

# **APUNTES DE FÍSICA**

## **2º BACHILLERATO**

**José Escudero Martínez**

**Licenciado en Ciencias Físicas**

## INTRODUCCIÓN

Estos apuntes responden a los contenidos exigidos para la prueba de Física de acceso a la universidad (PAU) en Andalucía. En ningún caso pretenden ser un libro de texto pero sí una guía que facilite a los alumnos un seguimiento adecuado de la asignatura de Física de 2º de Bachillerato sin necesidad de tener que tomar sus propios apuntes, ahorrando con ello un tiempo considerable en la exposición de la materia en clase y permitiendo la realización de un mayor número de ejemplos y ejercicios en el aula.

Por otra parte, estos apuntes, que han sido posibles gracias a mi antiguo, que no viejo, compañero de universidad y amigo, Juan Carlos Rodríguez Herola, y son reflejo de nuestra experiencia en la docencia de esta materia a lo largo de los años. Hay diferentes formas de estructurar los contenidos de la materia y, en mi caso, he decidido que sea la que se sintetiza en el índice de temas que se indican en la página siguiente y que paso a describir brevemente.

Los temas 0, 1 y 2 pretenden ser un repaso de los contenidos que sobre “Dinámica, Trabajo y Energía” se estudiaron en 1º de Bachillerato, pero con una mayor rigurosidad que entonces, ya que el alumno dispone de las herramientas matemáticas adecuadas, como el cálculo diferencial e integral.

El tema 3 se dedica íntegramente al estudio conjunto de la interacción gravitatoria y electrostática, incluyendo el campo gravitatorio terrestre y el movimiento de satélites. Considero que es adecuado estudiar ambos campos simultáneamente para simplificar el proceso de aprendizaje del alumno, y que este pueda ir viendo las analogías y diferencias entre ambas interacciones.

Los temas 4 y 5 conforman el bloque “Interacción electromagnética”. El tema 4 se dedica al estudio del campo magnético y al tema 5 al estudio de la inducción electromagnética, fenómeno que es la base de la llamada síntesis electromagnética.

Los temas 6 y 7 conforman el bloque “Vibraciones y ondas”, estando el primero dedicado al estudio del movimiento vibratorio armónico simple y el segundo al movimiento ondulatorio, en general, y a las ondas armónicas, en particular, a sus propiedades y a las ondas electromagnéticas.

Los temas 8 y 9 están dedicados a la “Física Moderna”: el tema 8 a la dualidad onda-partícula y el tema 9 a la física nuclear.

Finalmente el tema 10 se dedica a una breve iniciación a la óptica geométrica en lo referente a la formación de imágenes en sistemas ópticos.

La temporalización es relativa ya que depende de varios factores, pero considero que sería apropiado dedicar el primer trimestre al desarrollo de los temas 0, 1, 2 y 3, el segundo trimestre a los temas 4, 5, 6 y 7, y el tercer trimestre a los temas 8, 9 y 10.

Por último desear que estos apuntes sean de gran ayuda para todos aquellos alumnos que los utilicen.

## ÍNDICE DE TEMAS

0. Operaciones con vectores.
1. Dinámica de la partícula o punto material.
2. Trabajo y energía. Fuerzas conservativas y no conservativas.
3. Campo gravitatorio y campo eléctrico.
4. Campo electromagnético.
5. Inducción electromagnética.
6. Movimiento vibratorio armónico simple.
7. Movimiento ondulatorio.
8. Dualidad onda-partícula.
9. Física nuclear.
10. Óptica geométrica.

## **TEMA 0. OPERACIONES CON VECTORES**

- 1. Magnitudes físicas y su clasificación.**
- 2. Operaciones geométricas con magnitudes vectoriales:**
  - 2.1 Suma y resta geométrica de vectores.**
  - 2.2 Definición geométrica de producto de un escalar por un vector.**
  - 2.3 Definición geométrica del producto escalar de dos vectores.**
  - 2.4 Definición geométrica del producto vectorial de dos vectores.**
- 3. Coordenadas cartesianas o componentes de un vector: expresión analítica de un vector.**
- 4. Operaciones analíticas con magnitudes vectoriales:**
  - 4.1 Suma y resta analítica de vectores.**
  - 4.2 Definición analítica de producto de un escalar por un vector.**
  - 4.3 Definición analítica del producto escalar de dos vectores.**
  - 4.4 Definición geométrica del producto vectorial de dos vectores.**
  - 4.5 Derivada de un vector.**
- 5. Vectores unitarios.**

## 1. MAGNITUDES FÍSICAS Y SU CLASIFICACIÓN

Una magnitud física es una propiedad de los cuerpos que se puede medir, es decir, que se puede expresar mediante una cantidad y su correspondiente unidad.

Una primera clasificación de las magnitudes físicas es:

- Magnitudes físicas fundamentales
- Magnitudes físicas derivadas.

Recuerda que las primeras se definen sin hacer uso de ninguna otra magnitud y que las segundas utilizan para su definición a una o varias de las primeras. La elección de las magnitudes fundamentales es arbitraria pero, el número de magnitudes fundamentales elegidas debe ser el mínimo que se necesite para definir coherentemente y con precisión a todas las demás (por esto se llaman derivadas).

Tanto las magnitudes físicas fundamentales como las derivadas se agrupan en sistemas de unidades. En la tabla siguiente se recogen las magnitudes fundamentales y sus unidades en el Sistema Internacional de Unidades (SI):

| <b>MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y SUS UNIDADES EN EL SI</b> |                         |                |
|---------------------------------------------------------|-------------------------|----------------|
| <b>MAGNITUD</b>                                         | <b>UNIDAD DE MEDIDA</b> | <b>SÍMBOLO</b> |
| <i>Longitud</i>                                         | <i>metro</i>            | <i>m</i>       |
| <i>Masa</i>                                             | <i>kilogramo</i>        | <i>Kg</i>      |
| <i>Tiempo</i>                                           | <i>segundo</i>          | <i>s</i>       |
| <i>Temperatura</i>                                      | <i>grado Kelvin</i>     | <i>K</i>       |
| <i>Intensidad de corriente eléctrica</i>                | <i>amperio</i>          | <i>A</i>       |
| <i>Intensidad luminosa</i>                              | <i>candela</i>          | <i>Cd</i>      |
| <i>Cantidad de materia</i>                              | <i>mol</i>              | <i>mol</i>     |
| <b>UNIDADES COMPLEMENTARIAS DEL SI</b>                  |                         |                |
| <i>Ángulo plano</i>                                     | <i>radián</i>           | <i>rad</i>     |
| <i>Ángulo sólido</i>                                    | <i>estereoradian</i>    | <i>sr</i>      |

Recuerda que la medida de cualquier magnitud física en una unidad la puedes cambiar a otra unidad equivalente y que el método más recomendable es el llamado “método de las fracciones unitarias”.

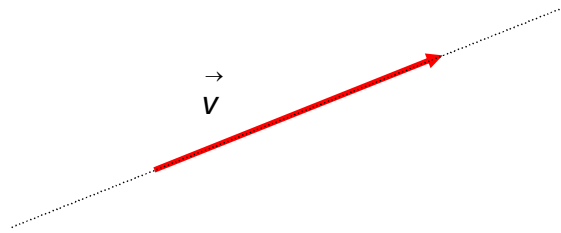
Desde otro punto de vista las magnitudes físicas se clasifican en:

- Magnitudes físicas escalares.
- Magnitudes físicas vectoriales

Recuerda que una magnitud física se dice que es escalar cuando queda perfectamente determinada mediante una cantidad y su correspondiente unidad. Este es el caso de la masa, temperatura, superficie, volumen, densidad, trabajo, etc.

Sin embargo para que una magnitud física vectorial quede perfectamente determinada no basta con dar la cantidad y su unidad, es necesario saber la dirección y el sentido (algunas veces también el punto de aplicación). Es el caso de la posición, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento, etc.

Las magnitudes físicas vectoriales se representan gráficamente mediante una flecha, denominada **VECTOR**, y se escribe simbólicamente con la letra que simboliza a la magnitud física con una flecha encima. Por ejemplo el vector velocidad sería:



En una magnitud física hemos de hablar de las siguientes características:

**DIRECCIÓN:** Es la recta que contiene al vector o que es paralela al vector.

**SENTIDO:** Es el extremo del vector.

**MÓDULO:** Es el valor numérico de la magnitud física y es directamente proporcional la longitud del vector. Se representa por:

$$|\vec{v}|$$

### EJEMPLO 1º

Indica la dirección sentido y módulo de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

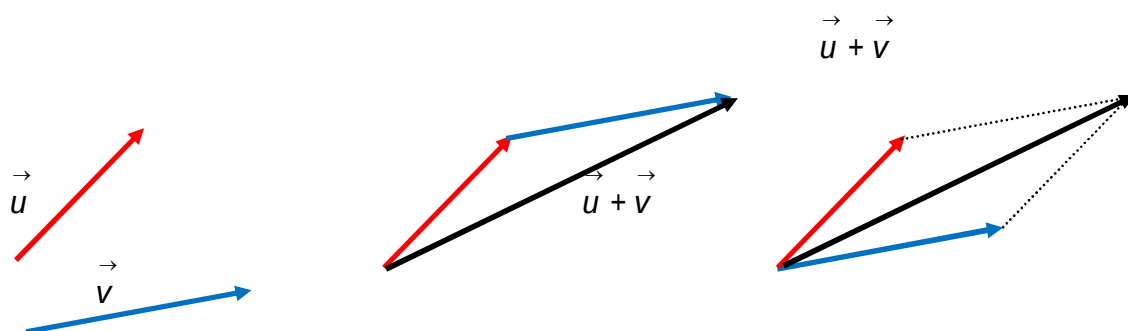
- Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
- Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
- Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
- Aceleración de la gravedad terrestre.
- Objeto que desciende a 5 m/s.
- Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.
- Tu peso.
- Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45° con la horizontal.
- Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45° con la horizontal a 100 m/s.

## 2.- OPERACIONES GEOMÉTRICAS CON MAGNITUDES VECTORIALES.

Para operar con magnitudes escalares basta con manejar las cantidades y las unidades coherentes, pero para operar con magnitudes vectoriales no sólo hay que tener en cuenta la cantidad (módulo), hay que tener también en cuenta la dirección y el sentido. Recordemos las operaciones con vectores vistas los cursos anteriores y ampliemos a alguna más.

### 2.1 Suma y resta geométrica de vectores

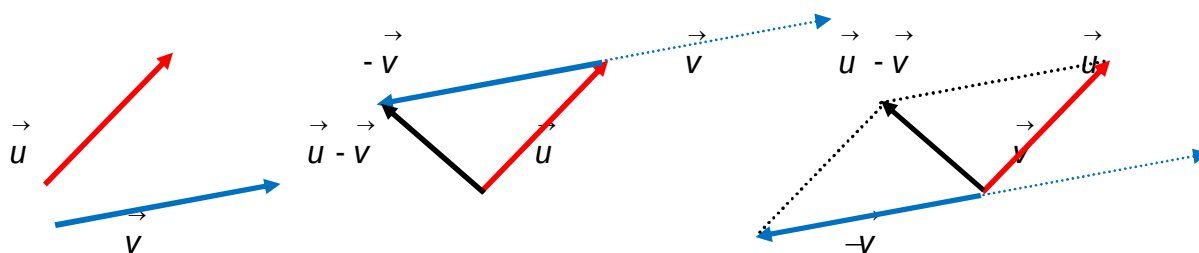
Para sumar geoméricamente dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , se sitúa uno de ellos a continuación del otro, y se une el origen del primero con el extremo del último:



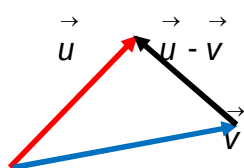
Puedes observar que cuando los vectores que sumas no tienen la misma dirección, su suma coincide con la diagonal del paralelogramo que forman  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

Para restar geoméricamente dos vectores  $\vec{u} - \vec{v}$ , se le suma a  $\vec{u}$  el opuesto de  $\vec{v}$  y se procede a realizar la suma como se ha explicado.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Observa como en este caso el vector  $\vec{u} - \vec{v}$ , es el vector que une el extremo del segundo con el extremo del primero.



## 2.2 Definición geométrica de producto de un escalar por un vector

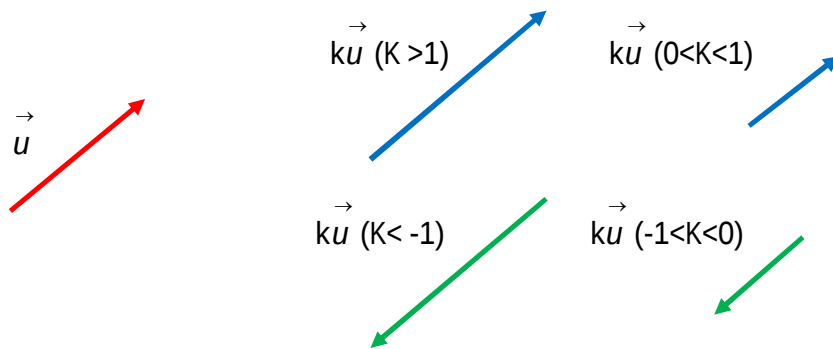
Se llama producto de un escalar por un vector, al producto de un nº real  $k$ , por un vector  $\vec{u}$ .

Se representa por  $k\vec{u}$ , y el resultado es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

Dirección: la misma que  $\vec{u}$ .

Sentido: el mismo que  $\vec{u}$ , si el escalar es positivo y, contrario a  $\vec{u}$ , si el escalar es negativo.

Módulo: el valor absoluto del escalar por el módulo de  $\vec{u}$ :  $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$



### 2.3 Definición geométrica de producto escalar de dos vectores.

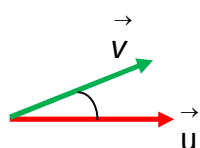
El producto escalar de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , que se representa por  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , es un escalar que se obtiene de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

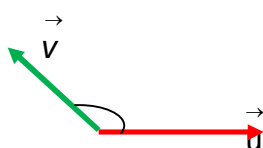
**COMENTARIOS:** De la definición geométrica del producto escalar podemos deducir lo siguiente:

1º.- El producto escalar de dos vectores puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del valor del coseno del ángulo que forman:

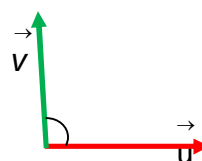
- o Si el ángulo que forman los vectores es agudo (coseno +), el producto escalar es positivo, si el ángulo es obtuso (coseno -), el producto escalar es negativo.
- o Si los vectores son perpendiculares, el producto escalar es 0, puesto que  $\cos 90^\circ = 0$ . Esta propiedad sirve como **CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS VECTORES**.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

2º.- Si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de sus coordenadas:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

3º.- Si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos la expresión:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

De modo que si conocemos el módulo de los dos vectores y el valor de su producto escalar, podemos conocer el ángulo que forman dichos vectores.

## 2.4 Definición geométrica de producto vectorial de dos vectores.

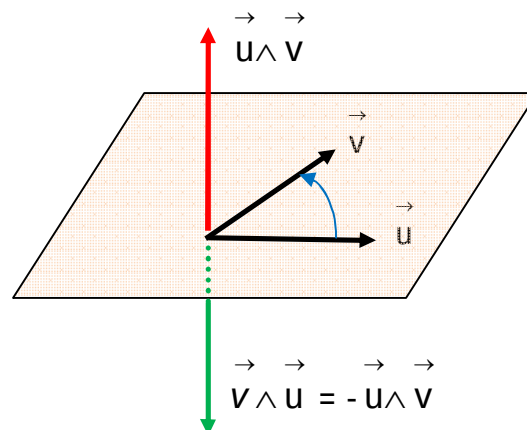
El producto vectorial de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , que se representa por  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  o bien por  $\vec{u} \times \vec{v}$ , es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

**Módulo:** es el producto del módulo de los vectores que se multiplican por el seno del ángulo que forman ambos vectores

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

**Dirección:** perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , es decir, perpendicular al plano que determinan  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

**Sentido:** el de avance de un tornillo al girar el primer vector hacia el segundo por el camino más corto.



### COMENTARIOS:

De la definición geométrica del producto vectorial podemos deducir lo siguiente:

1º.- Si los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tienen la misma dirección (paralelos o antiparalelos), su producto vectorial es nulo, ya que los vectores formarían entre sí un ángulo de  $0^\circ$  o  $180^\circ$ , y en ambos casos el seno vale 0.

