1 DEFINICIÓN DE DETERMINANTE

Consideramos el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ y el conjunto de matrices cuadradas sobre $\mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$.

Vamos a asociar a cada matriz cuadrada un número real, que se denomina el determinante de A y se denota por det(A) o $|A|$.

$$\begin{aligned} M_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longrightarrow |A| \end{aligned}$$

El determinante de una matriz cuadrada de orden n se llama ***determinante de orden n.***

Los determinantes constituyen una herramienta muy potente y eficaz en numerosos problemas geométricos y algebraicos.

Determinantes de orden 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \ |A| = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplos

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-4) = -3 + 8 = 5$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 0 \cdot (-1) = 9$

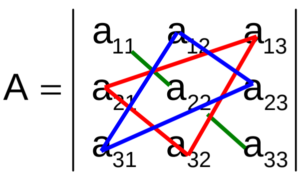
Determinantes de orden 3

Los determinantes de **orden tres** se definen como:

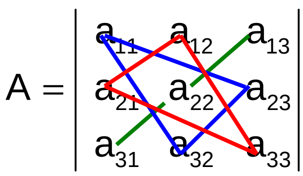
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Pierre Sarrus estableció una regla para calcular los determinantes de orden 3.

Los términos con signo + están formados por los productos de los elementos de la diagonal principal y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto



Los términos con signo – están formados por los productos de los elementos de la diagonal secundaria y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto



Ejemplos

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 2 + 3 - 6 + 4 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 1 = 2 + 2 + 24 - 3 - 8 - 4 = 13$

2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta: $|A| = |A^t|$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5 \qquad |A^t| = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$$

2. Si permutamos dos filas (o columnas) de una matriz, el determinante cambia de signo.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 24 - 3 - 8 - 4 = 13 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 3 - 24 - 2 - 2 = -13$$

3. Si multiplicamos una fila (o columna) por un número k , el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.
Como consecuencia de esta propiedad, si $A \in M_n$ y $k \in \mathbb{R} \rightarrow |k \cdot A| = k^n \cdot |A|$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \qquad |B| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 16 = 10 \qquad |2 \cdot A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 32 = 20$$

4. El determinante de una matriz es cero si:

a) Tiene dos filas (o columnas) iguales.

b) Tiene dos filas (o columnas) proporcionales.

c) Tiene alguna fila (o columna) de ceros.

d) Si una fila (o columna) es una combinación lineal de otras filas (o columnas).

- El inverso de esta propiedad también se cumple, es decir, si un determinante es nulo hay una combinación lineal en sus filas (o columnas).

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 7 - 12 + 28 = 0$$; la 1ª fila es combinación lineal de las otras dos $(F_1 = F_2 + F_3)$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$; la 1ª y 2ª fila son proporcionales $(F_2 = 2 \cdot F_1)$

5. El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad \rightarrow \quad |A \cdot B| = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -11 & 9 \end{vmatrix} = -36 + 66 = 30$$

6. Si una fila (o columna) de una matriz se pueden descomponer como suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes de las matrices que se obtienen de A sustituyendo dicha fila (o columna) por la fila formada por el primer sumando y por el segundo sumando, respectivamente.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -5+10=5 \quad ; \quad \text{Descomponiendo en dos: } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4-1 & 3+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad ; \quad \text{Descomponiendo en dos: } \begin{vmatrix} 2-3 & 0 \\ -1+2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-9=-3$$

7. Si a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de otras filas (o columnas), el determinante no varía.

- En la combinación lineal no tienen por qué figurar todas las restantes filas (o columnas); de hecho, no es habitual que ello ocurra.

  Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2+6=9$$

Sumamos a la fila F_3 la combinación lineal $F_1 - F_2$, es decir, sustituimos F_3 por $F_3 + F_1 - F_2$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F3=F3+F1-F2]{} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

Sumamos a la columna C_1 el doble de C_3, es decir, sustituimos C_1 por $C_1 + 2\cdot C_3$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[C1=C1+2\cdot C3]{} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

- ***Es importante*** tener en cuenta que la fila (o columna) a la que sumamos (o restamos) la combinación lineal no se puede ver multiplicada por ningún número, ni cambiada de signo, porque entonces sí que varía el determinante.

  Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+2+24-3-8-4=13$$

Si sustituimos la fila F_1 por la combinación $3\cdot F_1 - F_3$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F1=3\cdot F1-F3]{} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 39$$

3 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN n

3.1. MÉTODO de GAUSS para calcular determinantes de cualquier orden:

La propiedad "un determinante no varía si sumamos a una línea otra paralela multiplicada por un número" nos permite hacer ceros para conseguir el determinante de una matriz triangular.

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.

Es importante tener en cuenta:

- La línea a la que sumamos la combinación lineal no se puede ver multiplicada por ningún número, ni cambiada de signo, porque entonces varía el determinante.
- Al permutar dos líneas el determinante cambia de signo.

Ejemplos

1. Aplicar el método de Gauss para calcular el determinante de cada matriz:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2:\ F2+F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3:F3-\frac{1}{2}F2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to |A| = 0$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3+2F1]{F2=F2-5F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3+F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to |B| = -6$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F2=F2-F3]{} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F1=F1-2F2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to |C| = -16$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F3=F3-2F1 \\ F4=F4-F1}]{F2=F2-2F1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[F4\rightleftarrows F2]{} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F4=F4+2F2]{} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{F4\rightleftarrows F3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F4=F4-2F3]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

e) $|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[F4=F4-2F1]{F2=F2-2F1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} \xrightarrow[F3\rightleftarrows F2]{F4\rightleftarrows F3} -(-7) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{F4=F4-4F2} 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 33 \end{vmatrix} \xrightarrow{F4=F4+10F3} 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = 7 \cdot 23 = 161$

3.2. MÉTODO de LAPLACE para calcular determinantes de cualquier orden:

Sea $A \in M_n$, matriz cuadrada de orden n.

- Se llama ***menor complementario*** del elemento a_{ij} de una matriz A al determinante de orden $n-1$ que resulta de suprimir la fila i y la columna j de la matriz A. Se designa por M_{ij}.
- Se llama ***adjunto*** del elemento a_{ij} de una matriz A al valor: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Es decir, el adjunto de a_{ij} es el menor complementario "con signo": $\begin{cases} + \text{ si } i+j \text{ es par} \\ - \text{ si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$

Ejemplos

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El menor complementario del elemento a_{23} es el determinante que la matriz de orden 2 que se obtiene al eliminar de A la fila 2 y la columna 3:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Menor del elemento a_{23}: $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

Adjunto del elemento a_{23}: $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -(-5) = 5$

Los restantes menores con sus correspondientes adjuntos son:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$ $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 8$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = -1$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -3$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -1$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4$ $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 4$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = -3$

MÉTODO de LAPLACE «El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila (o columna) cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes».

El ***determinante de una matriz*** *A* es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila (o columna) por sus correspondientes adjuntos.

En el caso de una matriz de orden 3, desarrollando su determinante por los elementos de la primera fila es:

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Ejemplos

a) Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2-4) - 2(4-12) + (2-3) = -2 + 16 - 1 = 13$$

b) Calcular: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Conviene desarrollar por una línea que contenga el mayor número de ceros posibles.

Desarrollando el determinante por la segunda columna, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-35) + 21 = 161$$

3.3. MÉTODO PRÁCTICO (o Método mixto) para calcular determinantes de cualquier orden:

Antes de desarrollar por una fila (o columna) por Laplace conviene hacer el mayor número posible de ceros en ella. Si todos los elementos de una fila son ceros salvo uno de ellos, el determinante es igual al producto de dicho elemento por su adjunto.

Aplicando reiteradamente esta propiedad para conseguir una matriz triangular se demuestra fácilmente el siguiente resultado:

> "El determinante de una matriz triangular coincide con el producto de los elementos de su diagonal principal".

Ejemplos

Calcular $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Empleando el método de Gauss para hacer cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F4:2F3+F4]{F3:2F2+F3} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[F4:F1-F4]{F3:F1-F3} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (56-5) = 153$$

4 RANGO DE UNA MATRIZ

- *Definición:* Un conjunto de vectores es ***linealmente dependiente*** (se suele abreviar como **l.d.**) cuando uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes. En caso contrario, son **linealmente independientes** (**l.i.**).

Sea $A \in M_{m \times n}$, matriz de orden m x n

- *Definición*: Se llama ***rango*** o *característica de una matriz*, se denota rg(A), al nº de filas o columnas linealmente independientes.
  - El rango por filas es el mismo que el rango por columnas.
  - $|A| = 0 \Leftrightarrow$ Los vectores fila o columna son linealmente dependientes.
- *Definición*: Dada una matriz, un ***menor de orden*** **k** es cualquier determinante de orden **k** que podemos obtener suprimiendo filas y/o columnas.

