SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

1) *(Selectividad 2005)* Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x - 3y \le 6; \quad x \ge 2y - 4; \quad x + y \le 8; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0.$$

Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.

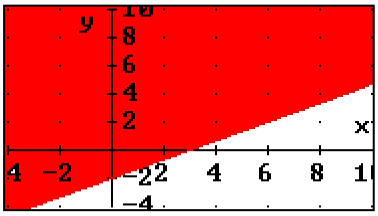
Tomamos la primera inecuación $2x - 3y \le 6$ y cambiamos el $\le$ por $=$. Resulta: $2x - 3y = 6$.

Toda función de ecuación $ax + by = c$ tiene como gráfica una recta. Tenemos, pues, la ecuación de una recta.

Comenzamos dibujándola. Para ello, tomamos, al menos, dos puntos convenientemente alejados el uno del otro. Por ejemplo, hacemos $x = 0$ y sustituimos en la ecuación: $2 \cdot 0 - 3y = 6 \Rightarrow y = 6/(-3) = -2$. Luego la recta pasa por $(0, -2)$. Igualmente, si $y = 0 \Rightarrow 2x - 3 \cdot 0 = 6 \Rightarrow x = 6/2 = 3$. Por tanto, pasa por $(3, 0)$.

La recta divide al plano en dos semiplanos. Las inecuaciones $ax + by \le c$ son verificadas por todos los puntos de uno de esos dos semiplanos. Una de las formas de averiguar de cuál de ellos se trata es la que emplearemos a continuación: despejar la y y, según que sea $y \le$ *expresión* o $y \ge$ *expresión*, nos interesará el semiplano que quede por *debajo* o por *encima* de la recta, respectivamente.

$$2x - 3y \le 6 \iff 2x - 6 \le 3y \iff y \ge \frac{2x-6}{3}$$



Es decir, se trata del área que queda sobre la recta (si y fuera igual, en lugar de mayor o igual, serían los puntos de la recta; los puntos cuyos valores de y son mayores o iguales están por arriba de los puntos de la recta), y que está marcada en la figura adjunta.

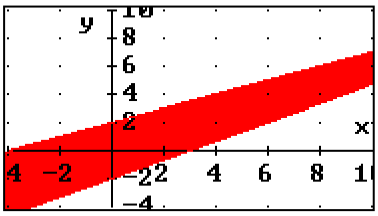
Otra forma de averiguar cuál de los dos semiplanos verifica la desigualdad es tomar un punto al azar (normalmente, el origen de coordenadas) que no sea de la recta (es decir, que pertenezca a uno de los semiplanos), y ver si dicho punto verifica la inecuación. Si lo hace, todos los puntos del semiplano en el que está dicho punto, la verificarán. En caso contrario, el semiplano solución será el otro.

En nuestra inecuación, podemos tomar (0, 0):

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \le 6$$

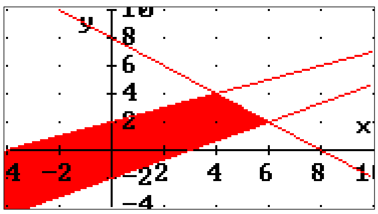
La verifica. Por tanto, el semiplano solución es el que contiene al (0, 0). Este resultado coincide con el que obtuvimos antes. Este método es más cómodo, porque no exige despejar y.

$$x \ge 2y - 4 \iff x + 4 \ge 2y \iff y \le \frac{x+4}{2}$$



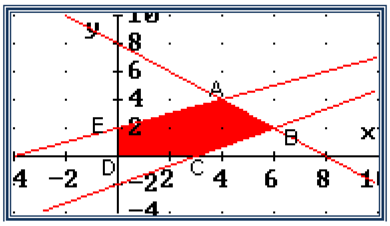
Luego se trata del área que queda bajo la recta. La dibujamos en el mismo gráfico, con lo que el área actual, teniendo en cuenta los puntos que verifican ambas desigualdades, es la de la figura adjunta.

$$x + y \le 8 \iff y \le -x + 8$$



Por tanto, es el área que queda bajo la recta y que reflejamos en la figura adjunta, combinándola con el área que teníamos hasta ahora.

Los puntos que verifican $x \geq 0$ son todos los que quedan a la derecha del eje OY. A su vez, los que verifican $y \geq 0$ son los que están por encima del eje OX. En definitiva, el área solicitada es:



Este área suele denominarse *región factible*.
Los vértices de la región son los puntos A, B, C, D y E de intersección de las distintas rectas. Hallemos sus distintas coordenadas.