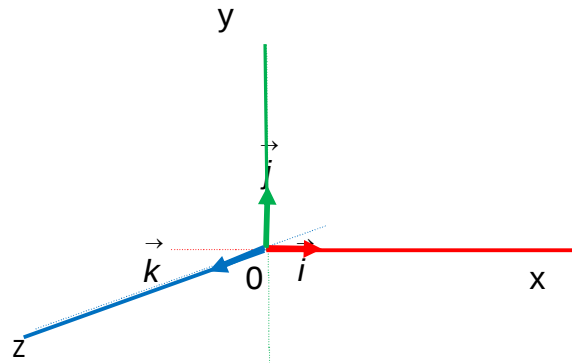
2º.- Si los vectores son perpendiculares su producto vectorial es máximo, ya que los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  formarían  $90^\circ$  y su seno vale 1.

3º.- El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo, como puede verse en el dibujo:

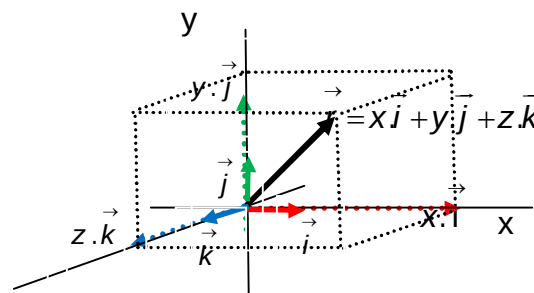
$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

### 3.- COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES DE UN VECTOR

El **sistema de coordenadas cartesiano** está formado por tres rectas perpendiculares entre sí, llamados **ejes de coordenadas cartesianos**, que se cortan en un punto O que es el origen de coordenadas. Los tres ejes son el “**eje x**”, el “**eje y**” y el “**eje z**”.



Si en cada uno de los ejes se define un vector unitario (de modo la unidad) y de sentido positivo (son los vectores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$ ), cualquier vector  $\vec{r}$  del espacio puede expresarse como una combinación lineal de los vectores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$ . Como puede verse en el siguiente dibujo:



A la expresión:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{ó} \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

se le denomina **EXPRESIÓN ANALÍTICA O EXPRESIÓN VECTORIAL DEL VECTOR  $\vec{r}$** .

A los escalares  $x, y, z$  se les denomina **COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES CARTESIANAS DEL VECTOR  $\vec{r}$** .

**COMENTARIOS:**

1º.- Cuando la dirección del vector es paralela a uno de los tres ejes de coordenadas, entonces el vector tiene sólo una coordenada distinta de cero: aquella que corresponde al eje respecto al cual es paralelo. Además, la coordenada no nula será positiva si el sentido del vector coincide con el sentido positivo del eje y negativa si es al contrario.

Por ejemplo, si un coche se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:

$$\begin{array}{c} \vec{v} \\ \text{→} \end{array}$$

$$\boxed{\vec{v} = 10 \vec{i} \text{ m/s} = 10 \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k} \text{ m/s} = (10, 0, 0) \text{ m/s}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Dirección: horizontal} \\ \text{Sentido: derecha} \\ \text{Módulo: 10 m/s} \end{array} \right.$$

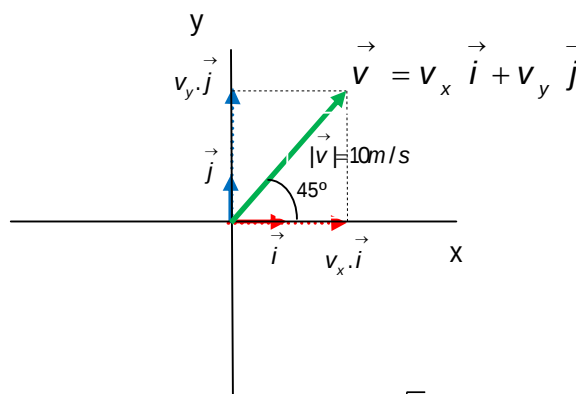
Si el coche se mueve ahora hacia la izquierda con la misma velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:

$$\begin{array}{c} \vec{v} \\ \text{←} \end{array}$$

$$\boxed{\vec{v} = -10 \vec{i} \text{ m/s} = -10 \vec{i} + 0 \vec{j} + 0 \vec{k} \text{ m/s} = (-10, 0, 0) \text{ m/s}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Dirección: horizontal} \\ \text{Sentido: izquierda} \\ \text{Módulo: 10 m/s} \end{array} \right.$$

2º.- Si el vector está contenido en el plano XY y su dirección no coincide con ninguno de los dos ejes, entonces el vector tendrá las dos primeras componentes distintas de cero y la tercera igual a cero.

Por ejemplo, supongamos que se dispara un proyectil con una velocidad de 100 m/s formando un ángulo de 45° con la parte positiva de eje x. Escribe la expresión analítica del vector velocidad.



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = |\vec{v}| \cdot \cos 45^\circ = 100 \cos 45^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \\ v_y = |\vec{v}| \cdot \sin 45^\circ = 100 \sin 45^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = 50\sqrt{2} \vec{i} + 50\sqrt{2} \vec{j} \text{ m/s}$$

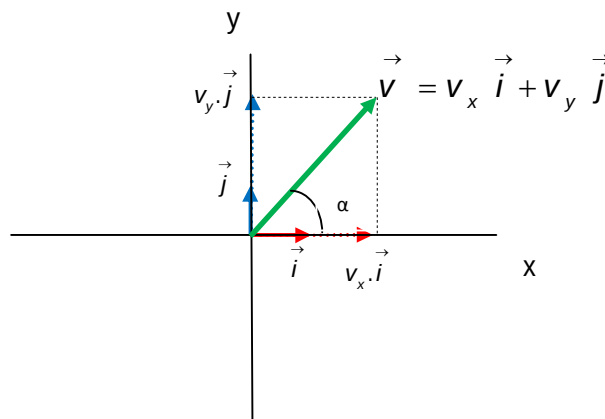
$$\vec{v} = 50\sqrt{2}\vec{i} + 50\sqrt{2}\vec{j} \text{ m/s} = 50\sqrt{2}\vec{i} + 50\sqrt{2}\vec{j} + 0\vec{k} \text{ m/s}$$

Observa como las dos coordenadas son positivas ya que el vector está orientado en el primer cuadrante.

La forma general de calcular las coordenadas de un vector en el plano XY, aplicando la trigonometría es:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \\ v_y = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Siendo  $\alpha$  el ángulo que forma el semieje positivo de las x con el vector. El signo del seno y el coseno de este ángulo te proporcionará el signo de las coordenadas del vector.



3º.- Si el vector está contenido en los planos XZ ó YZ, siempre haba una coordenada nula: la coordenada “y” en el primer caso, y la coordenada “x” en el segundo.

4º.- Cuando el vector no coincida con ninguno de los ejes, ni con los planos XY, XZ ó YZ, entonces las tres coordenadas del vector serán distintas de cero.

## EJEMPLO 2º

Indica la expresión analítica de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

- Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
- Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
- Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
- Aceleración de la gravedad terrestre.
- Objeto que desciende a 5 m/s.
- Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.

- g) Tu peso.
- h) Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45° con la horizontal.
- i) Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45° con el semieje horizontal positivo a 100 m/s.
- j) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia S.
- k) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NE.
- l) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia SE.
- m) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NNO.

#### 4.- OPERACIONES CON VECTORES EN FORMA ANALÍTICA

Supongamos dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  expresados en forma analítica:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

##### 4.1 Suma y resta analítica de vectores

Se define la suma analítica de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , como es vector que se obtiene de sumar las coordenadas semejantes:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) = (u_x + v_x) \vec{i} + (u_y + v_y) \vec{j} + (u_z + v_z) \vec{k}$$

Se define la resta analítica de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , como es vector que se obtiene de restar a las coordenadas del primero, las coordenadas semejantes del segundo:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) - (v_x, v_y, v_z) = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z) = (u_x - v_x) \vec{i} + (u_y - v_y) \vec{j} + (u_z - v_z) \vec{k}$$

##### 4.2 Producto de un escalar por un vector en forma analítica

Se define el producto de un escalar  $k$  por un vector  $\vec{u}$ , como el vector que se obtiene de multiplicar cada una de sus coordenadas por el escalar:

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (u_x, u_y, u_z) = (k u_x, k u_y, k u_z) = k u_x \vec{i} + k u_y \vec{j} + k u_z \vec{k}$$

##### 4.3 Producto escalar de dos vectores en forma analítica

El producto escalar de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , escrito en forma analítica es un escalar que se obtiene de multiplicar las coordenadas semejantes de ambos vectores y sumar los resultados:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \cdot (v_x, v_y, v_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

### COMENTARIOS

1º.- Recuerda que el 2º comentario de la definición geométrica del producto escalar nos decía que si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de sus coordenadas:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

Obtenemos que el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus coordenadas.

2º.- Recuerda igualmente que, según el tercer comentario, si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos una expresión que nos permitía conocer el coseno del ángulo que forman los vectores y, a partir de él, calcular el ángulo que forman los vectores:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica y también el módulo de los vectores, queda la expresión:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

De modo que si conocemos las coordenadas de los vectores, podemos conocer el ángulo que forman.

#### 4.4 Producto vectorial de dos vectores en forma analítica

La expresión analítica del vector que resulta de un producto vectorial entre dos vectores se obtiene del siguiente modo:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

#### 4.5 Derivada de un vector en forma analítica

La derivada de un vector es otro vector que se obtiene de derivar cada una de sus coordenadas y se escribe:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \Rightarrow \vec{v}' = v'_x \vec{i} + v'_y \vec{j} + v'_z \vec{k}$$

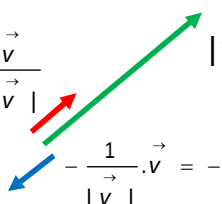
### 5. VECTORES UNITARIOS

Un vector es unitario cuando su módulo vale la unidad.

Si un vector  $\vec{v}$  no es unitario, podemos hallar dos vectores unitarios de la misma dirección que él: uno en el mismo sentido y otro en sentido contrario.

Para ello basta con multiplicar al vector  $\vec{v}$  por la inversa de su módulo o cambiar de signo dicho producto, respectivamente.

$$\text{Si } |\vec{v}| \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{ó} \quad -\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \text{ tienen de módulo la unidad}$$

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad |\vec{v}| \neq 1$$


$$-\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

**EJEMPLO 3º**

Dados los vectores  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$        $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  Calcula:

- La suma:  $\vec{u} + \vec{v}$
- La resta:  $\vec{u} - \vec{v}$
- El producto del escalar 3 por el vector  $\vec{u}$  :  $3 \cdot \vec{u}$
- El producto escalar de ambos vectores:  $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- El módulo de cada uno de los vectores:  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$
- El ángulo que forman ambos vectores.
- El producto vectorial de ambos vectores:  $\vec{u} \wedge \vec{v}$
- Vector unitario de la misma dirección y sentido que  $\vec{u}$  . Comprueba que es unitario.
- Vector unitario de la misma dirección y sentido contrario que  $\vec{u}$  . Comprueba que es unitario.

**EJEMPLO 4º**

Responde a los mismos apartados del ejercicio anterior con los vectores:

$$\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

**EJEMPLO 5º**

Comprueba el valor de los siguientes productos escalares entre los vectores unitarios:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} \quad \vec{i} \cdot \vec{k} \quad \vec{j} \cdot \vec{j} \quad \vec{j} \cdot \vec{k} \quad \vec{k} \cdot \vec{k}$$

- Aplicando la definición geométrica.
- Aplicando la definición analítica.

Soluc: 1, 0, 0, 1, 0 y 1

**EJEMPLO 6º**

Comprueba los siguientes productos vectoriales:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{j} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{i} \quad \vec{j} \wedge \vec{j} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} \quad \vec{k} \wedge \vec{k}$$

- Aplicando la definición geométrica.
- Aplicando la definición analítica.

Soluc:  $\vec{0}$ ,  $\vec{k}$ ,  $-\vec{j}$ ,  $-\vec{k}$ ,  $\vec{0}$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $-\vec{i}$ ,  $\vec{0}$

## **TEMA 1. DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL**

- 1. Introducción.**
- 2. Movimiento, trayectoria, espacio recorrido, vector de posición y vector desplazamiento.**
- 3. Vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea.**
- 4. Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleración normal o centrípeta y aceleración instantánea.**
- 5. Clasificación de los movimientos.**
- 6. MRU.**
- 7. MRUA.**
- 8. MCU.**
- 9. Composición de movimientos: movimiento parabólico.**
- 10. Cantidad de movimiento o momento lineal.**
- 11. Las Leyes de la Dinámica ó Leyes de Newton.**
- 12. La fuerza de rozamiento.**
- 13. Fuerza centrípeta.**

## 1. INTRODUCCIÓN

En física se denomina **punto material o partícula** a aquel objeto que tiene masa pero que no tiene dimensiones. En realidad, cuando la física considera a un cuerpo como un punto material, no es que carezca de volumen sino que este no ha de ser tenido en cuenta para el fenómeno que se está estudiando.

## 2. MOVIMIENTO, TRAYECTORIA, ESPACIO RECORRIDO, VECTOR DE POSICIÓN Y VECTOR DESPLAZAMIENTO

Se denomina **movimiento** al cambio de posición de un cuerpo respecto a un punto que se toma como referencia, denominado sistema de referencia. De la definición se deduce claramente que el movimiento es un concepto relativo, es decir, un mismo objeto puede estar en movimiento respecto a un sistema de referencia y al mismo tiempo estar en reposo respecto a otro sistema de referencia diferente.

En movimiento, se denomina **trayectoria** a la línea imaginaria que une las sucesivas posiciones por las que va pasando un cuerpo. Esta puede ser rectilínea, curvilínea (circular, elíptica, parabólica, etc.) o una sucesión de ambas.

En un movimiento, se denomina **espacio recorrido** a la longitud de la trayectoria.

Se denomina **vector de posición** de una partícula, respecto a un sistema de referencia, al vector que va desde el origen del sistema de referencia a la posición que ocupa la partícula. Se representa por  $\vec{r}$ .

El vector de posición de una partícula que se mueve respecto a un sistema de referencia será función del tiempo (sólo será constante cuando la partícula esté en reposo respecto a dicho sistema) y por eso podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

El módulo del vector de posición nos indicará a qué distancia estará la partícula del sistema de referencia en cada instante.

Llamamos **ecuaciones cartesianas del vector de posición** a las expresiones analíticas de sus componentes  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , que corresponden con tres ecuaciones escalares.

En general serán tres las ecuaciones cartesianas de la posición, pero si la partícula se mueve solamente a lo largo de uno de los ejes de coordenadas entonces la única coordenada distinta de 0 del vector de posición será la de ese eje, pudiendo prescindir de las otras dos coordenadas ya que serían nulas, y por tanto, habrá una sola ecuación cartesiana de la posición.

Se llama **vector desplazamiento** entre dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$ , a la diferencia entre los vectores de posición en el instante final  $t_2$ , y el vector de posición en el instante inicial  $t_1$ . Se representa por  $\vec{\Delta r}$  y se calcula:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Teniendo en cuenta la definición geométrica de la resta entre dos vectores, puede observarse que el vector desplazamiento coincide gráficamente con el vector que va desde la posición inicial a la posición ocupada en el instante final (figura 1.1).

El módulo del vector desplazamiento nos indicará la distancia que separa en línea recta las dos posiciones ocupadas por la partícula. En general, esta distancia será menor que el espacio recorrido. El módulo del vector desplazamiento sólo coincidirá con el espacio recorrido cuando la trayectoria sea rectilínea y no se invierta el sentido del movimiento.