Ejemplos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

- Suprimiendo la fila 1 y la columna 1 obtenemos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 8 = 12$
- Suprimiendo la fila 1 y la columna 2 obtenemos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4$
- Suprimiendo la fila 2 y la columna 3 obtenemos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$

- *IMPORTANTE:* El ***rango de una matriz*** $A \in M_{m \times n}$, es el orden del mayor menor no nulo de dicha matriz.

Ejemplos

1) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcular su rango:

- $|A| = 4 + 12 - 24 + 8 = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$
- Suprimiendo F3 y C3 obtenemos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$

2) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular su rango:

- Calculamos | A | desarrollando por los elementos de la 1ª columna:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 + 8) = 22 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$$

4.1. Cálculo del rango de una matriz por determinantes

Sea A una matriz de orden m x n. Vamos a ver un procedimiento ordenado para hallar el rango de una matriz orlando menores:

Antes de empezar podemos descartar una fila o columna si:

- Todos sus elementos son ceros.
- Hay dos filas (o columnas iguales)
- Una fila (o columna) es proporcional a otra.
- Una fila (o columna) es combinación lineal de otras.

Procedimiento:

1) Empezamos eligiendo un menor de orden 2 no nulo $\rightarrow$ rg (A) $\geq$ 2

- Si todos los menores de orden 2 que pudiéramos formar cubriendo ordenadamente toda la matriz fueran nulos, concluiríamos que rg (A) = 1.

2) Al menor anterior le vamos orlando sucesivamente la siguiente fila y el resto de columnas, es decir, vamos calculando sucesivamente cada uno de los menores de orden 3 posibles.

- Si encontremos uno de estos menores no nulo $\rightarrow$ rg (A) $\geq$ 3
- Si todos los menores de orden 3 que pudiéramos formar cubriendo ordenadamente toda la matriz fueran nulos, concluiríamos que rg (A) = 2.

3) Así sucesivamente, diremos que el rango de una matriz de orden m x n es k si todos los menores de orden k + 1 son nulos.

4) *Observación*: Si A es una matriz de orden m x n $\rightarrow$ rg (A) ≤ mín (m, n)

Ejemplos

1) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg (A) = 2 ya que |A| = 4 – 6 = -2 $\neq$ 0

2) Determinar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$
- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 12 - 1 - 24 + 12 = -3 \rightarrow \text{rg}(A) = 3$

3) Determinar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$
- |A| = 0 ya que F3 = F2 + F1

4.2. Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss.

Las transformaciones que podemos realizar a una matriz sin que su rango varíe son:

- Permutar dos filas o columnas.
- Multiplicar o dividir todos los elementos de una fila o columna por un número no nulo.
- Sumar a una fila (o columna) otra fila (o columna) multiplicada (o dividida) por un número real.
- Suprimir filas o columnas cuyos elementos son todos ceros.
- Suprimir fila (o columna) proporcional a otra fila (o columna)
- Suprimir fila (o columna) que sea combinación lineal de otras filas (o columnas)

Calcular el rango de una matriz mediante el método de Gauss consiste en aplicar estas transformaciones elementales a dicha matriz con objeto de conseguir una matriz triangular.

Una vez aplicado este proceso, el rango de la matriz es el número de filas no nulas de la matriz obtenida.

Este proceso se puede realizar también operando con las columnas.

Ejemplos

Aplicar el método de Gauss para calcular el rango de cada matriz:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2:F1+F2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Por tanto, rang(A) = 2

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=2F1+F3]{F2=5F1-F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3-F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Por tanto, rang(B) = 3

c) $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-2F2]{F1=F1+3F2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Por tanto, rang(C) = 1

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-2F1]{F2=F2-3F1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=7F3-F2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 25 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow$ rang(D) = 3

Observación:

La desventaja del método de Gauss es que a veces se hace laborioso conseguir la matriz triangular. Por ello se recomienda calcular el rango por menores, pero aplicando cuando proceda alguna de las transformaciones permitidas en el método de Gauss.

5 MATRIZ INVERSA

- ***Definición***: Sea $A \in M_n$ matriz cuadrada de orden n. La ***matriz inversa*** de A, se designa como A^{-1}, es aquella que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

  Si una matriz tiene inversa se denomina ***regular o inversible***, en caso contrario, se llama ***singular***.

