

EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus

discontinuidades: a) $y=3|x|+5$; b) $y=\begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ \frac{-1}{x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$; c) $y=\begin{cases} 4 & \text{si } x > 0 \\ 3x-1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$;

d) $y=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x=0 \end{cases}$; e) $y=\begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 4x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; f) $y=\begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$; g) $y=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

h) $y=\begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x=2 \end{cases}$; i) $y=\begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x < -3 \\ \frac{|x|}{x} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ j) $y=\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ k) $y=\begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los distintos valores de a y b

a) $y=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$; b) $y=\begin{cases} a(x-2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ bx+1 & \text{si } 0 < x < 5 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$; c) $y=\begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ ax+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) $y=\begin{cases} 4-x & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x+a & \text{si } x > 3 \end{cases}$; e) $y=\begin{cases} \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x=0 \end{cases}$; f) $y=\begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ b & \text{si } x=2 \end{cases}$;

g) $y=\begin{cases} a \cos x & \text{si } x \leq b \\ x^2 & \text{si } x > b \end{cases}$; h) $y=\begin{cases} ae^x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ be^{-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ i) $y=\begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ m \sin x + n & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 2 \cos x & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$

SOLUCIONES

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando de qué tipo son sus discontinuidades:

a) $y=3|x|+5=\begin{cases} -3x+5 & \text{si } x<0 \\ 3x+5 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ La función es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ por estar definida en cada uno de ellos como una función polinómica. El único punto que podría tener problema es $x=0$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-3x+5) = 5$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x+5) = 5$; $f(0)=5$ Luego f es continua en $\mathbb{R}$

b) $y=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<-1 \\ \frac{-1}{x} & \text{si } -1<x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$; Las funciones $y=x+2$ e $y=x^2$ son continuas en $\mathbb{R}$ y por lo tanto lo son

respectivamente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, \infty)$ en los que están definidas. La función $y=-1/x$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, y por lo tanto lo es en el intervalo $(-1, 0)$. Así pues los únicos puntos en los que la función que nos dan puede tener problemas de continuidad es en $x=-1$ y en $x=0$

Continuidad en $x=-1$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+2) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-1/x) = 1$; $f(-1) \neq 1$. Por lo tanto la función presenta en $x=-1$ una discontinuidad evitable.

Continuidad en $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1/x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ Por lo tanto la función presenta en $x=0$ una discontinuidad asintótica. f es continua en $\mathbb{R}-\{-1, 0\}$

c) $y=\begin{cases} 4 & \text{si } x>0 \\ 3x-1 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ Tanto la función $y=4$ como $y=3x-1$ son continuas en $\mathbb{R}$ y por lo tanto

lo son respectivamente en los intervalos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$ Debemos estudiar la continuidad en $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x-1) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 = 4$ Luego f presenta en $x=0$ una discontinuidad de salto finito y es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

d) $y=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \\ 3 & \text{si } x=0 \end{cases}$; La función $y=1/x^2$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. Estudiamos la continuidad en $x=0$ de la función dada: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = +\infty$; $f(0)=3$ Luego f presenta en $x=0$ una discontinuidad asintótica y es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

e) $y=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 4x-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ Las 2 funciones que componen a $f(x)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómicas, por lo tanto lo son respectivamente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Así, el único punto problemático que presenta nuestra función es $x=1$:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-1) = 3$; $f(1) \neq 3$ Entonces: en $x=1$ la función es discontinua evitable, en $\mathbb{R}-\{1\}$ f es continua.

f) $y=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ $y=0$ es continua en $(-\infty, 0)$ por serlo en $\mathbb{R}$; $y=x^2$ es continua en $(0, \infty)$ por la misma razón. Estudiamos la continuidad en $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$; $f(0)=0 \Rightarrow f$ es continua en todo $\mathbb{R}$

g) $y=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x<1 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ La función $y=1/x$ es continua en $(-\infty, 1)-\{0\}$. La función $y=\frac{1}{x-2}$ es continua en $(1, \infty)-\{2\}$. Además en $x=1$ hay un cambio de función, por lo tanto tenemos que estudiar la función en esos 3 puntos.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1/x) = \infty \Rightarrow f$ tiene en $x=0$ una discontinuidad asintótica

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{x-2}) = \infty \Rightarrow f$ presenta en $x=2$ una discontinuidad asintótica

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1/x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\frac{1}{x-2}) = -1 \Rightarrow$ En $x=1$ f es discontinua de salto finito. f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

h) $y = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x=2 \end{cases}$ La función $y = \frac{x^3-8}{x^2-4}$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ y por lo tanto f también lo es.