En la gráfica siguiente se puede observar los vectores de posición de una partícula, respecto a un sistema de referencia, en dos instantes de tiempo diferentes, la trayectoria y el vector desplazamiento entre esos dos mismos instantes:

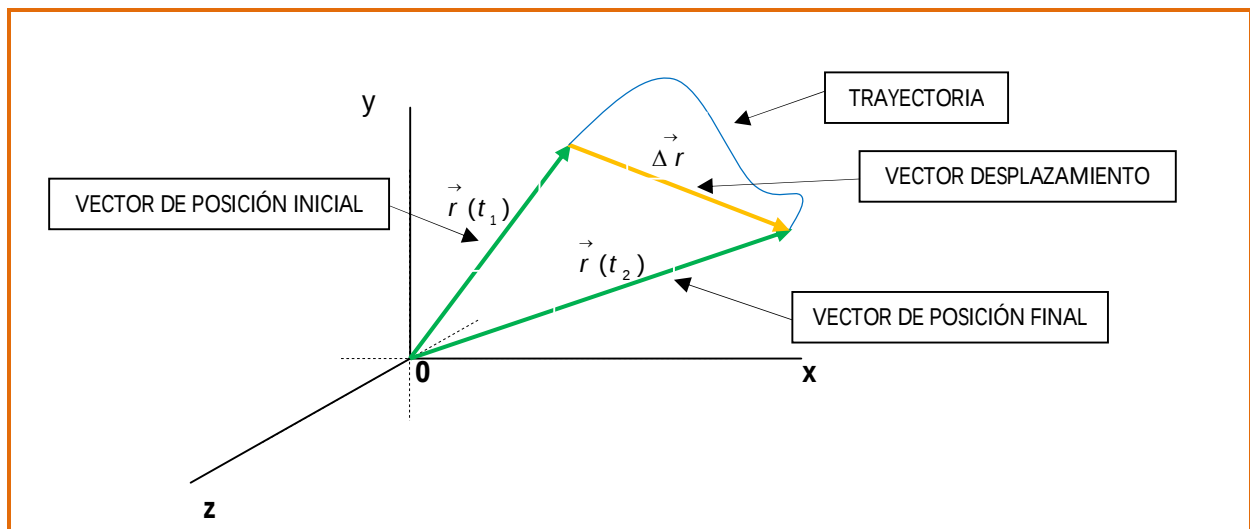


Figura 1.1  
Vector de posición, vector desplazamiento y trayectoria

### 3. VECTORES VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

**El vector velocidad instantánea** es el vector que indica la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo. Es un vector tangente a la trayectoria en cada punto de ella y de sentido el del movimiento. Se calcula derivando respecto al tiempo el vector de posición instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

**El vector aceleración instantánea** es el vector que indica la aceleración de la partícula en cualquier instante de tiempo. Se calcula derivando respecto al tiempo el vector de posición instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t) &= v'_x(t)\vec{i} + v'_y(t)\vec{j} + v'_z(t)\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k} = \\ &= a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k} \end{aligned}$$

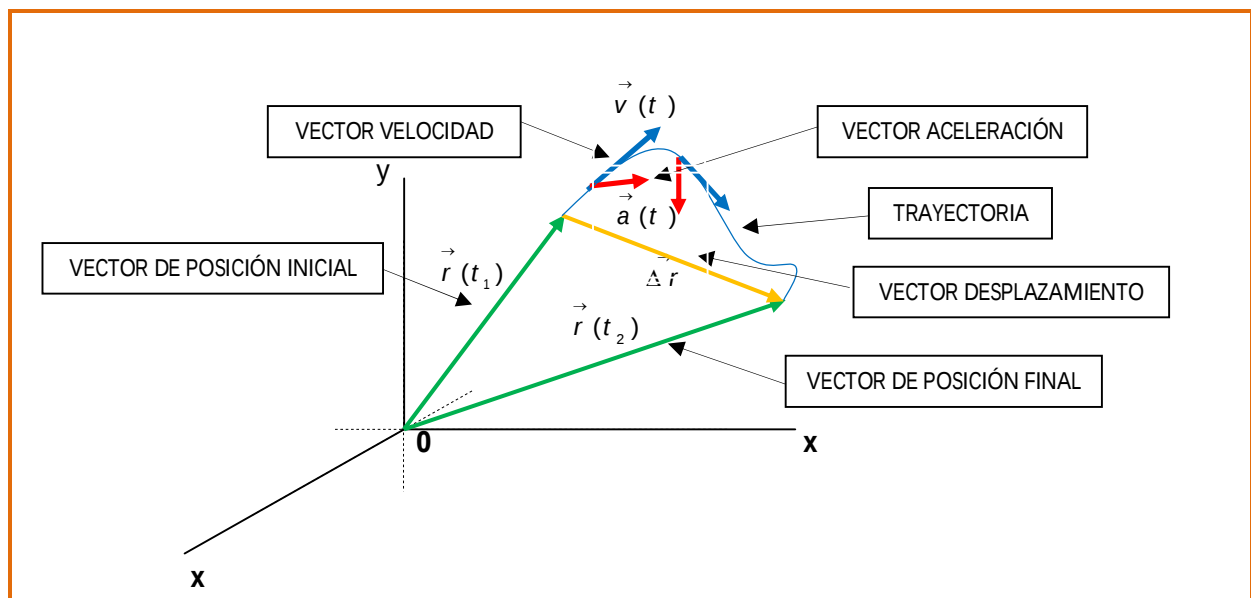


Figura 1.2  
Vectores velocidad y aceleración instantáneos

#### 4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN: ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA Y ACELERACIÓN TANGENCIAL

El vector aceleración mide los cambios en el vector velocidad por unidad de tiempo. Por tanto si el vector velocidad no se modifica a lo largo del tiempo, la aceleración vale 0.

Pero la velocidad es un vector y por tanto se caracteriza por tener módulo, dirección y sentido. Esto quiere decir que basta que una sola de estas características se modifique para que podamos afirmar que la velocidad no es constante.

En los movimientos rectilíneos la dirección de la velocidad no varía. El módulo puede que sí o puede que no.

En los movimientos curvilíneos la dirección y el sentido de la velocidad está cambiando continuamente. El módulo puede que sí o puede que no.

Por tanto en los movimientos rectilíneos habrá aceleración si cambia el módulo de la velocidad mientras que en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración cambie o no el módulo de la velocidad.

En un movimiento en el que hay aceleración siempre es posible descomponer al vector aceleración en dos componentes, llamadas **componentes intrínsecas de la aceleración**:

- una componente tangente a la trayectoria llamada **aceleración tangencial**.
- Y una componente perpendicular a la trayectoria llamada **aceleración normal o centrípeta**.

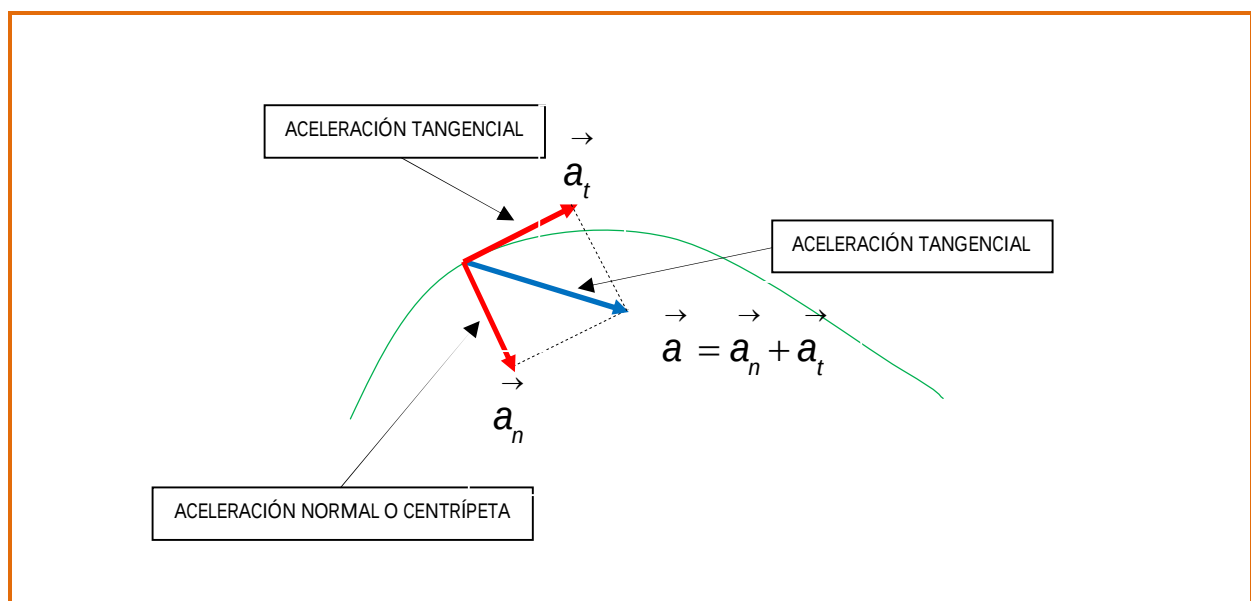


Figura 1.3  
Componentes intrínsecas de la aceleración

La aceleración tangencial mide los cambios en el módulo de la velocidad mientras que la aceleración normal o centrípeta mide los cambios en la dirección (y por tanto también en el sentido) de la velocidad.

Por tanto, en los movimientos rectilíneos nunca habrá aceleración normal o centrípeta. Si en un movimiento rectilíneo hay aceleración será tangencial.

Sin embargo en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración normal o centrípeta ya que siempre hay cambios en la dirección de la velocidad. En estos movimientos, si el módulo de la velocidad cambia, también habrá aceleración tangencial.

Las características de las componentes intrínsecas de la aceleración son:

#### ACELERACIÓN TANGENCIAL:

MÓDULO:  $\boxed{|\vec{a}_t| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \text{ o simplemente } a_t = \frac{dv}{dt}}$

DIRECCIÓN: tangente a la trayectoria.

SENTIDO: el del movimiento si la velocidad aumenta o contrario al movimiento si la velocidad disminuye.

#### ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA:

MÓDULO:  $\boxed{|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \text{ o simplemente } a_n = a_c = \frac{v^2}{R}}$

DIRECCIÓN: perpendicular a la trayectoria.

SENTIDO: hacia el centro de la trayectoria.

#### RELACIÓN ENTRE LA ACCELERACIÓN Y SUS COMPONENTES INTRÍNSECAS:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t}$$

MÓDULO:  $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_c|^2 + |\vec{a}_t|^2}}$

**EJEMPLO 1º**

El vector de posición instantáneo de una partícula que se mueve por el espacio, en unidades del SI, es:

$$\vec{r}(t) = (t^2 - t)\vec{i} + (4 - 2t)\vec{j} + t^3\vec{k}$$

Para dicha partícula calcula:

- a) La posición inicial.
- b) La posición a los 3 s.
- c) La distancia a la que se encuentra la partícula a los 5 s.
- d) El vector desplazamiento entre los instantes 3 y 5 s.
- e) El vector velocidad instantánea.
- f) La velocidad inicial.
- g) El módulo de la velocidad a los 2 s.
- h) El vector aceleración instantánea.
- i) El módulo de la aceleración a los 10 s.

**EJERCICIO 1º**

Las coordenadas cartesianas del vector de posición de una partícula que se mueve por el plano XY vienen dadas por las siguientes expresiones, en unidades del SI:

$$\begin{cases} x(t) = -t^2 + 2 \\ y(t) = 3t - 2 \end{cases}$$

Para dicha partícula responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

**EJEMPLO 2º**

La posición instantánea de una partícula que se mueve a lo largo del eje de abscisas viene dada por la expresión:

$$x(t) = t^2 - 6t + 1$$

en unidades SI. Calcular:

- a) La velocidad y la aceleración con la que se mueve el cuerpo en cualquier instante.
- b) La posición inicial y la velocidad inicial.
- c) La posición y la velocidad a los 4s.
- d) ¿Ha cambiado el sentido del movimiento? ¿Por qué?
- e) ¿Se anula la velocidad en algún momento? ¿Cuándo?
- f) Calcula el espacio recorrido en los 5 primeros segundos?

**EJERCICIO 2º**

La posición de un punto material que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo según la expresión:

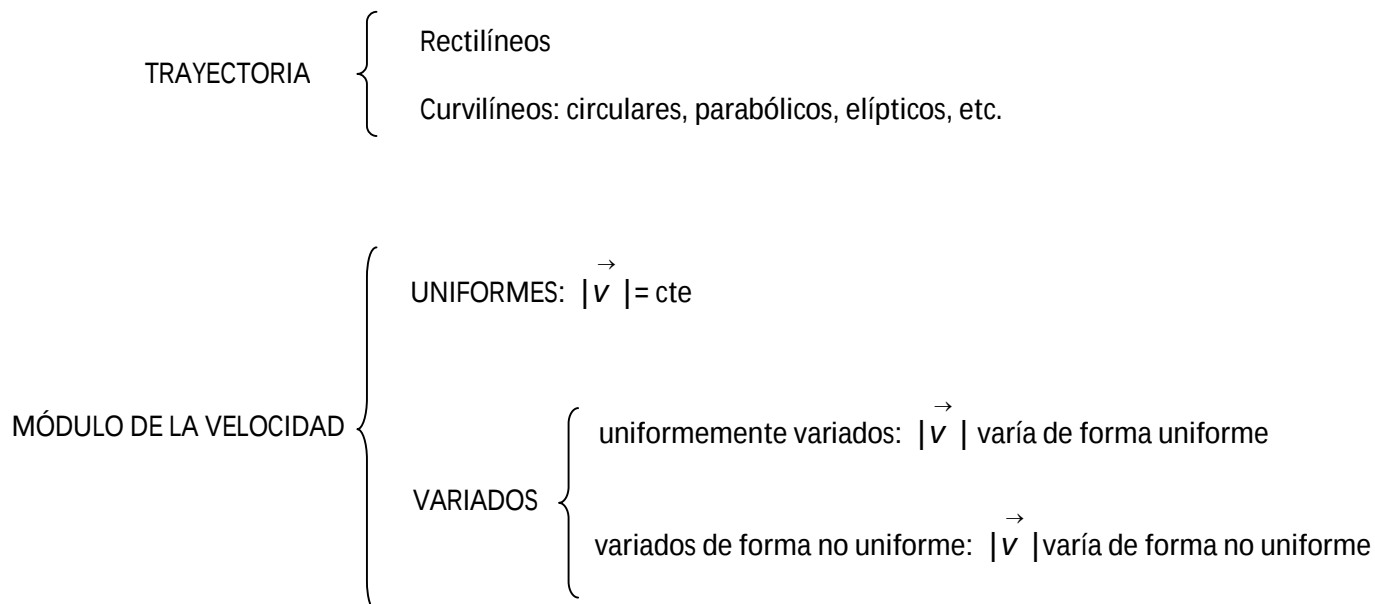
$$x(t) = 4t^2 - 3t + 11$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

SOLUC: a)  $v(t) = 8t - 3$  m/s   a(t) =  $8$  m/s<sup>2</sup>   b)  $x_0 = 11$  m    $v_0 = -3$  m/s   c)  $x(t=4s) = 63$  m    $v(t=4s) = 29$  m/s   d) sí   e) si a  $t = 3/8$  s   f)  $e = 86,125$  m

## 5. CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS

Los movimientos se clasifican atendiendo a dos puntos de vista: según la trayectoria y según el módulo de la velocidad.



## 6. MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME (MRU)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad constante, es decir, el vector velocidad es constante y, por tanto, no hay aceleración.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRU sería:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_y \cdot t \\ z(t) = z_0 + v_z \cdot t \end{cases}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

que es la ecuación que conoces de los cursos anteriores.

El espacio recorrido por el móvil en un tiempo t puede calcularse como:  $e = v \cdot t$

## 7. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACCELERADO (MRUA)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad varía de forma uniforme, es decir, sólo tiene aceleración tangencial y es constante.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRUA sería:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z} \cdot t + \frac{1}{2} a_z \cdot t^2 \end{cases}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

La ecuación paramétrica de la velocidad es:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

El espacio recorrido en un tiempo t, cuando no se invierte el sentido del movimiento, se calcula:

$$e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

que son las ecuaciones que conoces de los cursos anteriores.

Aunque aún te será más familiar la que corresponde a un MRUA en la dirección vertical, el eje y, cuya ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

y en concreto cuando se trata de un **movimiento de caída libre**, es decir, con la sola presencia de la fuerza de la gravedad (sin rozamiento con el aire), donde siempre conocemos el valor de la aceleración, a, que es la aceleración de la gravedad. Como recordarás se simboliza por la letra g y en el caso de movimientos de caída libre en las proximidades de la superficie de la tierra vale  $-9,8 \text{ m/s}^2$ . La ecuación paramétrica de la posición o ecuación del movimiento de caída libre en las proximidades de la tierra sería:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = y_0 + v_0 \cdot t - 5t^2$$

Recordarás también la siguiente ecuación en la que no aparece el tiempo:  $v^2 = v_0^2 + 2ae$

esta ecuación algunas veces presenta problemas cuando despejamos la v y/o  $v_0$  en movimientos con aceleración negativa.