- **Teorema**: Una matriz A posee inversa $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$$\text{A tiene inversa} \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Leftrightarrow \left|A^{-1}\right| \cdot |A| = 1 \Leftrightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} \text{ si } |A| \neq 0$$

- **Propiedades de la matriz inversa**

  1.- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad \forall A,B \in M_n$ cuadradas y regulares

  2.- $(A^{-1})^{-1} = A$

  3.- Si una matriz A tiene inversa, ésta es única.

5.1. Cálculo de la inversa de una matriz por determinantes

- ***Definición***: Llamamos ***matriz adjunta*** de A, se denota por Adj A, como la matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de la matriz A. Es decir:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$, siendo A_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A

- **Teorema**: Dada la matriz $A \in M_n$ tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$. En tal caso, se verifica:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)^t$$

Ejemplos

1. Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow |A| = 8 - 6 = 2 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow |A| = 15 - 2 = 13$

Calculamos los elementos de la matriz adjunta:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -2 \\ 0 & 13 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \quad A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -9 & 13 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5.2. Cálculo de la matriz inversa empleando el método de Gauss

1º. Construir una matriz del tipo M = (A | I), es decir, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.

2º. Utilizando el método Gauss vamos a transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}.

Ejemplos

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determinar su inversa.

Construimos la matriz $M = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \underline{F1 = \tfrac{1}{2}F1} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \underline{F2 = F2 - F1} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to \underline{F1 = F1 - 3F2} \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to \underline{F2 = 2F2} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, determinar su inversa.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \underline{F2 = 3F1 - 2F2} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \underline{F1 = \tfrac{1}{2}F1} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -10 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \underline{F2 = \tfrac{-1}{10}F2} \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{10} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \to \underline{F1 = F1 + 2F2} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{10} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

EJERCICIOS

1. Cálculo de determinantes de orden 2 y 3

1.1. Calcula el valor de los determinantes de estas matrices:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Solución: a) -31 ; b) 0 ; c) 1 ; d) -12 ; e) 19 ; f) 30 ; g) -10

1.2. Calcular el valor de los siguientes determinantes, aplicando la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Solución: a) 11 ; b)0 ; c) 11 ; d) 0 ; e) 12 ; f) 3

2. Propiedades de los determinantes

2.1. Calcular el determinante de la matriz traspuesta de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $|A| = -1$, calcula aplicando las propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 3c & 3d \\ -2a & -2b \end{vmatrix}$

Solución: a) 1 ; b) -1 ; c) 2 ; d) 1 ; e) 6

2.3. Si $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, utilizar las propiedades de los determinantes para hallar razonadamente:

a) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -2d & 2e & 2f \\ -g & h & i \end{vmatrix}$ b) $|2A^t|$ c) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & d & 3g \\ b & e & 3h \\ c & f & 3i \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} b & 3a & c \\ h & 3g & i \\ 2e & 6d & 2f \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a & b-2a & a-c \\ d & e-2d & d-f \\ g & h-2g & g-i \end{vmatrix}$

Solución: a) -8 ; b) 32 ; c) 4 ; d) 12 ; e) -4 ; f) 8 ; g) 24 ; h) 16 ; i) -4

2.4. Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(*Ayuda*: Multiplica por abc la 1ª columna del 1º determinante)

2.5. Si el valor del determinante de la matriz A es 5 calcular razonadamente el determinante de la matriz B:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 5 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

Solución: $|B| = 40$

2.6. Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante vale 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

(*Ayuda*: Propiedad 7: $C_3 = C_2 + C_3$)

2.7. Justifica sin desarrollar que los determinantes son nulos:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$

2.8. Aplicando propiedades de los determinantes, comprueba que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ b) $\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)^3$

2.9. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprueba si se verifican las siguientes igualdades. Si alguna se verifica, decide si se trata de alguna propiedad general de los determinantes. En caso contrario, busca un ejemplo que no lo cumpla:

a) $|2\cdot A| = 2\cdot|A|$ b) $|A+B| = |A|+|B|$ c) $|C-2\cdot B| = |C|-2\cdot|B|$ d) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

3. Cálculo de determinantes de orden superior a 3

3.1. Calcular por el método de Gauss (i.e., haciendo ceros bajo la diagonal) los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Solución: a) 8 ; b) 0 ; c) -72 ; d) -2 ; e) 2