Continuidad en $x=-2$ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{-16}{0} = \infty$ luego en $x=-2$ f es discontinua asintótica.

Continuidad en $x=2$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{0}{0} = \infty$ Factorizamos los dos polinomios obteniendo: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$; $x^2-4=(x-2)(x+2)$. En consecuencia:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{12}{4} = 3$; $f(2)=3$. Por lo tanto f es continua en $x=2$

En resumen f es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$ y es discontinua asintótica en $x=-2$.

$$i) y = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x < -3 \\ \frac{|x|}{x} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x < -3 \\ \frac{-x}{x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x < -3 \\ -1 & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función $y = \frac{1}{x-3}$ es continua en $(-\infty, -3)$ por serlo en $\mathbb{R} - \{3\}$, las funciones $y=-1$, $y=1$ e $y = \frac{x^2}{9}$ son continuas respectivamente en $(-3, 0)$ y $(0, 3)$ y $(3, \infty)$ por serlo en $\mathbb{R}$. En consecuencia, los puntos problemáticos de nuestra función son $x=0$, $x=-3$ y $x=3$.

$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (\frac{1}{x-3}) = -1/6$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} -1 = -1$ Discontinua de salto finito en $x=-3$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ Discontinua de salto finito en $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{9} = 1$; $f(3) = 1$ continua en $x=3$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$

j) $y = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ Hallamos el dominio de la función: $x^3+7x-8=0 \Rightarrow x=1$ luego $D = \mathbb{R} - \{1\}$

; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3+7x-8} = \frac{0}{0}$ y factorizando: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3+7x-8} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+8)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x^2+x+8)} = \frac{2}{10}$;

$f(1)$ no existe $\Rightarrow f$ es discontinua evitable en $x=1$ y continua en su dominio.

k) $y = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ El único punto problemático de la función es $x=0$ ya que las

funciones $y = \frac{e^x}{e^x+1}$ e $y = \frac{x^2+1}{2}$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\frac{e^x}{e^x+1}) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{2} = \frac{1}{2}$; $f(0) \nexists$ luego f presenta una discontinuidad evitable en $x=0$, siendo continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, es decir en su dominio.

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los distintos valores de a y b

$$a) y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} ; \text{ La función } y=1/x \text{ es continua en } (-\infty, -1) \text{ al serlo en } \mathbb{R}-\{0\};$$

las funciones $y=ax+b$ e $y=2$ son continuas en los intervalos en los que están definidas al serlo en $\mathbb{R}$. Por tanto los únicos problemas de continuidad de esta función pueden estar en $x=-1$ y $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = -a + b; f(-1) = -a + b \Rightarrow -a + b = -1 \quad \text{para que } f \text{ sea continua en } x=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2; f(2) = 2 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad \text{para que } f \text{ sea continua en } x=2. \text{ Entonces, para que } f \text{ sea continua en } \mathbb{R} \text{ ha de verificarse:}$$

$$\begin{cases} -a + b = -1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$b) y = \begin{cases} a(x-2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ bx + 1 & \text{si } 0 < x < 5 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 5 \end{cases} ; \text{ Las funciones } y=a(x-2)^2 \text{ e } y=bx+1 \text{ son continuas en todo } \mathbb{R}$$

para cualquier valor de a y b , al ser funciones polinómicas, en consecuencia lo son en el intervalo en el que están definidas. La función $y=1/x$ es continua en $(5, \infty)$ por serlo en $\mathbb{R}-\{0\}$. Hay que estudiar entonces únicamente la continuidad en $x=0$ y $x=5$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a(x-2)^2 = 4a; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx + 1) = 1; f(0) = 4a \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = 1/4 \quad \text{para este valor de } a \text{ } f \text{ es continua en } x=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (bx + 1) = 5b + 1; \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} 1/x = 1/5; f(5) = 1/5 \Rightarrow 5b + 1 = 1/5 \Rightarrow b = -4/25 \quad \text{Para ese valor es continua en } x=5.$$