**EJEMPLO 3º**

Dos atletas están separados 200 m y corren a su encuentro con velocidades respectivas de 8 y 10 m/s. Calcula:

- a) Las ecuaciones del movimiento de ambos corredores.
- b) El punto de encuentro y el instante en que lo harán.
- c) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta ese momento.

**EJEMPLO 4º**

Un coche inicialmente en reposo persigue a una moto que se encuentra 50 m por delante de él. La moto circula a velocidad constante de 20 m/s mientras que el coche acelera uniformemente a  $4 \text{ m/s}^2$ . Calcula:

- a) Las ecuaciones del movimiento de ambos vehículos.
- b) ¿Dónde y cuándo se encontrarán?
- c) El espacio recorrido por cada vehículo hasta ese momento y contado desde el instante en que comenzó a moverse el coche.

**EJEMPLO 5º**

Desde la terraza de un edificio de 80 m se lanza hacia abajo a un objeto con una velocidad de 5 m/s. Simultáneamente se lanza desde el suelo otro objeto con una velocidad de 30 m/s. Hallar:

- a) Las ecuaciones del movimiento de cada objeto.
- b) ¿Dónde y cuándo se cruzarán?
- c) El segundo cuerpo ¿estará subiendo o bajando?. ¿Por qué?
- d) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta el momento del encuentro.

**EJERCICIO 3º**

Desde dos pueblos A y B separados por una distancia de 10 Km, salen al encuentro dos automóviles con velocidades de 72 Km/h y 108 Km/h. Calcular:

- a) Las ecuaciones de movimiento de ambos automóviles.
- b) El tiempo que tardan en cruzarse.
- c) La distancia a la que están ambos automóviles del pueblo A en ese momento.
- d) El espacio que ha recorrido cada coche hasta ese momento.

SOLUC: b) 200 s c) 4000 m d) 4000 m y 6000 m respectivamente

**EJERCICIO 4º**

Desde una ventana a 15 m del suelo, se deja caer un cuaderno. Al mismo tiempo, desde el suelo se lanza un lápiz con una velocidad inicial de 12 m/s. Hallar:

- a) La ecuación del movimiento de cada objeto.
- b) ¿Dónde y cuándo se cruzan?

SOLUC: a)  $y_1 = 15 - 4,9t^2$   $y_2 = 12t - 4,9t^2$  b) A los 1,25 s y a 7,3 m del suelo

## 8. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Es un movimiento con trayectoria circular y módulo de velocidad constante. No tiene, por tanto, aceleración tangencial pero sí tiene aceleración normal o centrípeta. En la figura siguiente pueden verse los vectores velocidad y aceleración en diferentes puntos de la trayectoria:

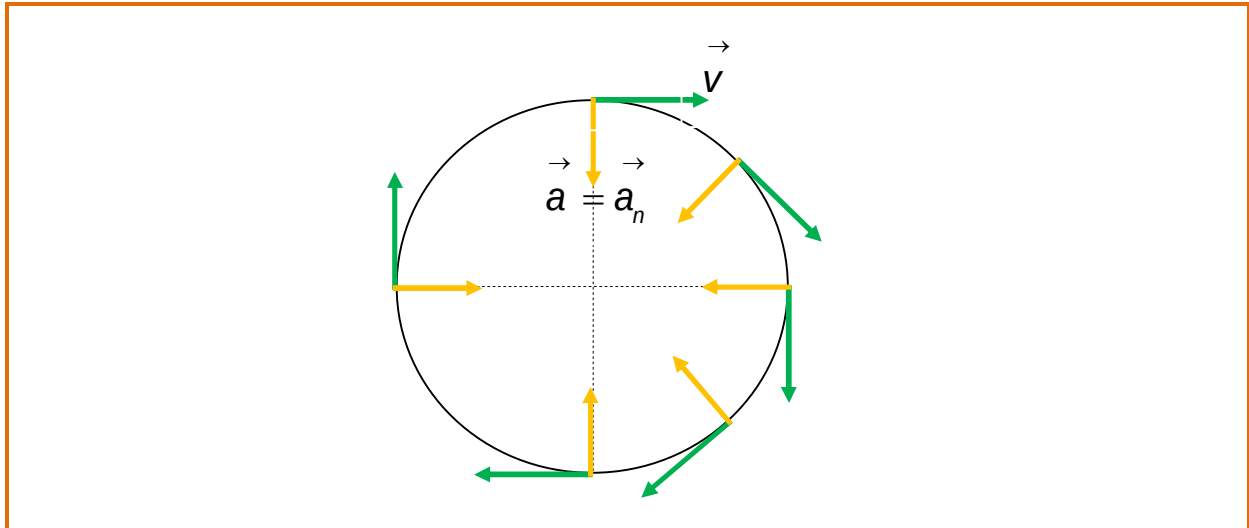


Figura 1.4  
Vectores velocidad y aceleración en un MCU

Observa en la figura que el módulo del vector velocidad es el mismo en cualquier punto de la trayectoria. Observa igualmente que el módulo de la aceleración normal o centrípeta también es igual en cualquier punto de la trayectoria.

$$|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \text{ o simplemente } a_n = a_c = \frac{v^2}{R}$$

Como el módulo de la velocidad es constante, el tiempo que emplea la partícula en describir una vuelta completa siempre es el mismo. A este tiempo se llama **periodo** del MCU y se representa por la letra  $T$  y en el SI de unidades se mide en s.

En un MCU se denomina **frecuencia** al nº de vueltas descritas por unidad de tiempo. Se representa por la letra  $f$ , coincide con la inversa del periodo y en el SI de unidades se mide en vueltas/s = ciclos/s = rps (revoluciones/s). A esta unidad se denomina hercio (Hz).

$$f = \frac{1}{T}$$

Se denomina velocidad angular al ángulo descrito por unidad de tiempo. Se representa por la letra  $\omega$ , se calcula dividiendo el ángulo descrito entre el tiempo empleado en describirlo y en el SI de unidades se mide en rad/s.

$$\omega = \frac{\text{ángulo descrito}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

La relación que existe entre los módulos de la velocidad lineal  $v$  y de la velocidad angular  $\omega$  es:  $v = \omega \cdot R$  siendo  $R$  el radio de la trayectoria circular.

**EJEMPLO 6º**

La polea de un motor gira con m.c.u. a razón de 240 rpm (revoluciones por minuto). Hallar:

- a) La frecuencia, a velocidad angular y el periodo.
- b) La aceleración centrípeta del movimiento de la polea si su radio es de 20 cm.

SOLUC: a) 4 Hz 25,12 rad/s y 0,25 s    b) 3155 m/s<sup>2</sup>

**EJERCICIO 5º**

Un tocadiscos gira a 33 rpm. Calcula:

- a) La velocidad angular y el ángulo descrito a los 3 s.
- b) Si el radio es de 10cm y una mosca se encuentra en el borde del disco calcula la velocidad lineal de la mosca.
- c) La distancia recorrida por la mosca a los 3s.

SOLUC: a) 3,454 rad/s y 10,362 rad    b) 0,34 m/s    c) 1 m

**EJERCICIO 6º**

La velocidad angular de una rueda es de 6,28 rad/s. Hallar:

- a) la frecuencia, el periodo.
- b) La velocidad lineal (v) y la aceleración normal de un punto de la periferia de la rueda. El radio de giro es de 50 cm.

SOLUC: a) 2 Hz y 0,5 s    b) 3,14 m/s y 19,72 m/s<sup>2</sup>

**EJERCICIO 7º**

Un ciclista recorre una trayectoria circular de 5 m de radio con una velocidad de 54 Km/h. Calcular:

- a) La aceleración del ciclista.
- b) La velocidad angular
- c) El tiempo que tarda en completar cada vuelta

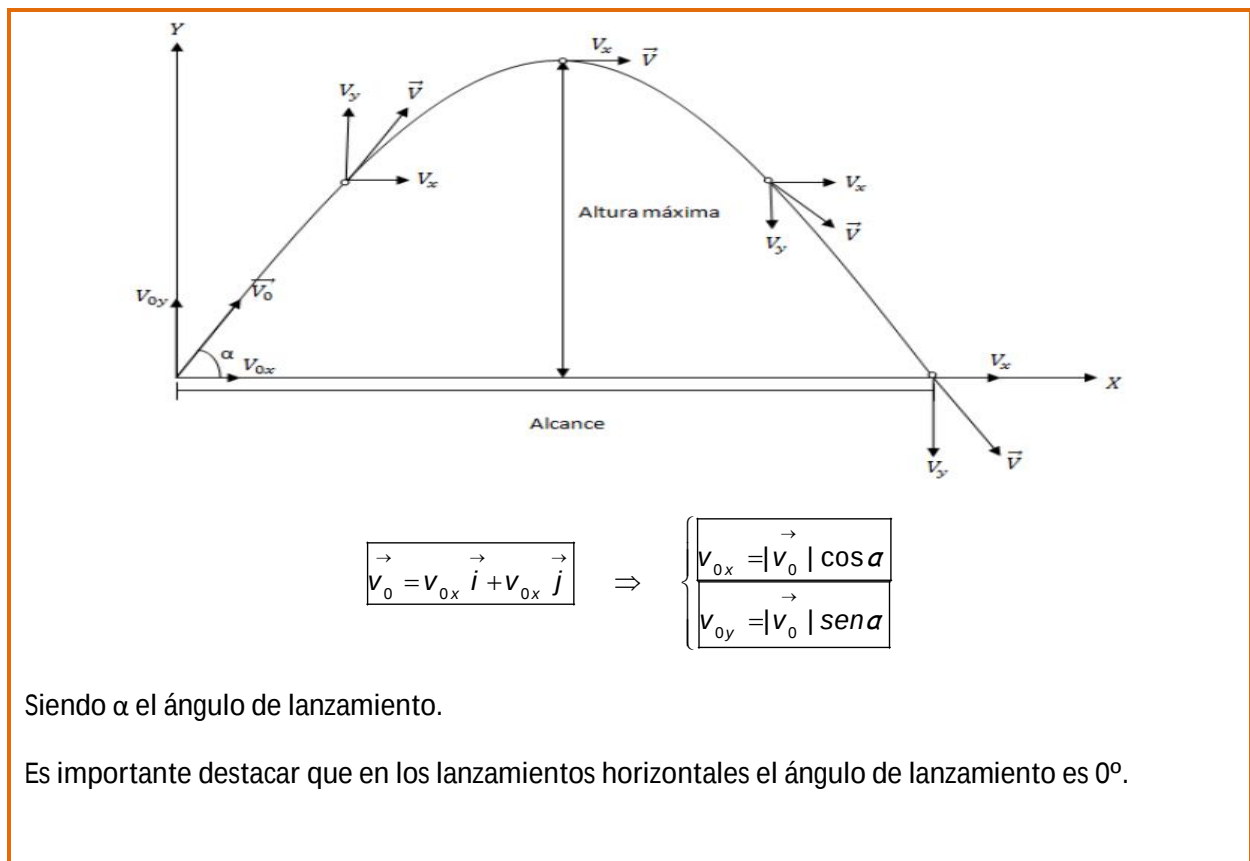
SOLUC: a) 45 m/s<sup>2</sup>    b) 3 rad/s    c) 2 s

## 9. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS: MOVIMIENTO PARABÓLICO

Se dice que una partícula describe un movimiento compuesto cuando la partícula se encuentra sometida a dos o más movimiento simultáneos. Un ejemplo de este fenómeno se produce cuando una barca en un río se ve sometida a dos movimientos simultáneos: el movimiento impulsado por el barquero al remar y el de arrastre de la corriente del agua del río.

Otro ejemplo de movimiento compuesto es el que tienen los cuerpos cuando son lanzados en la superficie de la tierra en una dirección distinta a la vertical. El cuerpo se ve sometido a dos movimientos: un MRU de avance en la dirección horizontal y un MRU de caída libre como consecuencia de la acción de la fuerza gravitatoria (de su propio peso). El resultado de estos dos movimientos es un movimiento parabólico.

En la siguiente figura se representa al vector velocidad y a sus componentes horizontal y vertical e diferentes puntos de la trayectoria para una partícula lanzada desde el origen de coordenadas:



Siendo  $\alpha$  el ángulo de lanzamiento.

Es importante destacar que en los lanzamientos horizontales el ángulo de lanzamiento es  $0^\circ$ .

Figura 1.5  
Vector velocidad y sus componente en un movimiento parabólico

En la figura anterior puede observarse como la componente horizontal de la velocidad permanece constante (MRU) mientras que la componente vertical de la velocidad va variando, siendo positiva mientras el cuerpo asciende, haciéndose 0 en el punto más alto de la trayectoria y siendo negativa mientras desciende.

Las ecuaciones del movimiento ó posición y de la velocidad son las siguientes:

**ECUACIONES DE LA POSICIÓN**

$$\vec{r}(t) = x \vec{i} + y \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t = x + |\vec{v}_0| \cos \alpha \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 = y_0 + |\vec{v}_0| \operatorname{sen} \alpha \cdot t - 5 t^2 \end{cases}$$

**ECUACIONES DE LA VELOCIDAD**

$$\vec{v}(t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos \alpha \\ v_y = v_{0y} + g t = |\vec{v}_0| \operatorname{sen} \alpha - 10 t \end{cases}$$

### EJEMPLO 7º

Una persona lanza una pelota desde una plataforma situada a 1,7 m del suelo con una velocidad de 6 m/s y un ángulo de disparo de 53º. Calcular:

- Las ecuaciones de la posición y de la velocidad.
- El tiempo de vuelo.
- La velocidad con la que llega al suelo.
- El alcance.
- La altura máxima a la que llega la pelota.

### EJERCICIO 8º

Un proyectil es lanzado desde un acantilado de 150 m de altura con una velocidad inicial de 400 m/s y un ángulo de inclinación de 30º. Calcular:

- Las componentes de la velocidad inicial
- El tiempo que tarde en caer al suelo.
- El alcance.
- La altura máxima alcanzada.

SOLUC: a)  $v_{0x} = 346,4 \text{ m/s}$   $v_{0y} = 200 \text{ m/s}$  b) 41,5 s c) 14,4 km d) 2191 m

### EJERCICIO 9º

Un chico lanza piedras horizontalmente desde lo alto de un acantilado de 25 m de altura. Si desea que choquen contra un islote que se encuentra a 30 m de la base del acantilado, calcula:

- La velocidad con la que debe lanzar las piedras.
- El tiempo que tardan las piedras en llegar al islote.

SOLUC: a) 13,3 m/s b) 2,2 s

## 10. MOMENTO LINEAL O CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Se llama momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$ , al producto de la masa de su masa por su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

### COMENTARIOS:

1º.- Es una magnitud vectorial por que se obtiene del producto de un escalar, la masa, por un vector, la velocidad.

2º.- Tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad:



3º.- El módulo de la cantidad de movimiento es el producto de la masa por el módulo de la velocidad:

$$|\vec{p}| = m |\vec{v}| \quad \text{ó simplemente} \quad p = mv$$

4º.- En el sistema internacional de unidades se mide en kg.m/s.

## 11. LAS LEYES DE NEWTON

La Mecánica clásica se basa en tres leyes o principios que fueron enunciados por el científico inglés Isaac Newton (1642-1727). Estas tres leyes del movimiento se recogen en una de sus obras más importantes: el libro titulado “Principios matemáticos de la filosofía natural (1687)”.

Realmente podrían reducirse a sólo dos leyes, ya que la segunda incluye a la primera. Sin embargo así es como él las presentó, es más fácil para comprenderlas y además la primera realmente fue propuesta por Galileo Galilei (1564-1642) un gran hombre del renacimiento nacido en Pisa.

### 11.1 PRIMERA LEY DE NEWTON, PRIMER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO DE INERCIA

*“Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza ó si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo vale cero, entonces la partícula estará en reposo o moviéndose con velocidad constante, es decir, con MRU.”*

#### COMENTARIOS

1º.- Según este principio, las fuerzas no son las causantes del movimiento de los cuerpos ya que, un cuerpo puede estar moviéndose con MRU y sin embargo la resultante de las fuerzas vale 0.