- A es la intersección de $x = 2y–4$ con $x+y = 8$. Para hallarla, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas (buscamos coordenadas de puntos que estén a la vez sobre las dos rectas). La primera de estas ecuaciones es equivalente a $x–2y = –4$. Multiplicando la segunda ecuación por 2:
  $$\begin{cases} x-2y=-4 \\ x+y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-4 \\ 2x+2y=16 \end{cases}$$
  Sumando: $3x \quad = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 4$
  Sustituyendo en la segunda ecuación original: $4+y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 8–4 = 4$. Es decir, $\boxed{A(4, 4)}$.

- B es la intersección de $2x – 3y = 6$ con $x+y = 8$. Multiplicando la segunda ecuación por 3:
  $$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=6 \\ 3x+3y=24 \end{cases}$$
  Sumando: $5x \quad = 30 \quad \Rightarrow \quad x = 6$
  Sustituyendo en la segunda ecuación original: $6+y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 8–6 = 2$
  Luego $\boxed{B(6, 2)}$

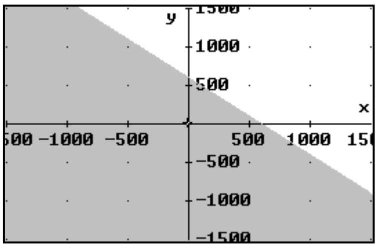
- C es la intersección de $2x – 3y = 6$ con el eje OX, es decir, con $y = 0$. Sustituyendo $y = 0$ en $2x – 3y = 6$, queda: $2x–0 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$. Luego $\boxed{C(3, 0)}$

- D es el origen de coordenadas: $\boxed{D(0, 0)}$

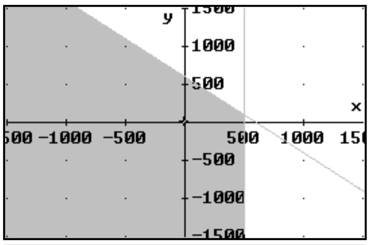
- E es la intersección de $x = 2y–4$ con el eje OY. Sustituyendo $x = 0$ en $x = 2y–4$, queda: $0 = 2y–4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2y \quad \Rightarrow \quad y = 2$. Luego $\boxed{E(0, 2)}$

2) *(Selectividad 2005)* Sea el sistema de inecuaciones siguiente:
$$x + y \leq 600, \quad x \leq 500, \quad y \leq 3x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$
Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.

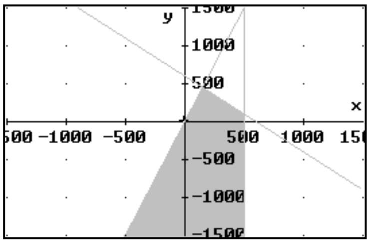
$x+y \leq 600 \quad \Rightarrow \quad y \leq -x+600$ Es decir, es el área que queda bajo la recta $y = -x+600$ (los que verifican la igualdad están sobre la recta; los que tienen valores de y mayores o iguales están por encima de la recta). Está en la figura adjunta.



$x \leq 500$ son los puntos que están a la izquierda de la recta vertical $x = 500$. Combinando con el área anterior, resulta la figura adjunta.

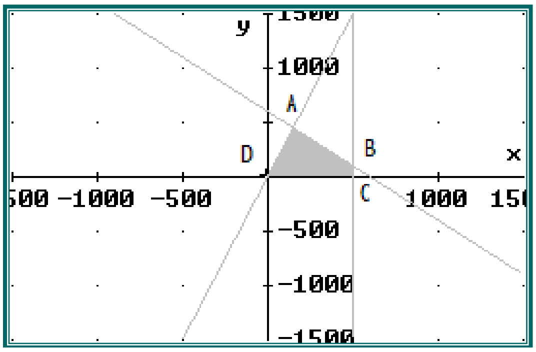


$y \leq 3x$ son los puntos que están bajo la recta $y = 3x$



$x \geq 0$ son los puntos que quedan a la derecha del eje OY (la recta $x = 0$)
$y \geq 0$ son los puntos que quedan por encima del eje OX (la recta $y = 0$)

El área definitiva es, entonces:



Hallemos las coordenadas de los vértices de la región, que no son más que las intersecciones de las rectas intervinientes.