Por tanto para $a=1/4$ y $b=-4/25$ es continua en $\mathbb{R}$

$$c) y = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ ax + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{Tanto la función } y=x \text{ como la función } y=ax+2 \text{ son continuas en su interlo de definición por serlo en } \mathbb{R}.$$

$$\text{Continuidad en } x=1: \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 2) = a + 2; f(1) = a + 2 \Rightarrow 1 = a + 2 \Rightarrow a = -1. \text{ Para ese valor de } a \text{ } f \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

$$d) y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x + a & \text{si } x > 3 \end{cases} ; \text{ Todas las funciones que componen } f \text{ son polinómicas y por}$$

tanto continuas en el intervalo en el que están definidas. Veamos la continuidad en $x=0$ y $x=3$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 4 - x = 4; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b; f(0) = b \Rightarrow b = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + b = 3a + b; \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + a) = 3 + a; f(3) = 3 + b \Rightarrow 3a + b = 3 + a \Rightarrow 3a + 4 = 3 + a \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -1/2$$

$$e) \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases} ; 8x^3 + 3x = 0 \Rightarrow x(8x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ Por lo tanto la función}$$

$y = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x}$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y en consecuencia nuestra función también lo es. Veamos la continuidad en $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x} = \frac{0}{0}$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{x(8x^2 + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{(8x^2 + 3)} = \frac{1}{3}; f(0) = a. \text{ Para que } f \text{ sea continua } a = 1/3$$

$$f) y = \begin{cases} \frac{ax^3-16}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ b & \text{si } x=2 \end{cases} \quad \text{La función } y = \frac{ax^3-16}{x-2} \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{2\}, \text{ por lo tanto también lo}$$

es la función que nos ocupa. Veamos la continuidad en $x=2$: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^3-16}{x-2} = \frac{8a-16}{0}$;

Si $8a-16$ es distinto de cero ese límite sería infinito y la función presentaría en $x=2$ una discontinuidad de asíntota para cualquier valor de b . La única posibilidad de que ese límite exista es que sea del tipo $0/0$ y, por lo tanto que $8a-16=0 \Rightarrow a=2$.

Para ese valor de a : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3-16}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x^2+4x+8)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2+4x+8) = 24$; $f(2)=b$

Luego $b=24$ y $a=2$ para que f sea continua

$$g) y = \begin{cases} a \cos x & \text{si } x \leq b \\ x^2 & \text{si } x > b \end{cases} ; \text{ Las funciones } y = a \cos x \text{ e } y = x^2 \text{ son continuas en } \mathbb{R} \text{ y por lo tanto}$$

en los intervalos en los que están definidas. Veamos la continuidad en $x=b$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} a \cos x = a \cos b; \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} x^2 = b^2 \Rightarrow a \cos b = b^2 \Rightarrow a = \frac{b^2}{\cos b}$$

La función es continua $\forall b \in \mathbb{R}$ t q $\cos b \neq 0$ siempre que para ese valor de b sea $a = \frac{b^2}{\cos b}$

En definitiva b puede tomar cualquier valor excepto $\begin{cases} \pi/2 + 2k\pi \\ 3\pi/2 + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}; a = \frac{b^2}{\cos b}$

$$h) y = \begin{cases} ae^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ be^{-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{Todas las funciones que intervienen en la composición de } f \text{ son}$$

continuas en todo $\mathbb{R}$, por tanto los únicos puntos problemáticos son $x=0$ y $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x - 1) = a - 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (be^{-x}) = b; f(0) = a - 1 \Rightarrow a - 1 = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (be^{-x}) = b/e; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3) = 3; f(1) = 3 \Rightarrow b/e = 3 \Rightarrow b = 3e$$

Como $a-1=b \Rightarrow a = b + 1 = 3e + 1$

$b=3e$, $a=3e+1$ para que f sea continua en $\mathbb{R}$

$$I) \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ m \sin x + n & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 2 \cos x & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases} \quad \text{Todas las funciones que componen } f \text{ son continuas en } \mathbb{R}$$

Estudiemos la continuidad en $x = -\pi/2$ y en $x = \pi/2$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} (\sin x) = \sin(-\pi/2) = -1; \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} (m \sin x + n) = -m + n;$$

$f(-\pi/2) = -1 \Rightarrow$ para que f sea continua en $x = -\pi/2$ debe verificarse que $-m+n=-1$

$$(m \sin x + n) = m + n; \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (2 \cos x) = 0 \Rightarrow m + n = 0 \text{ para que sea continua en } x = \pi/2$$

Para que f sea continua han de cumplirse las dos condiciones:

$$\begin{cases} -m + n = -1 \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1/2 \\ n = -1/2 \end{cases}$$