: *el primer joven adquiere la publicación* A y S_2: *el segundo joven adquiere la publicación* A, y elaboramos un diagrama en árbol con los diferentes resultados posibles.



Así pues, la probabilidad buscada es la correspondiente a la rama que verifica el suceso $S_1 \cap S_2$:

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1)$$

Para calcular $P(S_1)$ aplicamos la regla de Laplace:

$$P(S_1) = \frac{96}{160}$$

Procedemos análogamente para calcular $P(S_2/S_1)$, teniendo en cuenta ahora que tras la primera extracción quedan sólo 159 jóvenes, uno menos que al principio.

Además, si el joven escogido adquiere la publicación A, sólo quedarán 95 de éstos. Por tanto:

$$P(S_2/S_1) = \frac{95}{159}$$

Luego la probabilidad buscada es:

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2/S_1) = \frac{96}{160} \cdot \frac{95}{159} = 0{,}3585$$

24. El servicio de guardacostas alerta de que la probabilidad de que se produzca una tormenta de gran magnitud en las próximas 24 horas es del 85 %. Se sabe que únicamente en un 3 % de las ocasiones en que se producen tormentas de tal magnitud se generan olas de más de 4 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que la tormenta anunciada se produzca y que las olas que se generen sean de más de 4 metros de altura?

Sol.: 0,0255

C

Un 35 % de los socios de una asociación juvenil son seguidores de un grupo musical A*; un 30 %, de otro grupo* B*, y a un 15 % le gustan ambos grupos. Calcula la probabilidad de que al elegir un socio al azar:*

a) *Sea seguidor de* B*, sabiendo que le gusta* A.

b) *Sea seguidor de ambos grupos, sabiendo que le gusta, al menos, uno de los dos.*

Consideremos el suceso *A: al socio le gusta el grupo* A y el suceso *B: al socio le gusta el grupo* B.

De acuerdo con los datos del problema, tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0{,}35 \qquad P(B) = 0{,}30 \qquad P(A \cap B) = 0{,}15$$

a) $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}35} = 0{,}429$

b) $P(A \cap B / A \cup B) = \dfrac{P(A \cap B) \cap (A \cup B)}{P(A \cup B)} =$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{0{,}15}{0{,}35 + 0{,}30 + 0{,}15} = 0{,}3$$

25. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = \frac{2}{7} \qquad P(B) = \frac{3}{7} \qquad P(A \cup B) = \frac{4}{7}$$

a) Halla $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

b) Determina si A y B son independientes.

Sol.: *a)* $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; *b)* No

26. Un 20 % de los alumnos de un centro escolar practica el fútbol; un 15 %, el baloncesto, y un 10 %, ambos deportes. Si se elige un alumno al azar, halla la probabilidad de que:

a) Practique ambos deportes, sabiendo que practica alguno de ellos.

b) Practique el fútbol, sabiendo que no practica el baloncesto.

Sol.: *a)* 0,4; *b)* 0,1176

D

Laura y Javier se reparten los ejercicios que les ha propuesto su profesora. Laura se queda con el 45 % y Javier, con el resto. Por otro lado, sabemos que Laura resuelve incorrectamente un 10 % de los ejercicios que intenta y Javier, un 8 %.

a) *Halla la probabilidad de que al elegir la profesora un ejercicio al azar esté mal resuelto.*

b) *Halla la probabilidad de que al elegir la profesora un ejercicio al azar haya sido hecho por Javier, sabiendo que está mal resuelto.*

El enunciado es típico de los problemas en los que se aplican los teoremas de la probabilidad total (apartado *a*) y de Bayes (apartado *b*).