3.2. Calcular por el método de Laplace:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solución: a) 41 ; b) -8 ; c) 3 ; d) 34 ; e) 0

3.3. Calcular por el método más conveniente (preferentemente por **Laplace**, haciendo ceros previamente):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Solución: a) -92 ; b) 12 ; c) -55 ; d) 1 ; e) -5

3.4. Hallar el valor de a que hace que la matriz sea singular, es decir, |A| = 0.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & a & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -10 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{vmatrix}$

Solución: a) $a = \pm 1$; b) $a = \pm 1, a = 0$; c) a = 6; d) a = -2

3.5. Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Solución: a) 4a + 1 ; b) -abc ; c) $(a + 1)^3$

4. Rango de una matriz

4.1. Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 24 & 3 & 19 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ h) $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i) $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: rg(A) = 2, rg(B) = 1, rg(C) = 2, rg(D) = 3, rg(E) = 2, rg(F) = 2, rg(G) = 3, rg(H) = 4, rg(I) = 2

4.2. ¿Para qué valor de m el rango de la matrices 2?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & m \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ -1 & 2m & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución: a) m = -2 ; b) m = -1; c) $m = \pm 1$; d) m = 0, m = 1/2

4.3. Calcular el rango de cada matriz según los valores de los parámetros:

a) $\begin{pmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -x & 2 \\ 1 & -1 & -1 & x-1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ -1 & 2x & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 2x & x \\ 0 & x & 3x \end{pmatrix}$

Solución: a) rg A = 2 si x = 2, x = 6; b) rg A = 2 si x = 2; c) rg A = 2 si $x = 0, x = 1/2$; d) rg A = 2 si a = -1, e) rg A = 1 si x = 0, rg A = 2 si x = 3/5

4.4. Calcular el rango de cada matriz según los valores de los parámetros:

a) $\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & b \\ 1 & a+1 & 0 & 2b \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{pmatrix}$

Solución: a) rg A = 2 b = 0 (a = 0,a = -1); b) rg A = 0 $a = b = 0$; rg A = 2 a = b ≠ 0, $b = -2a \neq 0$; c) rg A = 1 si a = 0, b = 2, rg A = 2 si a = 0 $b \neq 2$, $a \neq 0$, $b = 2$

5. Inversa de una matriz

5.1. Calcular la matriz inversa cuando exista de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

5.2. Calcular la matriz inversa cuando exista de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 12 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; No tiene inversa; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5.3. Determinar para qué valores del parámetro **a** existe la inversa de la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) a ≠ 5, b) a ≠ 1, a ≠ 3 ; c) Siempre ; d) a ≠ 1 ; e) a ≠ 0

6. Ecuaciones matriciales

6.1. Hallar la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *Solución*: $\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

6.2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; hallar una matriz X tal que $A \cdot X + B = A$

Solución: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6.3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *Solución*: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6.4. Resolver la siguiente ecuación matricial X · A = B + C, donde:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *Solución*: $\begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

7. Repaso

PAU.7.1 . Dado el número real *a* se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de *a* para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Busque, si es posible, la matriz inversa de A en el caso *a* = 0.

PAU.7.2.. Dados los números reales *a, b, c, x,* se consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} x & b & c-4 \\ a & x & 3 \\ b & c & x \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de *a, b, c, x,* para los cuales A es antisimétrica. (A es antisimétrica si $A^t = -A$).

b) Si *a* = *b* = *c* = 1*,* halle el rango de A según los valores de x.

c) Si *a* = *b* = *c* = 0*,* resuelva la ecuación $|A + A^t| = 0$.

PAU.7.3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si es posible, la matriz inversa de la matriz A.

b) Resuelva, si es posible, la ecuación matricial X · A = B.

PAU.7.4. Se considera la matriz: A = $\begin{pmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Obtenga los valores del número real *a* para los que A tiene matriz inversa.

b) Halle, si es posible, la matriz inversa de A en el caso *a* = 0.

PAU.7.5. Dado el número real *a* se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de de *a* para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Obtenga la matriz inversa de A en los casos en que exista.

PAU.7.6. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial A · X = B

PAU.7.7. Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Halle, si existe, la matriz inversa de M.

b) Calcule la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$.

PAU.7.8. Sea consideran las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix} \quad y \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Según los valores de $a \in \mathbb{R}$, estudie el rango de *P*.

b) Para el caso *a* = 1, halle *X* tal que P · X = Q.