- A es la intersección de $y = 3x$ y de $y = -x+600$. Pasando las incógnitas a un miembro y el término independiente al otro:
  $$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 600 \end{cases} \Rightarrow \text{ Sumándolas: } 4x = 600 \Rightarrow x = 150 \Rightarrow$$
  $\Rightarrow$ Sustituyendo en la primera ecuación: $3 \cdot 150 - y = 0 \Rightarrow y = 450 \Rightarrow \boxed{A(150, 450)}$

- B es la intersección de $y = -x+600$ y de $x = 500$. Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación: $y = -500+600 = 100 \Rightarrow \boxed{B(500, 600)}$

- C es la intersección de $x = 500$ con el eje OX: $\boxed{C(500, 0)}$
- D es el origen de coordenadas: $\boxed{D(0, 0)}$

3) *(Selectividad 2012)* Representar la región factible delimitada por las siguientes inecuaciones, y calcular sus vértices:

$$x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad 2x + 3y \leq 1050; \quad 5x + 2y \leq 1250; \quad y \leq 300$$

Llevamos cada una de las inecuaciones a un gráfico. La ecuación $x = 0$ es el eje OY. Los puntos que verifican que $x \geq 0$ son los que quedan a la derecha del eje, como podemos corroborar eligiendo un punto cualquiera de dicha zona (la recta divide al plano en dos semiplanos: nos referimos al que queda a la derecha del eje), por ejemplo el (3, 5), sustituyéndolo en la inecuación $x \geq 0$: $3 \geq 0$, y comprobamos que dicha desigualdad es cierta.

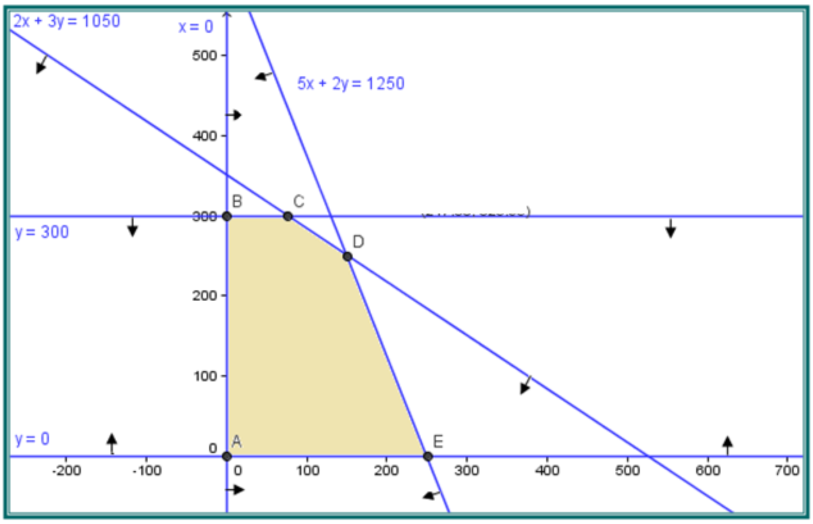
De la misma forma, los puntos que resuelven $y \geq 0$ son los que están por encima del eje OX, porque dicho eje es la recta $y = 0$. Esta inecuación, junto con la anterior, nos restringe al primer cuadrante.

La recta $2x + 3y = 1050$ divide, también, al plano en dos semiplanos. Para cuál de ellos resuelve la inecuación $2x + 3y \leq 1050$, tomamos un punto cualquiera que no esté sobre la recta, por ejemplo el (0, 0), y vemos si la verifica: $2\cdot 0 + 3\cdot 0 \leq 1050$. Como así es, de los dos semiplanos, el que resuelve la inecuación es el que contiene al (0, 0).

De la misma forma actuamos con las dos inecuaciones restantes.

Esta vez sólo hemos dibujado las rectas (con un par de puntos para cada una de ellas, normalmente los cortes con los ejes de coordenadas, que se obtienen forzando a que $x = 0$ y sustituyendo en la ecuación de la recta, y a que $y = 0$ y haciendo lo propio). Para cada recta, con unas flechas, hemos señalado el semiplano que resuelve la inecuación correspondiente.

Combinando toda la información, encontramos la *región factible*:



La región está delimitada por cinco vértices. Hallemos sus coordenadas.

- $\boxed{A(0, 0)}$, pues se trata del origen de coordenadas.
- $\boxed{B(0, 300)}$, porque está sobre el eje OY (luego $x = 0$) y sobre la recta $y = 300$.
- C es la intersección de las rectas $2x + 3y = 1050$ con $y = 300$. Para averiguarla, resolvemos el correspondiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=1050\\ y=300\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Sustituyendo la 2ª ec en la 1ª:}\\ 2x+3\cdot 300=1050 \Rightarrow 2x=1050-900=150 \Rightarrow x=\dfrac{150}{2}=75\end{array}$$

Luego $\boxed{C(75,\ 300)}$

- De igual forma:

$$\left.\begin{array}{r}5x+2y=1250\\ 2x+3y=1050\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl}\cdot 3: & 15x+6y=3750\\ \cdot(-2): & -4x-6y=-2100\\ \hline & 11x \qquad =1650\end{array} \Rightarrow x=\frac{1650}{11}=150$$

Sustituyendo en la 2ª: $2\cdot 150 + 3y = 1050 \Rightarrow 3y = 1050 - 300 \Rightarrow y = \dfrac{750}{3} = 250$

Por lo que $\boxed{D(150,\ 250)}$.