Consideramos los sucesos *M: ejercicio mal resuelto, L: ejercicio hecho por Laura* y *J: ejercicio hecho por Javier.*

Según los datos del enunciado:

$$P(L) = 0{,}45 \quad P(J) = 0{,}55 \quad P(M/L) = 0{,}1 \quad P(M/J) = 0{,}08$$

a) Según el teorema de la probabilidad total:

$$P(M) = P(L) \cdot P(M/L) + P(J) \cdot P(M/J) =$$
$$= 0{,}45 \cdot 0{,}1 + 0{,}55 \cdot 0{,}08 = 0{,}089$$

b) Según el teorema de Bayes:

$$P(J/M) = \frac{P(J) \cdot P(M/J)}{P(J) \cdot P(M/J) + P(L) \cdot P(M/L)} =$$
$$= \frac{0{,}55 \cdot 0{,}08}{0{,}55 \cdot 0{,}08 + 0{,}45 \cdot 0{,}1} = 0{,}4944$$

27. El 25 % de los habitantes de un determinado país son rubios y los demás son morenos. Un 45 % de los rubios y un 20 % de los morenos tienen los ojos azules. Calcula la probabilidad de que al elegir un habitante:

a) Tenga los ojos azules.

b) No tenga los ojos azules.

c) Sea moreno, sabiendo que tiene los ojos azules.

d) Sea rubio, sabiendo que no tiene los ojos azules.

Sol.: *a)* 0,2625; *b)* 0,7375; *c)* 0,5714; *d)* 0,1864

28. El 55 % de los jóvenes que frecuentan cierta discoteca son menores de 20 años. Un 30 % de los menores de 20 años y un 25 % de los mayores de esa edad son chicas. Si se elige un joven al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 20 años, sabiendo que es una chica?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea menor de 20 años, sabiendo que es un chico?

Sol.: *a)* 0,2775; *b)* 0,4054; *c)* 0,5329

RESUMEN

- Dado el espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio, llamamos **probabilidad** a una función:

$$\begin{aligned} P: \mathcal{P}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) \end{aligned}$$

que asocia a cada suceso A un número real llamado **probabilidad de A, $P(A)$,** y que cumple los siguientes axiomas:

A1. La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o cero: $P(A) \geq 0$

A2. La probabilidad del suceso seguro es 1: $P(\Omega) = 1$

A3. La probabilidad de la unión de un conjunto (finito o infinito) de sucesos incompatibles dos a dos, $A_1, ..., A_i, ...$, es la suma de las probabilidades de los sucesos:

$$P(A_1 \cup ... \cup A_i \cup ...) = P(A_1) + ... + P(A_i) + ...$$

- **Regla de Laplace:** En una situación de **equiprobabilidad,** la probabilidad de un suceso A viene dada por la expresión:

$$P(A) = \frac{\textbf{Casos favorables a } A}{\textbf{Casos posibles}}$$

- Dados dos sucesos A y B, con $P(B) \neq 0$, se llama **probabilidad de A condicionada a B, $P(A/B)$,** al siguiente cociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Dos sucesos A y B, asociados a un mismo experimento aleatorio, son **independientes** si cumplen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

En caso contrario, diremos que son **dependientes.**

- Sea $A_1, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1), ..., P(A_n)$ son no nulas, el **teorema de la probabilidad total** establece que:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

- Sea $A_1, ..., A_i, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos y B un suceso cualquiera, todos ellos asociados a un mismo experimento aleatorio. Si $P(A_1), ..., P(A_i), ..., P(A_n)$ son no nulas, el **teorema de Bayes** establece que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

ACTIVIDADES

Cuestiones

29. Razona si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas, y describe el espacio muestral de los experimentos que sean aleatorios:

   a) Lanzar una moneda y observar si sale cara o cruz.

   b) Verter aceite en un recipiente con agua y observar si se mezclan.

   c) Extraer una carta de una baraja y mirar de qué palo es.

30. Sean dos sucesos incompatibles. Los sucesos contrarios a éstos, ¿son también incompatibles? Razona tu respuesta.

31. ¿Entre qué valores está comprendida la probabilidad de un suceso? Razona tu respuesta.

32. Sabiendo que la probabilidad de un suceso A es $P(A) = 0{,}6$, ¿entre qué valores estará comprendida la probabilidad de un suceso B incluido en A? Razona tu respuesta.

33. Dos sucesos incompatibles, ¿son independientes? Razona tu respuesta.

Ejercicios y problemas

34. Calcula la probabilidad de que al lanzar tres monedas obtengas:

   a) Tres caras.

   b) Al menos una cruz.

   c) Más cruces que caras.

   Sol.: *a)* $\frac{1}{8}$; *b)* $\frac{7}{8}$; *c)* $\frac{1}{2}$

35. Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes:

A: la suma de las caras es 5.
B: la suma de las caras es 10.
C: la suma de las caras es menor o igual que 5.