2º.- Este principio también dice que en ausencia de fuerzas los cuerpos carecen de aceleración, es decir, no cambian su velocidad, o sea, no cambian su estado de reposo o de movimiento inicial en el que estaban. Como la inercia se define como la resistencia u oposición que presenta un cuerpo a cambiar su estado de reposo o de movimiento, es por esta razón por la que también se denomina principio de inercia.

3º.- Cuando sobre un cuerpo no actúan fuerzas o la resultante de todas las que actúan vale 0 se dice que el cuerpo está en equilibrio. Por tanto, tanto un cuerpo en reposo como con MRU, se encuentran en equilibrio. En el primer caso se habla de equilibrio estático, mientras que en el segundo caso se habla de equilibrio dinámico.

4º.- El reposo y el MRU son dos situaciones equivalentes desde el punto de vista dinámico porque en ambos hay ausencia de fuerzas.

## 11.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON, SEGUNDO PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA

“La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula coincide con el producto de su masa por su aceleración”.

$$\vec{F}_{RTE.} = m \vec{a}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = m \vec{a}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

### COMENTARIOS:

1º.- La primera Ley de Newton es un caso particular de la segunda:

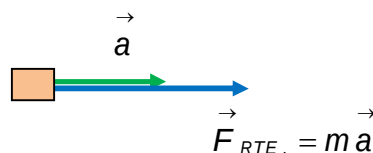
$$\text{Si } \vec{F}_{RTE.} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{RTE.} = m \vec{a} = 0 \Rightarrow m \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = cte \Rightarrow \text{reposo } \text{ ó } MRU$$

2º.- La unidad de fuerza es la unidad de masa por la unidad de aceleración que, en el SI de unidades, es  $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ . A esta unidad se le conoce con el nombre de Newton.

$$\text{Kg } \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{NEWTON (N)}$$

Un Newton es la fuerza que aplicada a un cuerpo de 1 Kg le proporciona una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$ .

3º.- La fuerza resultante que actúa sobre una partícula y la aceleración dicha partícula son vectores de la misma dirección y sentido ya que, la fuerza se obtiene del producto de un escalar positivo, la masa  $m$ , por un vector, la aceleración  $\vec{a}$ .



4º.- La ecuación  $\vec{F}_{RTE.} = m \vec{a}$  es una ley física que nos dice que las fuerzas son las causantes de las aceleraciones de los cuerpos, es decir, las fuerzas son las causantes de los cambios en la velocidad de los cuerpos, o sea, de los cambios en el movimiento de los cuerpos. Por tanto, la expresión  $\vec{F}_{RTE.} = m \vec{a}$  es una relación causa-efecto: la causa son las fuerzas y el efecto es la aceleración.

5º.- Esta Ley también nos permite interpretar físicamente a la masa, no como cantidad de materia, sino como una medida de la inercia de los cuerpos, es decir, como una medida de la resistencia u oposición que presentan los cuerpos a los cambios en su movimiento. En efecto, si aplicamos dos fuerzas iguales a dos cuerpos de diferente masa, la aceleración que adquiere cada uno de ellos sería:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m} \quad y \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{M}$$

El cuerpo de menor masa presenta mayor aceleración, es decir, cambia más rápidamente su velocidad y, por tanto, presenta menor inercia. Al contrario que el de mayor masa.

### 11.3 TERCERA LEY DE NEWTON, TERCER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

*“Si un cuerpo A ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo B, este ejerce sobre el A otra fuerza (reacción) igual pero de sentido contrario”.*

#### COMENTARIOS:

1º.- Este principio afirma que las fuerzas siempre aparecen por parejas, el par acción-reacción, y son fuerzas de la misma dirección, de igual módulo pero de sentido contrario.

2º.- Según el comentario anterior podría pensarse que el par de fuerzas acción-reacción se anula entre sí. Sin embargo esto no es cierto puesto que están aplicadas a cuerpos diferentes.

3º.- Las fuerzas de acción y reacción son simultáneas, es decir, no hay separación temporal entre ellas.

4º.- Este principio afirma que las fuerzas son siempre acciones mutuas entre cuerpos y, por esta razón, a las fuerzas también se les conoce con el nombre de interacciones.

## 12. LA FUERZA DE ROZAMIENTO

La fuerza de rozamiento es una fuerza que disipa energía en forma de calor. Suele decirse que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento. Aunque esto es cierto, no es menos cierto que también permite otros movimientos. En efecto, sin la fuerza de rozamiento no podríamos andar, ni escribir, las ruedas de los vehículos no podrían avanzar, etc.

La fuerza de rozamiento puede ser **estática o dinámica**, también llamada **cinética**. La fuerza de rozamiento estática es la que actúa mientras el cuerpo está en reposo sobre la superficie y puede tener valores comprendidos entre 0 y un valor máximo. Cuando la fuerza aplicada supera este valor máximo el cuerpo inicia el movimiento sobre la superficie y entonces aparece la fuerza de rozamiento dinámica o cinética.

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estática vale:

$$|\vec{F}_{roz.est.máx.}| = \mu_e \cdot |\vec{N}| \quad \text{ó bien} \quad F_{roz.est.máx.} = \mu_e \cdot N$$

Siendo:

$\mu_e$  una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina coeficiente de rozamiento estático.

$\vec{N}$  es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

El módulo de esta fuerza representa el valor mínimo que debe de tener una fuerza paralela a la superficie para que al aplicarla sobre el cuerpo en reposo, este inicie su movimiento.

El valor de la fuerza de rozamiento dinámica o cinética es:

$$|\vec{F}_{roz.din.}| = |\vec{F}_{roz.cin.}| = \mu_d \cdot |\vec{N}| = \mu_c \cdot |\vec{N}| \quad \text{ó bien} \quad F_{roz.din.} = F_{roz.cin.} = \mu_d \cdot N = \mu_c \cdot N$$

Siendo:

$\mu_e = \mu_c$  una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina coeficiente de rozamiento dinámico o cinético.

$\vec{N}$  es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

### COMENTARIOS

1º.- Ambos coeficientes de rozamiento son adimensionales, es decir, carecen de unidades puesto que se obtienen dividiendo el módulo de dos fuerzas.

2º.- El coeficiente de rozamiento estático es ligeramente mayor que el dinámico ó cinético. Esto significa que se necesita aplicar más fuerza a un cuerpo en reposo para que inicie su movimiento que, una vez en movimiento, mantenga su velocidad constante:

$$\mu_e > \mu_c \Rightarrow F_{roz.est.máx.} > F_{roz.cin.}$$

3º.- Ambos coeficientes de rozamiento se pueden calcular experimentalmente del siguiente modo:

Para calcular el coeficiente de rozamiento estático entre un cuerpo y la superficie sobre la que se apoya se va elevando poco a poco la superficie hasta localizar el ángulo para el cual el cuerpo inicia su movimiento. Con esta inclinación se ha alcanzado el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática que coincidirá con la componente paralela del peso y por tanto:

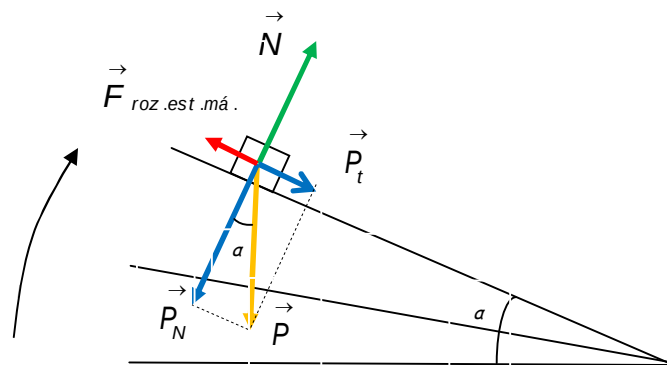
$$F_{roz.est.máx.} = P_t$$

$$\mu_e \cdot N = P \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\mu_e \cdot P_N = P \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\mu_e \cdot P \cdot \cos \alpha = P \cdot \text{sen} \alpha$$

$$\mu_e = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg} \alpha$$



Siendo  $\alpha$  el ángulo para el cual el cuerpo inicia el deslizamiento por la superficie.

Con la inclinación anterior el cuerpo deslizará con movimiento acelerado ya que la fuerza de rozamiento dinámica, que es inferior a la de rozamiento estática máxima, será inferior a  $P_t$ . Si queremos que deslice con MRU debemos disminuir levemente la inclinación hasta conseguir el equilibrio entre la fuerza de rozamiento dinámica y  $P_t$ . Para esta nueva inclinación se cumplirá:

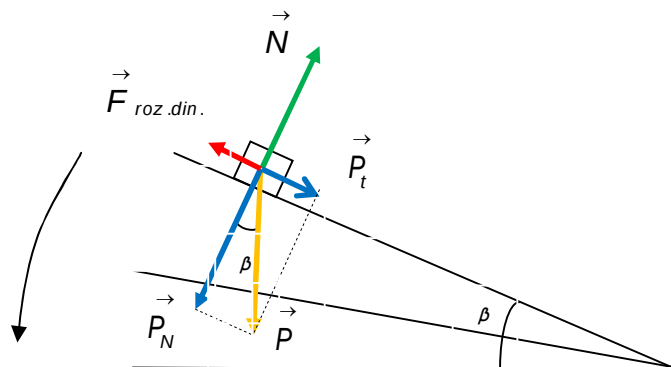
$$F_{roz.din.} = P_t$$

$$\mu_c \cdot N = P \cdot \text{sen} \beta$$

$$\mu_c \cdot P_N = P \cdot \text{sen} \beta$$

$$\mu_c \cdot P \cdot \cos \beta = P \cdot \text{sen} \beta$$

$$\mu_c = \frac{\text{sen} \beta}{\cos \beta} = \text{tg} \beta$$



Siendo  $\beta$  el ángulo de inclinación para el cual el cuerpo desliza con velocidad constante (MRU).

**EJEMPLO 8º**

Considera uno cualquiera de los objetos que en este momento tienes encima de la mesa (un cuerpo en reposo apoyado sobre una superficie horizontal). Analiza las fuerzas que actúan sobre él.

**EJEMPLO 9º**

Considera el mismo cuerpo del ejemplo anterior pero ahora le aplicas una fuerza  $\vec{F}$  horizontal. Analiza las fuerzas que actúan sobre él y si se moverá o no en los siguientes casos:

- a) Si no existiese rozamiento entre el cuerpo y la superficie de la mesa.
- b) Considerando la situación real.

**EJEMPLO 10º**

Haz lo mismo que en el ejemplo anterior suponiendo que la fuerza  $\vec{F}$  que se aplica forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.

**EJERCICIO 10º**

Sobre un cuerpo de 20 Kg, apoyado en una superficie horizontal con rozamiento ( $\mu_c = 0,25$ ), se aplica una fuerza horizontal de 100 N. Calcular:

- a) La fuerza de rozamiento que actúa.
- b) La aceleración con la que se mueve el cuerpo.
- c) La velocidad del cuerpo al cabo de 3 s si inicialmente estaba en reposo.

SOLUC: a) 49 N b) 2,5 m/s<sup>2</sup> c) 7,5 m/s

**EJERCICIO 11º**

Se aplica una fuerza de 50 N a un cuerpo de 8 Kg que está apoyado, en reposo, en una superficie horizontal. La fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y el coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la superficie vale 0,1. Calcula la aceleración con la que se mueve el cuerpo.

SOLUC: 2,7 m/s<sup>2</sup>

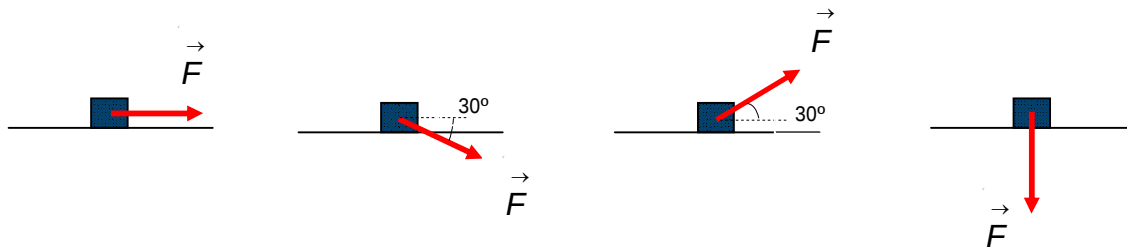
**EJEMPLO 11º**

Se deposita a un cuerpo de masa  $m$  sobre un plano inclinado de ángulo de inclinación  $\alpha$  y comienza a deslizar. Analiza las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y comprueba que la aceleración de descenso es independiente de la masa del cuerpo, en los siguientes casos:

- a) No hay rozamiento.
- b) Sí hay rozamiento

**EJEMPLO 12º**

Sobre un cuerpo de 5 Kg de masa, inicialmente en reposo, actúa una fuerza  $\vec{F}$ , cuyo módulo es 10 N. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la superficie vale 0,4, calcula el valor de la fuerza de rozamiento que actúa y su valor máximo en cada una de las situaciones dibujadas:



SOLUC: a) 10 N; 19,6 N b) 8,7 N; 21,6 N c) 8,7 N; 17,6 N d) 0 N; 23,6 N

**EJEMPLO 13º**

Dos masas están enlazadas mediante una cuerda que pasa por la garganta de una polea (máquina de Atwood). Analiza las fuerzas que actúan sobre cada masa.

**EJERCICIO 12º**

Se deja caer un cuerpo de 20 Kg. por un plano inclinado  $30^\circ$  con respecto a la horizontal desde 2 m de altura, siendo el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y el plano es  $\mu_d = 0,4$ .

- Calcula la aceleración con que desciende.
- La velocidad con la que llega a la base del plano.

SOLUC: A)  $1,5 \text{ m/s}^2$  B)  $3,46 \text{ m/s}$

**EJERCICIO 13º**

Se observa que un cuerpo desliza con velocidad constante por un plano inclinado. Basándote en el primer principio de la Dinámica razona si hay o no rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

**EJERCICIO 14º**

Un cuerpo de 15 kg. se deja caer por un plano inclinado de 60º respecto a la horizontal, desde una altura de 2 m. Hallar:

- a) La aceleración de descenso si no hay rozamiento entre el cuerpo y el plano.
- b) El tiempo que tarda el cuerpo en llegar a la base del plano y la velocidad que tendrá en ese momento si partió del reposo.

SOLUC: A)  $a = 8,5 \text{ m/s}^2$     B) 0,73 s y 6,2 m/s

**EJERCICIO 15º**

Desde la base de un plano inclinado se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m. Demuestra que la aceleración de ascenso es independiente de la masa tanto si hay rozamiento como si no lo hay.

**EJERCICIO 16º**

Desde la base de un plano inclinado de 30º se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m con una velocidad de 12 m/s. Calcula la aceleración de ascenso, el tiempo que está ascendiendo y la altura máxima alcanzada en los siguientes casos:

- a) No hay rozamiento.
- b) El coeficiente de rozamiento dinámico vale 0,18.

SOLUC: a)  $a = -4,9 \text{ m/s}^2$      $t = 2,45 \text{ s}$      $h = 7,35 \text{ m}$                       b)  $a = -6,43 \text{ m/s}^2$      $t = 1,87 \text{ s}$      $h = 5,62 \text{ m}$

**EJERCICIO 17º**

Aplicamos horizontalmente una fuerza  $\vec{F}$  a un mueble de 60 Kg. de masa, que está en reposo sobre una superficie horizontal con rozamiento siendo los coeficientes de rozamiento:  $\mu_e = 0.4$  y  $\mu_c = 0.3$ .

Determina si se moverá o permanecerá en reposo y calcula la fuerza de rozamiento que está actuando en cada uno de los siguientes casos:

- A)  $\vec{F} = 200 \text{ N}$
- B)  $\vec{F} = 250 \text{ N}$

SOLUC: A) no se mueve;  $F_{roz} = 200 \text{ N}$     B) si se mueve;  $F_{roz} = 176,4 \text{ N}$

**EJERCICIO 18º**

Se quiere determinar el coeficiente de rozamiento estático y cinético entre una caja y tablón. Al elevar poco a poco el tablón se observa que la caja comienza a deslizar cuando la inclinación es de  $28^\circ$ . En estas mismas condiciones la caja recorre 3 m en 3 s. Calcula ambos coeficientes.

