ECUACIONES BICUADRADAS

Definición

Las **ecuaciones bicuadradas** son de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, siendo a, b y c nº reales.

- **Ejemplos:**

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad ; \quad x^4 - 4x^2 = 0 \quad ; \quad x^4 + 4 = 0 \quad ; \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Resolución:

Sea la ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ [1]

Para resolverla basta fijarse que equivale a una ecuación de 2º grado, pero siendo la variable x^2.

Para reducirnos a una ecuación de segundo grado, realizamos el cambio de variable: $t = x^2$

Si $t = x^2$, entonces $t^2 = (x^2)^2 = x^4$, quedando la ecuación [1] de la siguiente forma:

$$at^2 + bt + c = 0 \quad [2]$$

Una vez resuelta esta ecuación de variable t, deshacemos el cambio realizado para hallar las raíces de la ecuación [1]:

Sean t_1 y t_2 las soluciones de la ecuación [2]:

Sean t_1 y t_2 las soluciones de la ecuación [2]: $\left[\begin{array}{l} x^2 = t_1 \rightarrow x = \pm\sqrt{t_1} \text{ , si } t_1 \geq 0 \\ x^2 = t_2 \rightarrow x = \pm\sqrt{t_2} \text{ , si } t_2 \geq 0 \end{array}\right.$

- **Ejemplos:**

1. *Consideremos la ecuación $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$*
   - Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

     Si $z = x^2$, entonces $z^2 = x^4 \rightarrow z^2 - 3z - 4 = 0 \rightarrow z = 4 \,;\, z = -1$
   - Una vez resuelta la ecuación de 2º grado, se deshace el cambio:
     - Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$
     - Si $z = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución

2. *Consideremos la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$*
   - Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

     Si $z = x^2$, entonces $z^2 = x^4 \rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0 \rightarrow z = 4 \,;\, z = 9$
   - Una vez resuelta la ecuación de 2º grado, se deshace el cambio:
     - Si $z = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$
     - Si $z = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Nº de soluciones:

- Cuatro soluciones si la ecuación cuadrática asociada tiene dos soluciones positivas.
- Dos soluciones si la ecuación cuadrática asociada tiene sólo una solución positiva.
- Ninguna si la ecuación cuadrática asociada tiene dos soluciones negativas ó no tiene solución.

- **Ejemplos:**

3. *Consideremos la ecuación $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$*
   - Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

     Si $z = x^2$, entonces $z^2 = x^4 \rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \rightarrow (z-1)^2 = 0 \rightarrow z = 1$

   - Una vez resuelta la ecuación de 2º grado, se deshace el cambio:

     $z = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

4. *Consideremos la ecuación $x^4 + x^2 + 3 = 0$*
   - Mediante la sustitución $z = x^2$, la ecuación se transforma en una de 2º grado:

     Si $z = x^2$, entonces $z^2 = x^4 \rightarrow z^2 + z + 3 = 0 \rightarrow$ No tiene solución
   - Con lo cual, la ecuación bicuadrada tampoco tiene solución

5. *Consideremos la ecuación $x^4 + x^2 = 0$*
   - Extraemos factor común x^2 : $x^2 (x^2 + 1) = 0$
   - $x^2 (x^2 + 1) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

     $\rightarrow x^2 + 1 = 0$, no tiene solución.