Sol.: $P(A) = \frac{1}{9}$; $P(B) = \frac{1}{12}$; $P(C) = \frac{5}{18}$

36. Se lanzan un dado y una moneda. Halla $P(A \cup B)$ siendo A y B los sucesos siguientes: *A: la moneda muestra cara* y *B: el dado muestra una cara menor o igual que 3.*

Sol.: $\frac{3}{4}$

37. Efectuamos dos extracciones con reposición en una urna que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea igual a cuatro?

Sol.: $\frac{3}{25}$

38. En una urna hay tres bolas blancas, tres bolas rojas y dos bolas negras. Se extraen dos bolas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de obtener las dos bolas negras? ¿Y si la extracción es con reposición?

Sol.: $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{16}$

39. En un trayecto de metro utilizamos dos escaleras mecánicas A y B. La escalera A está averiada uno de cada diez días; la escalera B, uno de cada siete, y las dos escaleras se averían independientemente. Halla la probabilidad de que al efectuar un viaje:

a) Como mínimo haya una escalera averiada.
b) No haya ninguna escalera averiada.
c) Haya exactamente una escalera averiada.

Sol.: *a)* $\frac{8}{35}$; *b)* $\frac{27}{35}$; *c)* $\frac{3}{14}$

40. Efectuamos dos extracciones con reposición en una caja que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola 3 salga como mínimo una vez? Justifica tu respuesta.

Sol.: $\frac{5}{9}$

41. Lanzamos seis veces dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir como mínimo un as doble?

Sol.: 0,1555

42. En una caja tenemos tres bolas blancas numeradas del 1 al 3 y cinco bolas negras numeradas del 1 al 5. Se extrae una bola y se consideran los sucesos *A: bola blanca* y *B: número más pequeño o igual que dos.* ¿Son independientes los sucesos A y B?

43. Tres chicos y dos chicas se colocan en una mesa circular. Calcula la probabilidad de los sucesos *A: las dos chicas se sientan juntas* y *B: las dos chicas no se sientan juntas.*

Sol.: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$

44. La tabla siguiente muestra el número de alumnos de un centro escolar matriculados en cada una de las modalidades del Bachillerato:

	CT	CS	A
Chicos	164	92	50
Chicas	228	97	73

a) Halla la probabilidad de que, al escoger un escolar del centro al azar, éste sea un chico que cursa la modalidad de Humanidades y Ciencias sociales.

b) Halla la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, éste curse la modalidad de Humanidades y Ciencias sociales, sabiendo que es un chico.

Sol.: *a)* 0,1307; *b)* 0,3007

45. El 80 % de las personas que este verano subieron al Aneto eran españoles y el 60 % de éstos tenían menos de 30 años. De los que no eran españoles, el 30 % tenía más de 30 años. Escogida una persona al azar, se pide:

a) Si no es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?
b) Si es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años?

Sol.: *a)* 0,7; *b)* 0,4; *c)* 0,38

46. Al llamar a la centralita telefónica de una oficina, la probabilidad de que esté comunicando es 0,3 y la probabilidad de que el telefonista nos diga que la extensión que pedimos comunica es 0,2. Calcula la probabilidad de que consigamos comunicar con la extensión deseada.

Sol.: 0,56

47. Se extraen dos cartas de una baraja española de 40 cartas en dos extracciones consecutivas. Sean los sucesos A_1: *la primera es figura;* A_2: *la segunda es figura;* B_1: *la primera es de oros;* B_2: *la segunda es de oros.* Halla la probabilidad de los sucesos $A_1 \cap A_2$ y $B_1 \cap B_2$ en estos casos:

a) Hay reposición de la primera carta.
b) No hay reposición de la primera carta.

Sol.: *a)* $P(A_1 \cap A_2) = \frac{9}{100}$, $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{16}$;
b) $P(A_1 \cap A_2) = \frac{11}{130}$, $P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{52}$

48. A unas jornadas científicas asisten 100 científicos, de los cuales, 80 hablan inglés y 40, alemán. ¿Cuál es la probabilidad de que elegidos dos científicos al azar no puedan entenderse sin intérprete?