SOLUC:  $\mu_e = 0,53$   $\mu_c = 0,455$

**EJERCICIO 19º**

Un esquiador, al descender, partiendo del reposo, por una pendiente de 213 m de longitud y un desnivel del 3%, emplea un tiempo de 61 s. Si se cambia de esquíes, el mismo esquiador invierte un tiempo de 42 s. Determina el coeficiente de rozamiento entre la nieve y los esquíes, en cada caso.

SOLUC:  $\mu_{c1} = 0,018$   $\mu_{c2} = 0,005$

**EJERCICIO 20º**

Un cuerpo desliza libremente por un plano inclinado de  $30^\circ$  con velocidad constante. Una vez en la base del plano, se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s.

- a) Calcula el tiempo que tardará en detenerse y la altura a la que lo hará.
- b) Una vez se detenga, ¿volverá a deslizar hacia abajo por sí mismo? Razona la respuesta.

SOLUC: a) 1,02 s 2,55 m b) ¿?

**EJERCICIO 21º**

Se desea subir un cuerpo de 5 Kg. por un plano inclinado  $30^\circ$  con respecto a la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético es 0,4, calcula:

- a) La fuerza paralela al plano que tenemos que aplicarle para que suba con una aceleración de  $0,5 \text{ m/s}^2$ .
- b) La altura alcanzada por el cuerpo a los 2 s suponiendo que partió del reposo.

SOLUC: a) 44,05 N b) 0,5 m

**EJERCICIO 22º**

Dos masas de 1 y 3 Kg cuelgan de los extremos de una cuerda que pasa por una polea. Despreciando la masa de la cuerda y de la polea, calcular:

- a) La aceleración del sistema.
- b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: a)  $a = 4,9 \text{ m/s}^2$  b)  $T = 14,7 \text{ N}$

**EJERCICIO 23º**

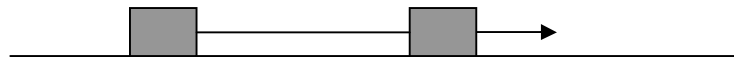
Un cuerpo de 6 Kg. de masa resbala sobre una mesa horizontal, (cuyo coeficiente de rozamiento es 0,25), resbala por la acción de una cuerda a la que está unido, esta cuerda pasa por la garganta de una polea a otro cuerpo de 4 Kg. que cuelga. Calcular:

- a) la aceleración con que resbala la masa que está sobre la mesa.
- b) La tensión de la cuerda en cada uno de los extremos de la cuerda.

SOLUC: a)  $2,45 \text{ m/s}^2$       b)  $29,4 \text{ N}$

**EJERCICIO 24º**

Dos cuerpos de 4 y 6 kg. están apoyados sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unidos mediante una cuerda de masa despreciable e inextensible. Del cuerpo de la derecha se tira con una fuerza F horizontal de 20 N hacia la derecha. Calcular:



- a) La aceleración del sistema.
- b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: A)  $a = 2 \text{ m/s}^2$       B)  $T = 8 \text{ N}$

**EJERCICIO 25º**

Repita el problema anterior suponiendo que la fuerza F se aplica formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal.

SOLUC: A)  $a = 1,74 \text{ m/s}^2$       B)  $T = 6,96 \text{ N}$

**EJERCICIO 26º**

Repita el problema nº 24 suponiendo que hay rozamiento siendo  $\mu_1 = 0,1$  y  $\mu_2 = 0,15$ .

SOLUC: A)  $a = 0,73 \text{ m/s}^2$       B)  $T = 6,84 \text{ N}$

**EJERCICIO 27º**

Repita el problema nº 26 suponiendo que hay rozamiento siendo  $\mu_1 = 0,1$  y  $\mu_2 = 0,15$ .

SOLUC: A)  $a = 0,62 \text{ m/s}^2$       B)  $T = 6,4 \text{ N}$

### 13. FUERZA CENTRÍPETA

Un cuerpo con movimiento curvilíneo siempre tiene aceleración centrípeta ya que la dirección de su velocidad va cambiando continuamente.

El cuerpo por tanto no está en equilibrio y debe de actuar sobre él una fuerza responsable de dicha aceleración que ha de tener la misma dirección y sentido que la aceleración centrípeta, es decir, dirigida hacia el centro de la trayectoria. A esta fuerza responsable de la aceleración centrípeta de los cuerpos se le denomina fuerza centrípeta.

En la gráfica siguiente se muestra la fuerza centrípeta en un MCU:

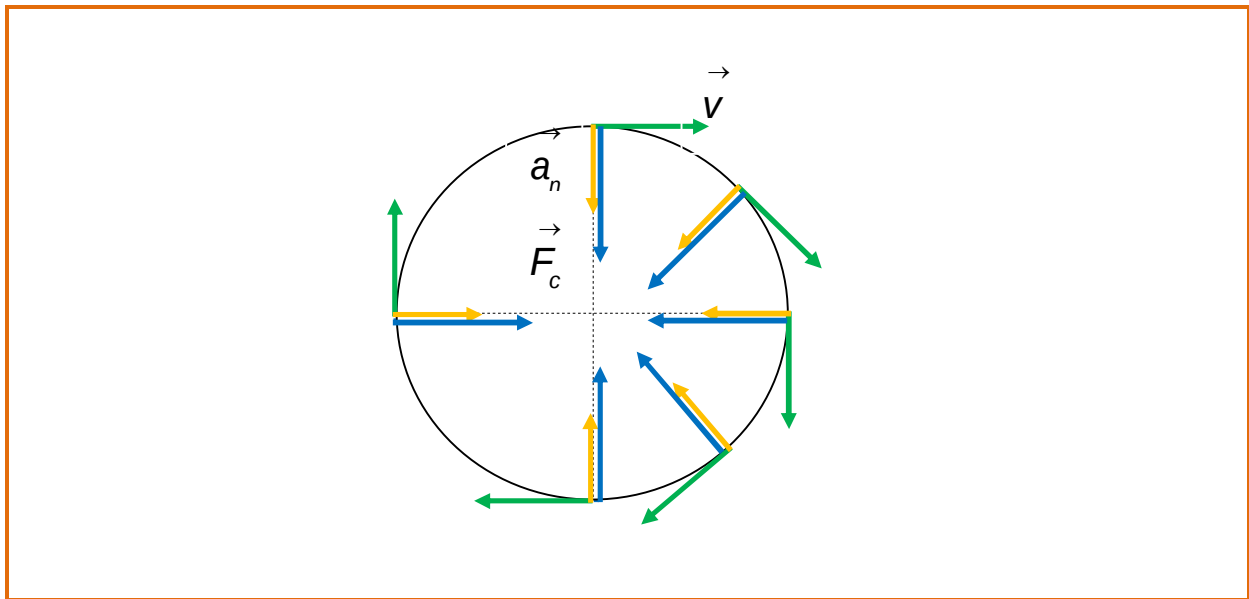


Figura 1.6

Vectores velocidad lineal, aceleración normal y fuerza centrípeta en un MCU

#### COMENTARIOS:

1º.- La fuerza centrípeta es sólo un nombre, no es una fuerza más que añadir al movimiento.

2º.- La fuerza centrípeta puede ser de muy diferente naturaleza: gravitatoria, eléctrica, de rozamiento, tensión, etc.

3º.- El módulo de la fuerza centrípeta, aplicando la 2ª Ley de Newton es:

$$\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{F_c = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{R}}$$

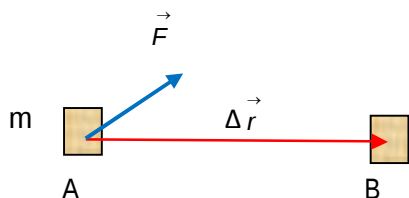
## **TEMA 2. TRABAJO Y ENERGÍA. FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS**

- 1. Definición de trabajo mecánico.**
- 2. Definición de potencia.**
- 3. Fuerzas conservativas y no conservativas. Energía potencial.**
- 4. Teorema de la energía cinética o teorema del trabajo o teorema de las fuerzas vivas (TFV).**
- 5. Relación entre el trabajo y la energía. Teorema o Principio de Conservación de la Energía Mecánica (TCM).**

## 1. DEFINICIÓN DE TRABAJO

Decimos que una fuerza realiza trabajo sobre un cuerpo si le transfiere alguna forma de energía. En particular, si dicha energía es mecánica diremos que la fuerza ha realizado trabajo mecánico.

Supongamos un cuerpo de masa  $m$  que se desplaza entre dos posiciones A y B siguiendo una **trayectoria rectilínea** bajo la acción de una **fuerza constante**  $\vec{F}$



Se define el trabajo realizado por una **fuerza constante**  $\vec{F}$  en un **desplazamiento rectilíneo** de la masa  $m$  entre dos posiciones A y B, al producto escalar del vector fuerza  $\vec{F}$  por el vector desplazamiento  $\Delta \vec{r}$  entre ambas posiciones:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos(\vec{F}, \Delta \vec{r}) \quad [2.1]$$

De la definición anterior se pueden sacar las siguientes conclusiones o comentarios:

1º.- El trabajo realizado por una fuerza es una magnitud física escalar, puesto que se define mediante el producto escalar de dos vectores. Por tanto el trabajo puede ser un nº positivo, negativo o valer cero.

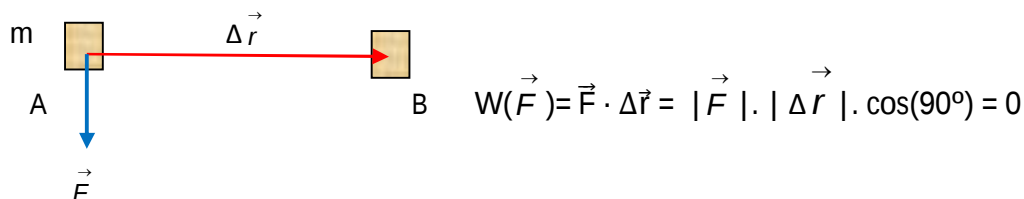
2º.- La unidad de trabajo coincide con la unidad de fuerza por la unidad de longitud, que en el SI de unidades sería el Newton (N) por el metro (m). Y a esta unidad se le da el nombre de Julio (J).

$$\boxed{\text{N.m} = \text{Julio (J)}}$$

La definición de Julio es la siguiente: “Un Julio es el trabajo que realizaría una fuerza de 1 N en un desplazamiento de 1 m, cuando la fuerza se aplicara en la misma dirección y sentido que el movimiento.”

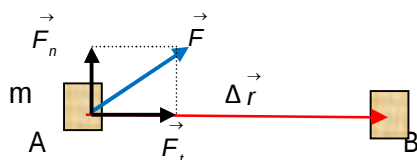
3º.- Si aplicamos una fuerza a un cuerpo y este no se mueve ( $\Delta \vec{r} = 0$ ), la fuerza no realiza trabajo.

4º.- Si la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento, la fuerza tampoco realiza trabajo, ya que el ángulo formado por los vectores fuerza y desplazamiento valdría  $90^\circ$  y el coseno de este ángulo vale 0 ( $\cos(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = \cos(90^\circ) = 0$ ) (podemos afirmar que las fuerzas perpendiculares a los desplazamientos no realizan trabajo).

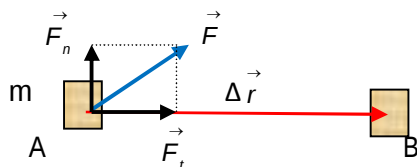


5º.- El trabajo realizado por una fuerza coincide con el trabajo que realiza su componente tangencial. En efecto, podemos descomponer a la fuerza aplicada en sus dos componentes  $\vec{F}_t$  y  $\vec{F}_n$  de modo que la componente normal no realiza trabajo.

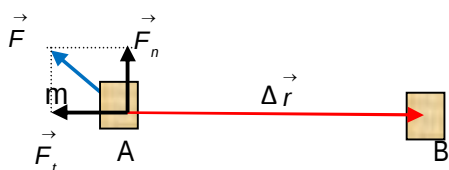
$$W(\vec{F}) = W(\vec{F}_n) + W(\vec{F}_t) = 0 + W(\vec{F}_t) = W(\vec{F}_t)$$



6º.- El trabajo realizado por una fuerza es positivo cuando la fuerza favorece el desplazamiento del cuerpo, es decir, la componente tangencial de la fuerza tiene la misma dirección y sentido que el movimiento, y sería negativo cuando la fuerza se opone al movimiento, es decir, la componente tangencial se opone al movimiento del cuerpo.



$$W_A^B > 0$$

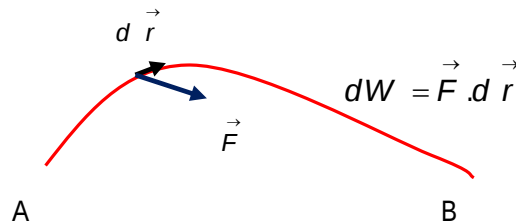


$$W_A^B < 0$$

7º.- No hay que confundir trabajo con esfuerzo. Esfuerzo consiste en aplicar fuerza, mientras que trabajo consiste en aplicar fuerza y producir desplazamiento que no sea perpendicular a la fuerza.

8º.- La definición de trabajo que se ha dado al iniciar la pregunta ha sido para una fuerza constante en un desplazamiento rectilíneo, pero las fuerzas no siempre son constantes y los desplazamientos pocas veces son rectilíneos. Entonces ¿cómo definir el trabajo realizado por una fuerza cualquiera en un desplazamiento cualquiera?.

En estos casos se divide la trayectoria en infinitas trayectorias elementales de modo que cada una de estas trayectorias infinitesimales puede ser considerada como rectilínea y la fuerza constante en cada una de ellas. Calcularíamos entonces el trabajo elemental  $dW$  realizado en cada trayectoria elemental mediante el producto escalar  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  y sumaríamos todos estos trabajos para obtener el trabajo a lo largo de toda la trayectoria. Esta sumatoria se realiza mediante una operación matemática denominada integral y se escribe así:

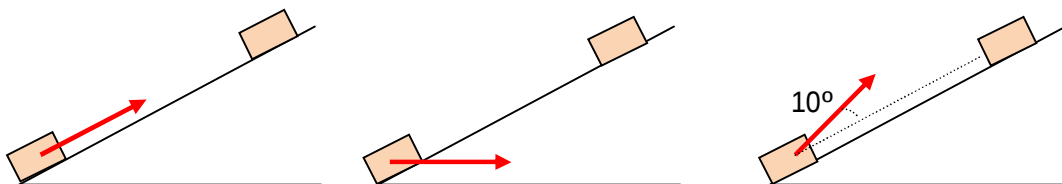


$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde A y B son los puntos inicial y final de la trayectoria y  $d\vec{r}$  es un vector de desplazamiento infinitesimal tangente a la trayectoria en cada uno de sus puntos.

### EJEMPLO 1º

En cada una de las situaciones siguientes se representa la fuerza  $\vec{F}$  que se aplica a un cuerpo. Suponiendo que esta fuerza tiene un valor de 10 N, el ángulo de inclinación del plano es de  $30^\circ$ , el desplazamiento por el plano es de 2 m, el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,2 y la masa que se desplaza es de 1 Kg.



Para cada una de las tres situaciones calcula:

- El trabajo realizado por la fuerza peso.
- El trabajo realizado por la fuerza normal.
- El trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$ .
- El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.

**2. DEFINICIÓN DE POTENCIA.**

Se define la potencia como el trabajo realizado por unidad de tiempo, y se calcula dividiendo el trabajo realizado entre el tiempo empleado en realizarlo:

$$P = \frac{W}{t} \quad [2.2]$$

De la definición de potencia podemos sacar las siguientes conclusiones:

1º.- La potencia es una magnitud física derivada y escalar que mide la eficacia con la se realiza un determinado trabajo. En efecto cuanto menos tiempo se emplee en realizar el mismo trabajo mayor será la potencia.

