1. Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, si\ x < -1 \\ x^2 - 3, si - 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{3}{x - 2}, si\ x > 2 \end{cases}$$

2. Una empresa dedicada a montajes en cadena, ha determinado que el número de montajes, M(t), realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento, t, de acuerdo con la función:

$$M(t) = \frac{30t}{t + 4}$$

(a) ¿Cuántos montajes realizará el primer día de entrenamiento? ¿Y el sexto?

(b) ¿Existe un número de días de entrenamiento para los que el número de montajes es máximo? Razona la respuesta.

(c) ¿Qué ocurriría, con el número de montajes, si nunca acabara el entrenamiento? Justifícalo.

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$, determina:

(a) Dominio y asíntotas.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

4. **(a)** Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, calcula a, b y c para que el punto P = (1, 5) y el de abscisa x = 2 sean extremos relativos. Razona la respuesta.

(b) Calcula las funciones derivadas de:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{(3x-1)^2}} \qquad \text{y} \qquad g(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \sqrt{x}\right)$$

1. $Domf = R - \{-1\}$

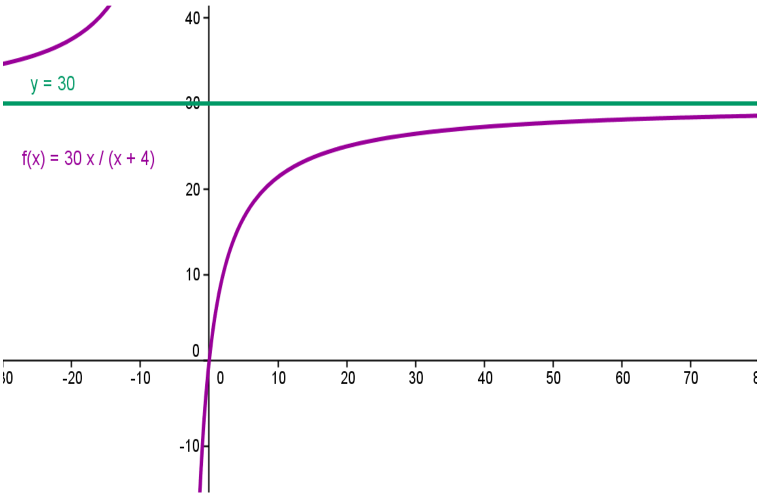
$$\left\{\begin{array}{c} x = -1 \notin Domf \\ \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = -2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-3) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\ presenta\ una\ discontinuidad\ evitable\ en\ x = -1$$

$$\left\{\begin{array}{c} f(2) = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} (x^2-3) = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{3}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) presenta\ en\ x = 2\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ 1ª\ especie$$

1. **(a)** $\boldsymbol{M(1) = \frac{30}{5} = 6}$ montajes. $M(6) = \frac{180}{10} = 18$ montajes.

(b) $\boldsymbol{M'(t) = \frac{120}{(t+4)^2} > 0, \forall t \Longrightarrow M(t) es\ creciente\ en\ R^+ \Longrightarrow No\ presenta\ extremos\ relativos}$

(c) $\boldsymbol{\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{30t}{t+4} = 30}$ El número de montajes se va incrementando pero sin sobrepasar el nº de 30.



3. (a) $\boldsymbol{Domf = R - \{1\}}$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+3}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+3}{x-1} = +\infty \end{cases}\right\} \Longrightarrow la\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow No\ tiene\ asíntotas\ horizontales$$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2-x} = 1 = m \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x-1} = 1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow y = x + 1\ es\ asíntota\ oblícua$$

(b) $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$ $\qquad f''(x) \neq 0\ en\ su\ dominio$

Intervalo	x<1	x>1
Signo de f''(x)	negativa	positiva
Curvatura	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

No tiene puntos de inflexion pues x = 1 no es del dominio.

4. **(a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P(1{,}5) \in gráfica \Longrightarrow f(1) = 5 \Longrightarrow a + b + c = 5$

La función es derivable en R y x = 1 es extremo relativo $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

La función es derivable en R y x = 2 es extremo relativo $\Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones obtenemos: a = 2, b = -9, c = 12.

(c) $\boldsymbol{f(x) = \ln\sqrt{\frac{1}{(3x-1)^2}} = \frac{1}{2}[\ln 1 - 2\ln(3x-1)] = -\ln(3x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{3x-1}}$

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \sqrt{x}\right) + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x} + 2\right)}{2\sqrt{x}}}$$