- E es la intersección de $5x + 2y = 1250$ con el eje OX. Haciendo que $y = 0$, obtenemos: $\boxed{E(250,\ 0)}$.

4) *(Selectividad 2010)* Representar la región factible delimitada por las siguientes inecuaciones, y calcular sus vértices:

$$x \geq 0;\quad y \geq 0;\quad 2x + 3y \leq 400;\quad 2x + y \leq 300;\quad x + 4y \leq 400$$

Dibujamos un gráfico con las restricciones. Cambiamos en cada una de las cinco inecuaciones el signo de desigualdad por un igual, obteniendo así la ecuación de una recta. Trazamos dichas rectas.

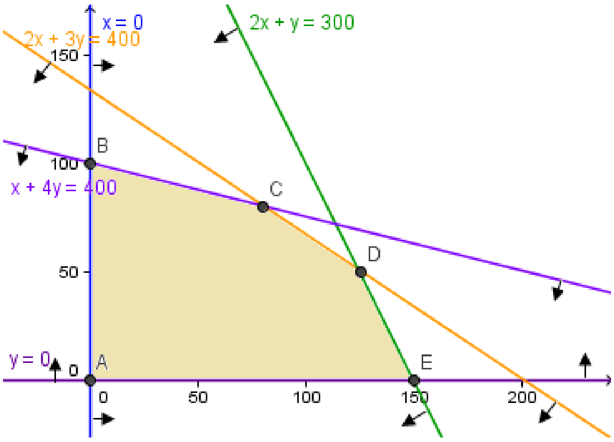
$x = 0$ e $y = 0$ son los ejes OY y OX respectivamente $\Rightarrow$ $x \geq 0$ e $y \geq 0$ nos restringen, pues, al primer cuadrante, que es donde se verifican ambas inecuaciones a la vez.

Para $2x + 3y = 400$, hacemos $x = 0 \Rightarrow y = 400/3$. Y también $y = 0 \Rightarrow x = 200$, Luego pasa por $(0, 400/3)$ y $(200, 0)$. Esta recta divide al plano en dos semiplanos. Para decidir cuál de ellos verifica la inecuación $2x + 3y \leq 400$ podemos optar por despejar y en la inecuación: $y \leq \dfrac{-2x+400}{3}$, con lo que sabemos que, como los puntos que están sobre la recta verifican la misma expresión, pero con el signo =, los puntos cuya y es inferior a los que están sobre la recta, esto es, aquellos que quedan por debajo de la misma, son la solución de la inecuación. Pero otra opción para decidir cuál es el semiplano solución es tomar un punto que no esté en la recta, por ejemplo, el (0, 0), y sustituirlo en la inecuación, a ver si lo verifica:

$$2\cdot 0 + 3\cdot 0 \leq 400 \iff 0 \leq 400$$

que resulta cierto. Por tanto, de los dos semiplanos, la solución es el que contiene al punto (0, 0). Señalamos dicho semiplano con unas flechitas sobre la recta $2x + 3y = 400$.

Repetimos cálculos similares para las otras dos inecuaciones. El gráfico, en el que se han destacado los vértices de la *región factible*, es el siguiente:



Calculemos los cinco vértices:

- $\boxed{A(0, 0)}$, pues es la intersección de los ejes.
- B es la intersección de la recta $x + 4y = 400$ con el eje OY, cuya ecuación es $x = 0$. Sustituyendo este valor en la ecuación de la otra recta: $0 + 4y = 400 \Rightarrow y = 100$. Luego $\boxed{B(0, 100)}$.
- Análogamente:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y=400 \\ 2x+3y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \cdot(-2):-2x-8y=-800 \\ 2x+3y=400 \\ \hline -5y=-400 \end{array} \Rightarrow y=\frac{-400}{-5}=80$$

Sustituyendo en la primera: $x + 4\cdot 80 = 400 \Rightarrow x = 400 - 320 = 80$. Luego $\boxed{C(80, 80)}$.

- $$\left.\begin{array}{r} 2x+y=300 \\ 2x+3y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \cdot(-1):-2x-y=-300 \\ 2x+3y=400 \\ \hline 2y=100 \end{array} \Rightarrow y=50$$

Sustituyendo en la primera: $2x + 50 = 300 \Rightarrow x = 250/2 = 125$. Con lo que $\boxed{D(125, 50)}$.

- Haciendo $y = 0$ en $2x + y = 300$: $2x = 300 \Rightarrow x = 150 \Rightarrow \boxed{E(150, 0)}$.