2º.- El trabajo se mide en la unidad de de trabajo dividida entre la unidad de tiempo y, por tanto, en el SI será J/s. A esta unidad se le conoce con el nombre de vatio (w)

$$1 \frac{J}{s} = 1w$$

Un vatio es la potencia desarrollada cuando se realiza un trabajo de 1 julio en un segundo. Otras unidades de potencia son los múltiplos y submúltiplos del vatio (Kw, Mw, etc) y el caballo de vapor (1 CV = 735 w)

3º.- Si en la expresión de la potencia despejamos en trabajo obtenemos:

$$W = P \cdot t \quad [2.3]$$

De esta expresión podemos deducir que las unidades de trabajo (o energía) coinciden con las unidades de potencia por las unidades de tiempo. Una de estas unidades es el Kw.h, que es la unidad en la que se mide la energía eléctrica consumida en los hogares y cuya equivalencia con el julio es la siguiente:

$$1Kw \cdot h = 1000w \cdot 3600s = 3.600.000w \cdot s = 3,6 \cdot 10^6 J$$

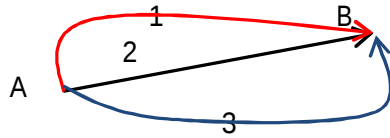
**EJEMPLO 2º**

Un coche de 1,5 t sube por una pendiente del 12% con una velocidad constante de 72 Km/h. Despreciando los rozamientos, calcular:

- Trabajo realizado por el motor durante los 10 primeros minutos.
- Potencia desarrollada por el motor. Exprésala en CV.

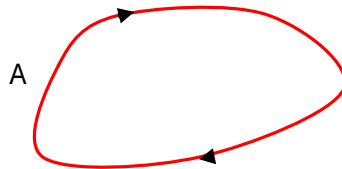
### 3. FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS. ENERGÍA POTENCIAL

Una **fuerza conservativa** es aquella cuyo trabajo realizado sobre un cuerpo que se traslada entre dos puntos dados, A y B, es independiente de la trayectoria seguida por aquél entre dichos puntos.



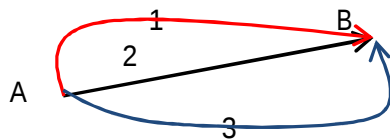
$$W_A^B (1) = W_A^B (2) = W_A^B (3) = \dots$$

Consecuencia inmediata de la anterior definición es que el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de cualquier ciclo (trayectoria cerrada) es nulo.



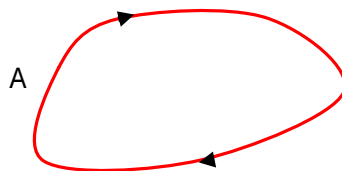
$$W_A^A = W (\text{por cualquier trayectoria}) = 0$$

Una fuerza se dice que no es conservativa cuando el valor del trabajo realizado por ella entre dos posiciones depende de la trayectoria seguida entre ambas posiciones



$$W_A^B (1) \neq W_A^B (2) \neq W_A^B (3) \dots$$

Consecuencia inmediata de la anterior definición es que debe de existir al menos un ciclo en el que trabajo realizado por la fuerza no conservativa es distinto de 0.



$$W_A^A (\text{por lo menos en un ciclo}) \neq 0$$

Son ejemplos de fuerzas conservativas: la fuerza gravitatoria (y por tanto la fuerza peso), la fuerza elástica, la fuerza eléctrica y la ... (se completará cuando demos el tema 9).

Son ejemplos de fuerzas no conservativas la fuerza de rozamiento y ... (se completará en el tema 4). Cualquier otra fuerza de la que no se haya dicho explícitamente que es conservativa se tratará como no conservativa.

### ¿Qué ventajas presentan las fuerzas conservativas frente a las no conservativas?

La ventaja de las fuerzas conservativas se encuentra en que el trabajo realizado por las mismas sólo depende de los valores que toma una magnitud escalar, a la que llamamos **energía potencial** ( $E_p$ ), en los puntos extremos de la trayectoria, de manera que podemos escribir la siguiente relación, conocida como **teorema de la energía potencial** y que dice:

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas cuando una partícula se desplaza entre dos posiciones coincide con la variación de energía potencial de la partícula entre dichas posiciones, pero cambiada de signo.

$$W_C = -\Delta E_p = - [ E_p(B) - E_p(A) ] = E_p(A) - E_p(B) \quad [2.4]$$

donde  $\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$  es la variación de energía potencial entre los puntos A(inicial) y B(final) de la trayectoria seguida por el cuerpo.

El signo “-” significa que el cuerpo disminuye su energía potencial siempre que en su movimiento la fuerza conservativa haya realizado trabajo positivo. Así pues:

*“La energía potencial asociada a una determinada fuerza conservativa disminuye en una cantidad igual al trabajo realizado por dicha fuerza entre dos puntos dados de una trayectoria.”*

*Según este teorema, podemos calcular el trabajo de las fuerzas conservativas sin tener que hacer uso de la definición de trabajo, bastaría con evaluar la variación de energía potencial.*

Cada fuerza conservativa tiene asociada su propia energía potencial:

#### **Energía potencial gravitatoria en un punto próximo a la superficie terrestre**

En puntos suficientemente próximo a la superficie terrestre, la fuerza peso puede considerarse prácticamente constante y la energía potencial asociada es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad [2.5]$$

Si se trata de puntos alejados de la tierra donde la fuerza peso no puede considerarse constante, la expresión de la energía potencial es diferente y se verá en el tema siguiente.

#### **Energía potencial elástica**

Supongamos un muelle de constante K situado horizontalmente. La fuerza recuperadora del muelle puede expresarse  $\vec{F} = -K \cdot x \vec{i}$ , siendo x la distancia de separación de la posición de equilibrio del muelle y la expresión de la energía potencial elástica asociada a esta fuerza es:

$$E_p = \frac{1}{2} K \cdot x^2 \quad [2.6]$$

**Energía potencial eléctrica**

La estudiaremos en el tema siguiente.

**EJEMPLO 3º**

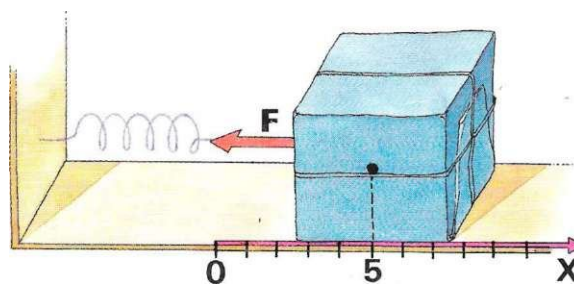
Un cuerpo de 2 Kg de masa se levanta desde el suelo hasta una altura de 4 m. Calcula:

- Haciendo uso de la definición de trabajo, calcula el trabajo realizado por la fuerza peso si se levanta verticalmente.
- Comprueba que este trabajo coincide con menos la variación de energía potencial de la partícula entre la posición inicial y final.
- Imagina que la partícula se eleva a la misma altura, pero desplazándola por un plano inclinado de  $30^\circ$ . Responde a las mismas preguntas de los apartados a) y b). ¿Qué te llama la atención de los resultados obtenidos?
- ¿Por qué crees que las carreteras de montaña se hacen en zig-zag y no en línea recta?

**EJEMPLO 4º**

Supongamos que un cuerpo de 100 g de masa está sujeto a un muelle horizontal de constante elástica 50 N/m. Si lo separamos 5 cm de su posición de equilibrio estirando el muelle, calcular:

- La energía potencial elástica que tiene el cuerpo en dicha posición.
- El trabajo realizado por la fuerza elástica en el desplazamiento desde la posición de equilibrio hasta los 5 cm.
- El trabajo realizado por la fuerza que produce el desplazamiento (fuerza externa).
- ¿Qué energía potencial elástica tendría el cuerpo si en vez de estirar el muelle lo hubiésemos comprimido 5 cm desde su posición de equilibrio? ¿Qué trabajo habría realizado la fuerza elástica en este desplazamiento? ¿Y la fuerza externa?.



#### 4. TEOREMA DEL TRABAJO, O TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA O TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS (TFV)

*El teorema del trabajo, de la energía cinética o TFV dice que: “Cuando una partícula se desplaza entre dos posiciones, el trabajo total realizado por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a lo largo de un determinado desplazamiento, es igual a la variación de energía cinética que experimenta dicho cuerpo”*

$$W_{A \text{ TOTAL}}^B = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) \quad [2.7]$$

Comentarios:

1º.- Este teorema es aplicable a cualquier tipo de fuerzas (conservativas y/o no conservativas) y cualquier desplazamiento (rectilíneo o no).

2º.- Este teorema nos permite calcular el trabajo total realizado sobre una partícula sin necesidad de utilizar la definición de trabajo, bastaría con evaluar la energía cinética de la partícula en las posiciones inicial y final.

3º.- Si despejamos a la energía cinética final en la ecuación del teorema obtenemos:

$$E_C(B) = E_C(A) + W_{A \text{ TOTAL}}^B$$

Como vemos según el signo del trabajo total realizado sobre la partícula la energía cinética de la partícula habrá aumentado, disminuido o permanecido constante.

$$\text{Si } W_{A \text{ TOTAL}}^B > 0 \Rightarrow E_C(B) > E_C(A) \Rightarrow E_C \uparrow$$

$$\text{Si } W_{A \text{ TOTAL}}^B < 0 \Rightarrow E_C(B) < E_C(A) \Rightarrow E_C \downarrow$$

$$\text{Si } W_{A \text{ TOTAL}}^B = 0 \Rightarrow E_C(B) = E_C(A) \Rightarrow E_C = \text{cte.}$$

4º.- Según el comentario anterior el trabajo realizado sobre una partícula debe entenderse como una transferencia de energía.

#### EJEMPLO 5º

Se deja deslizar a un cuerpo de 1 Kg de masa por un plano inclinado de 30º. Si el cuerpo parte del reposo y el coeficiente de rozamiento entre este y el plano es de 0,1, hallar:

- El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y el trabajo resultante cuando el cuerpo se desplace 3 m sobre el plano.
- La velocidad que adquiere el cuerpo al final cuando ha recorrido 3m sobre el plano aplicando el TFV.
- Responde al apartado anterior mediante la dinámica.

### **EJEMPLO 6º**

Un cuerpo de 10 Kg se lanza sobre una superficie horizontal con una velocidad de 10 m/s. Debido al rozamiento, el cuerpo acaba deteniéndose después de recorrer 200 m sobre la superficie. Calcula el valor de la fuerza de rozamiento:

- a) Mediante el TFV.
- b) Mediante la dinámica.

## 5. RELACIÓN ENTRE EL TRABAJO Y LA ENERGÍA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Consideremos a una partícula que se desplaza entre dos posiciones A y B siguiendo una trayectoria cualquiera y bajo la acción de fuerzas de cualquier tipo (conservativas y/o no conservativas, constantes y/o no constantes). Aplicando el teorema del trabajo (TFV) obtenemos:

$$W_{A \text{ TOTAL}}^B = \Delta E_c$$

Si descomponemos el trabajo total en la suma de dos trabajos: el realizado por las fuerzas conservativas y el realizado por las fuerzas no conservativas la expresión anterior nos queda:

$$W_{A \text{ TOTAL}}^B = W_{A \text{ FC}}^B + W_{A \text{ FNC}}^B$$

si tenemos en cuenta que el trabajo de las fuerzas conservativas coincide con la menos variación de la energía potencial de la partícula (teorema de la energía potencial), la ecuación anterior queda:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W_{A \text{ FNC}}^B$$

Despejando el trabajo de las fuerzas no conservativas, obtenemos

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{A \text{ FNC}}^B$$

Y si tenemos en cuenta que la energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial, podemos escribir la siguiente expresión que se conoce con el nombre de **Teorema de la Energía Mecánica**:

$$\Delta E_m = W_{A \text{ FNC}}^B \quad [2.8]$$

La variación de energía mecánica que experimenta un cuerpo en una determinada trayectoria, coincide con el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre la partícula en dicha trayectoria.

A partir de este teorema podemos extraer las siguientes consecuencias:

1º.- Si a lo largo de una determinada trayectoria entre dos puntos A y B sólo realizan trabajo las fuerzas conservativas ( $W_{\text{NC}} = 0$ ), entonces  $\Delta E_m = 0$ , es decir, la energía mecánica permanece constante. Este resultado se conoce como **principio de conservación de la energía mecánica (PCEM) o teorema de conservación de la energía mecánica**, cuya expresión matemática puede escribirse así:

$$\text{Si } W_{A \text{ FNC}}^B = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m = \text{cte.} \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \quad [2.9]$$

Es importante destacar que si la energía mecánica de la partícula permanece constante, esto no implica necesariamente que lo sean sus energías cinética y potencial. Lo que debe de ocurrir es

que el aumento o disminución en su energía cinética se verá compensada, respectivamente, por una disminución o aumento en la misma cantidad de su energía potencial.

2º.- Si a lo largo de una determinada trayectoria entre dos puntos A y B, realizan trabajo las fuerzas no conservativas ( $W_{NC} \neq 0$ ), entonces  $\Delta E_m \neq 0$ , es decir, la energía mecánica varía en una cantidad igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas. Según sea el signo de este trabajo, así será el signo de la variación de energía mecánica, y por tanto, la energía mecánica de la partícula habrá aumentado o disminuido:

$$\text{Si } W_{A \rightarrow B}^{FNC} > 0 \Rightarrow \Delta E_m > 0 \Rightarrow E_m \uparrow$$

$$\text{Si } W_{A \rightarrow B}^{FNC} < 0 \Rightarrow \Delta E_m < 0 \Rightarrow E_m \downarrow$$

En particular, aquellas fuerzas no conservativas que realizan un trabajo negativa harán disminuir la energía mecánica; dichas fuerzas se denominan **disipativas** dado que cuando actúan hacen que la energía mecánica se disipe en forma de calor. Entre dichas fuerzas destacan las fuerzas de rozamiento por deslizamiento o las de resistencia de un medio al cuerpo que se mueve a través de él.

### EJEMPLO 7º

Un cuerpo de masa  $m$  se deja caer desde la azotea de un edificio de 40 m de altura.

- A) Analiza si se conserva o no la energía mecánica del cuerpo durante su caída.
- B) Analiza como varían las energías cinética y potencial gravitatoria del cuerpo durante su caída.
- C) Calcula la velocidad con la que golpea al suelo aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica (PCEM).
- D) Calcula la velocidad con la que golpea al suelo aplicando las ecuaciones del movimiento de caída libre.

SOLUC: C) y D)  $v = -28 \text{ m/s}$

### EJEMPLO 8º

Repite el problema anterior suponiendo que el cuerpo se lanza hacia abajo con una velocidad de 8 m/s.

SOLUC: C) y D)  $v = -29,1 \text{ m/s}$

### EJEMPLO 9º

Un cuerpo de masa  $m$  se deja deslizar por un plano inclinado de 30º sin rozamiento desde una altura de 2 m.

- A) Analiza si se conserva o no la energía mecánica del cuerpo durante su descenso.
- B) Analiza como varían las energías cinética y potencial gravitatoria del cuerpo durante su descenso.
- C) Calcula la velocidad del cuerpo cuando llegue a la base del plano aplicando el PCEM.
- D) Calcula la velocidad del cuerpo cuando llegue a la base del plano aplicando las ecuaciones de la cinemática.

SOLUC: C) y D)  $v = 6,3 \text{ m/s}$

**EJEMPLO 10º**

Repite el problema anterior suponiendo que hay rozamiento y que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,2.

**EJEMPLO 11º**

Un cuerpo de masa  $m$  se lanza hacia arriba desde el suelo por un plano inclinado de  $30^\circ$  sin rozamiento con una velocidad de 14 m/s.

- A) Analiza si se conserva o no la energía mecánica del cuerpo durante su ascenso.
- B) Analiza como varían las energías cinética y potencial gravitatoria del cuerpo durante su ascenso.
- C) Calcula la altura máxima alcanzada aplicando el PCEM.
- D) Calcula la altura máxima alcanzada aplicando las ecuaciones de la cinemática.