Sol.: 0,2424

49. Dos sucesos A y B son independientes. Sabiendo que $P(A) = 0{,}92$ y $P(B) = 0{,}18$, calcula $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. ¿Son independientes los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$?

Sol.: 0,0656

50. Un estudiante de Geografía busca una pirámide de población en tres manuales. La probabilidad de que la encuentre en el primero, el segundo o el tercer manual es, respectivamente, 0,5, 0,6 y 0,7. Halla la probabilidad de que la encuentre:

   a) Sólo en un manual.

   b) Exactamente en dos manuales.

   c) En los tres manuales.

Sol.: *a)* 0,29; *b)* 0,44; *c)* 0,21

51. La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 años más es 0,6 y 0,7, respectivamente. Calcula la probabilidad de que:

   a) Ambos vivan 50 años más.

   b) Viva sólo la mujer.

   c) No viva ninguno de los dos más de 50 años.

Sol.: *a)* 0,42; *b)* 0,28; *c)* 0,12

52. A un paciente se le aplican tres sueros, independientemente, con probabilidades de éxito 0,9, 0,95 y 0,92. Halla la probabilidad de que el paciente sane.

Sol.: 0,9996

53. Los datos de votantes en las últimas elecciones correspondientes a una determinada ciudad muestran que el 73,5 % de los hombres censados ejerció su derecho a voto, mientras que el porcentaje de mujeres censadas que no lo ejerció fue del 42,9 %. El censo de esta ciudad está compuesto por un 48 % de hombres y un 52 % de mujeres.

   De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. Calcula la probabilidad de que esta persona:

   a) Haya votado.

   b) Haya votado y sea hombre.

   c) Sabiendo que ha votado, sea mujer.

Sol.: *a)* 0,6497; *b)* 0,3528; *c)* 0,4570

54. En un país se sabe que una de cada 145 personas tiene una determinada enfermedad. En este mismo país se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, bastante fiable, pero no del todo segura. Concretamente, si un individuo tiene la enfermedad, la prueba da positiva en un 96 % de los casos, mientras que si no la tiene, la prueba da positiva en un 6 % de los casos. Si un ciudadano se hace la prueba y el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el diagnóstico sea erróneo?

Sol.: 0,9

55. En un plato hay 20 cerezas, 4 de las cuales están picadas. Una de ellas se cae en otro plato que contenía 6 cerezas picadas y 18 sanas. Si cogemos, al azar, una cereza del segundo plato, calcula la probabilidad de que:

   a) Haya caído una cereza picada, sabiendo que la que hemos cogido del segundo plato estaba picada.

   b) Haya caído una cereza sana, sabiendo que la que hemos cogido del segundo plato estaba picada.

Sol.: *a)* 0,2258; *b)* 0,7742

56. Se tiene una baraja española completa y otra baraja de 4 cartas con los cuatro reyes. Se escoge al azar una carta de la baraja de 4 cartas y se introduce en la baraja completa. Calcula la probabilidad de que al extraer una carta de esta última baraja sea el rey de espadas.

Sol.: 0,0255

57. Una fábrica produce tres tipos de bolígrafos diferentes, *A*, *B* y *C*. El número de unidades producidas de cada uno de ellos es el mismo y salen defectuosos un 15 ‰ de todos los de tipo *A*, un 3 ‰ de todos los de tipo *B* y un 7 ‰ de todos los de tipo *C*. En un control de calidad se detecta el 70 % de todos los bolígrafos defectuosos de tipo *A*, el 80 % de los de tipo *B* y el 90 % de los de tipo *C*. Los bolígrafos defectuosos detectados en ese control se tiran. Si cogemos al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se ha tirado, halla la probabilidad de que sea de tipo *A*.

Sol.: 0,5469

58. Accede a la página **www.ugr.es/~jsalinas/bayes.htm** y utiliza la calculadora de Bayes para comprobar los resultados obtenidos en las actividades 54 y 55 de esta unidad.

59. Accede a la página **www.isftic.mepsyd.es/w3/recursos/bachillerato/matematicas/probabilidad/index.html**, donde encontrarás explicaciones muy amenas sobre probabilidad. Realiza las actividades interactivas para el alumno.