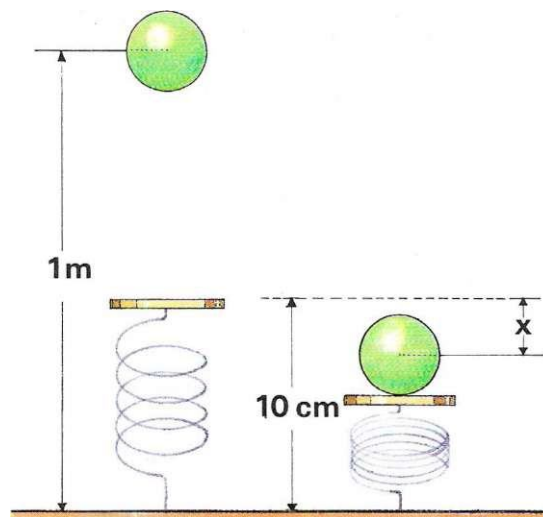
SOLUC: C) y D)  $h = 10 \text{ m}$

**EJEMPLO 12º**

Repite el problema anterior suponiendo que hay rozamiento y que el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,2.

**EJEMPLO 13º**

Desde una altura de 1m se deja caer un cuerpo de 50 g de masa sobre un muelle elástico de 10 cm de longitud y cuya constante elástica es 500 N/m.

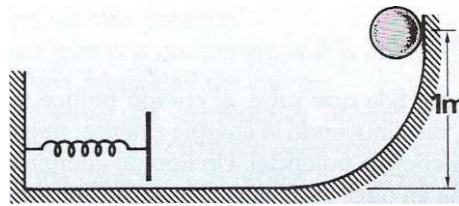


- A) Haz un análisis energético del movimiento de caída del cuerpo desde su posición inicial hasta que se produce la máxima compresión del muelle, suponiendo que no hay rozamiento.
- B) Calcula la máxima deformación del muelle.
- C) ¿Qué ocurrirá después de haberse producido la máxima deformación del muelle?

SOLUC: B) 4 cm

**EJEMPLO 14º**

Un cuerpo de 1 Kg de masa se deja caer desde 1 m de altura, tal y como se indica en la figura:



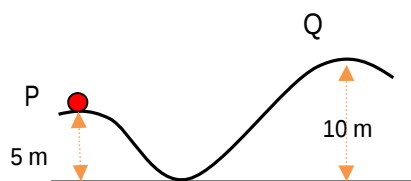
Suponiendo despreciable el rozamiento:

- A) Haz un análisis energético del problema desde que el cuerpo se suelta hasta que se produce la máxima deformación del muelle.
- B) Calcula la velocidad con la que golpea el cuerpo al muelle.
- C) Calcula la máxima deformación del muelle si su constante elástica vale  $200 \text{ N/m}$ .
- D) ¿Qué ocurrirá después de haberse producido la máxima deformación del muelle?

SOLUC: B)  $4,4 \text{ m/s}$  C)  $31 \text{ cm}$

**EJERCICIOS DE TRABAJO Y ENERGÍA**

1º. El cuerpo de la figura desliza por la pendiente sin fricción. Cuando está en el punto P su velocidad es  $v$ .



- A) ¿Cuál es la mínima velocidad con la que tiene que moverse la partícula en P para que llegue a Q?
- B) ¿Con qué velocidad llegará a Q si en P tiene una velocidad de 12 m/s?

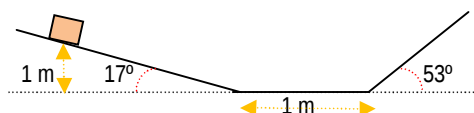
SOLUC: A) 9,9 m/s B) 6,8 m/s

2º.- Un muelle de constante elástica 250 N/m, horizontal y con un extremo fijo, está comprimido 10 cm. Unido al extremo libre del muelle se encuentra un cuerpo de 0,5 Kg que sale despedido al descomprimirse el muelle.

- A) Explica las variaciones de energía que experimenta el cuerpo mientras se descomprime el muelle suponiendo que no hay rozamiento, y calcula la velocidad con la que sale despedido el cuerpo.
- B) Suponiendo que a partir de que el cuerpo abandona el muelle aparece una fuerza de rozamiento de coeficiente 0,2, explica las variaciones de energía del cuerpo y calcula distancia recorrida hasta que se detiene.

SOLUC: A) 2,24 m/s B) 1,25 m

3º.- Desde el punto A de la figura se suelta un cuerpo de masa  $m$ . Calcula la longitud que recorrerá el cuerpo sobre la rampa de  $53^\circ$  si:



- A) No ha rozamiento en todo el recorrido.
- B) Hay rozamiento solo en el plano de  $53^\circ$  siendo el coeficiente 0,1.

SOLUC: A) B)

4º.- Un cuerpo de 2 Kg se lanza con una velocidad de 6 m/s por una superficie horizontal rugosa ( $\mu = 0,2$ ). El bloque, después de recorrer 4 m por el plano, choca con el extremo libre de un muelle cuya constante elástica es  $200 \text{ N.m}^{-1}$ , colocado horizontalmente y sujeto por el otro extremo. Calcular:

- A) La máxima compresión del resorte suponiendo que durante la compresión la superficie está perfectamente pulimentada.
- B) El trabajo total realizado durante la compresión.

SOLUC: A) 45 cm B) - 20,25 J

**De la relación de ejercicios de selectividad:**

**79-84-87-88-92-96-105-107-109-110-112-113-114-115-117-119-120-125-126-132-133-134-136-137-138-140-390-391-392-395-398**

### TEMA 3. CAMPO GRAVITATORIO Y CAMPO ELÉCTRICO

1. Concepto físico de campo: campos escalares y vectoriales. Representación gráfica.
2. Modelos planetarios: leyes de Kepler
3. Fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales
4. Fuerza electrostática entre dos cargas puntuales
5. Intensidad de campo gravitatorio e intensidad de campo eléctrico
6. Energía potencial gravitatoria y energía potencial eléctrica
7. Potencial gravitatorio y potencial eléctrico
8. Diferencia de potencial gravitatorio y eléctrico
9. Superficies equipotenciales
10. Campo gravitatorio terrestre
  - 10.1. Fuerza gravitatoria
  - 10.2. Intensidad de campo gravitatorio
  - 10.3. Energía potencial gravitatoria
  - 10.4. Potencial gravitatorio
  - 10.5. Movimiento de satélites: velocidad, periodo y energía orbitales
  - 10.6. Velocidad de escape
11. Ingravidez
12. Analogías y diferencias entre los campos gravitatorio y eléctrico

## 1. CONCEPTO FÍSICO DE CAMPO. CAMPOS ESCALARES Y CAMPOS VECTORIALES. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En Física se denomina campo a cualquier región del espacio en la que se ponga de manifiesto el valor de una magnitud física. Por ejemplo, cualquier región que cojamos de nuestro entorno, como el aula en la que estamos, es un campo físico por múltiples razones: es un campo de fuerzas gravitatorio, es un campo de temperaturas, de presiones, de densidad, etc.

Los campos físicos se clasifican en escalares y vectoriales, según sea la magnitud física que se manifieste en ellos.

### 1.A CAMPOS ESCALARES

Los campos escalares son campos físicos en los que la magnitud física que se pone de manifiesto es de tipo escalar. Son campos escalares los campos de temperaturas, presiones, densidades, luminosidades, etc.

Los campos escalares se representan gráficamente mediante las llamadas isolíneas o superficies equiescalares que son líneas o superficies imaginarias que, en un instante dado, pasan por todos los puntos del campo que tiene el mismo valor de la magnitud escalar. Las isotermas y las isobaras son las isolíneas del campo de temperaturas y de presiones respectivamente. En un mapa topográfico las líneas que unen los puntos que se encuentran a la misma altura sobre el nivel del mar se denominan curvas de nivel.

La gráfica siguiente representa un mapa de isobaras tal y como se puede observar diariamente en los espacios dedicados a la información meteorológica:

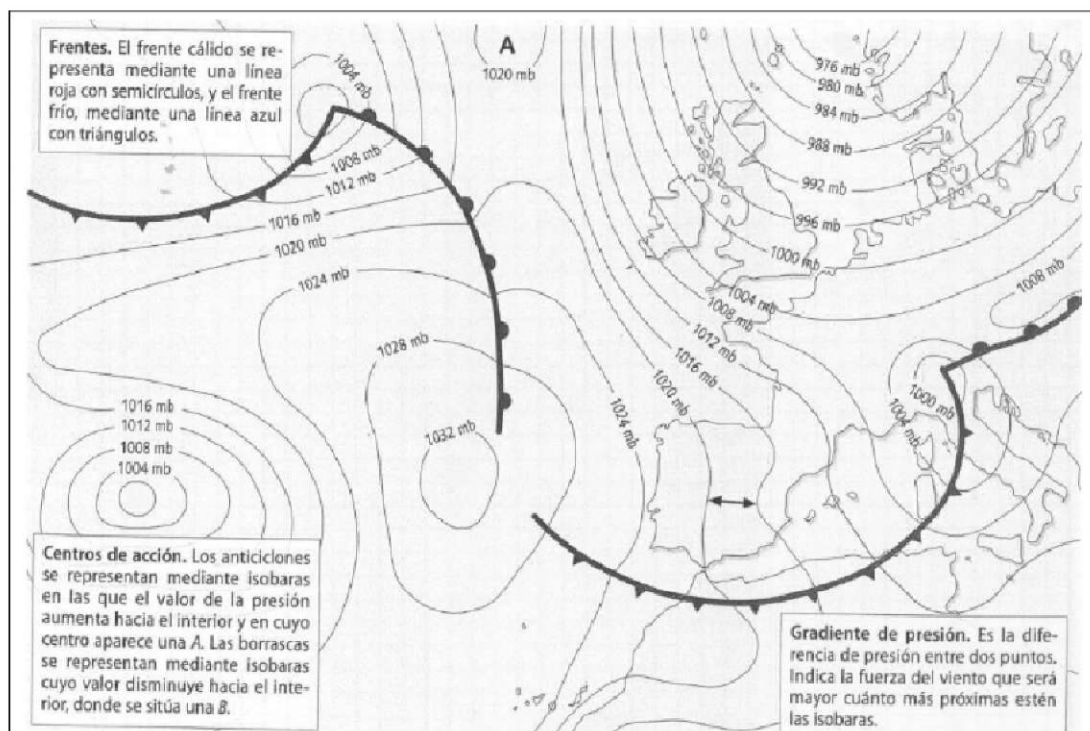


Figura 3.1

De la definición de isolíneas o superficies equipotenciales podemos deducir lo siguiente:

- o La forma que tienen las isolíneas o superficies equiescalares es arbitraria y generalmente se modifican a lo largo del tiempo.
- o Dos isolíneas diferentes nunca pueden cortarse. En efecto, si dos isotermas o dos isobaras diferentes se cortaran en un punto, querría decir que en un mismo instante un mismo punto tiene dos valores diferentes de temperatura o de presión.
- o La mayor o menor densidad de isolíneas en una determinada región indica que hay una variación (gradiente) más o menos acusada de la magnitud escalar en dicha región.

### 1.B CAMPOS VECTORIALES

Son campos físicos en los que la magnitud que se manifiesta es de naturaleza vectorial. Son campos vectoriales el campo de velocidades del viento o de la corriente de un río, el campo fuerzas gravitatorio, eléctrico y magnético.

A los campos vectoriales en los que la magnitud física que se manifiesta es una fuerza, se denominan campos de fuerzas. Son campos de fuerzas el campo gravitatorio, eléctrico y magnético. Los dos primeros los estudiaremos en este tema y el tercero en los dos temas siguientes.

Los campos vectoriales se representan gráficamente mediante las denominadas líneas de campo que son líneas imaginarias tangentes (de la misma dirección y sentido) en cada punto y en cada instante al vector que caracteriza al campo vectorial. Si el campo vectorial es un campo de fuerzas, a las líneas de campo se les denomina líneas de fuerza, y al vector que caracteriza al campo de fuerzas se le denomina vector intensidad de campo o simplemente vector campo.

Además las líneas de campo se dibujan de modo que la densidad de líneas es directamente proporcional al vector que caracteriza al campo vectorial, es decir, la mayor o menor proximidad entre las líneas de campo indica la mayor o menor intensidad de dicho campo.

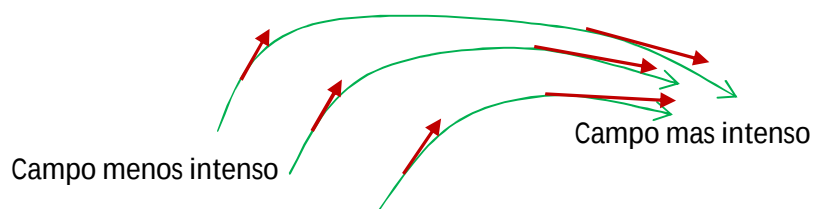


Figura 3.2

Si el campo vectorial es un campo uniforme (constante) entonces las líneas que lo representan tienen que ser paralelas e igualmente espaciadas

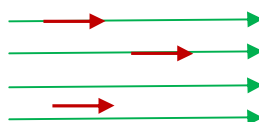


Figura 3.3

## 2. MODELOS PLANETARIOS: LEYES DE KEPLER

Históricamente, los modelos que intentaron describir los movimientos de los planetas han sido dos: el modelo geocéntrico y el modelo heliocéntrico.

- **Modelo geocéntrico**

Los antiguos griegos pensaban que la Tierra era el centro del Universo y que todos los cuerpos celestes se movían alrededor de ella. En una primera hipótesis, se suponía que dichos cuerpos describían circunferencias concéntricas alrededor de la Tierra, lo cual no describe bien el movimiento retrógrado de los planetas observado desde la Tierra.

Para explicar estas observaciones, el astrónomo Tolomeo de Alejandría desarrolló, en el siglo II D.C., su teoría de los epiciclos. En el caso más sencillo suponía que los planetas se movían uniformemente en una circunferencia llamada **epiciclo**, cuyo centro se movía, a su vez, sobre una circunferencia más grande, conocida como **deferente**, cuyo centro era la Tierra. La trayectoria resultante del planeta era una **epicicloide**.

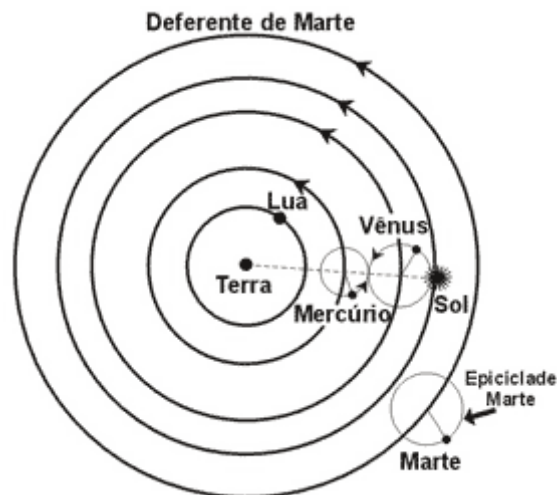


Figura 3.4

En definitiva, lo que los griegos hicieron fue describir el movimiento planetario con respecto a un sistema de referencia colocado en la Tierra.

El modelo geocéntrico se mantuvo hasta el Renacimiento (siglo XVI), sobre todo debido a la influencia de la Iglesia sobre el pensamiento científico.

- **Modelo heliocéntrico**

Fue propuesto por Nicolás Copérnico en el siglo XVI, recogiendo las ideas de Aristarco (s. III A.C.). Según este modelo, los planetas se mueven en órbitas concéntricas alrededor del Sol, es decir, describe el movimiento planetario desde un sistema de referencia situado en el Sol. En dicho sistema el movimiento de los planetas tenía una descripción más sencilla. Este modelo fue corroborado experimentalmente por Galileo al observar con su telescopio algunos satélites de Júpiter.

**Leyes de Kepler**

Basándose en las observaciones astronómicas de Galileo y Tycho Brahe, Johannes Kepler propuso tres leyes con las que describe cuantitativamente el movimiento de los planetas alrededor del Sol:

o **Primera Ley**

Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, situándose éste en uno de los focos de la elipse. (fig. 3.5)

o **Segunda ley (ley de las áreas)**

La velocidad areolar (rapidez con que varía el área descrita por el radiovector que une el Sol con cada planeta) es constante para cada planeta, es decir, dicho radiovector barre áreas iguales en tiempos iguales.

Como consecuencia de esta ley, la velocidad orbital de un planeta no es constante a lo largo de su órbita, siendo más pequeña en los puntos de la misma más alejados del Sol (afelio).

o **Tercera ley**

El cuadrado del periodo orbital ( $T$ ) de cada planeta es directamente proporcional al cubo de su distancia media ( $d$ ) al Sol:

$$T^2 = K \cdot d^3 \quad [3.1]$$

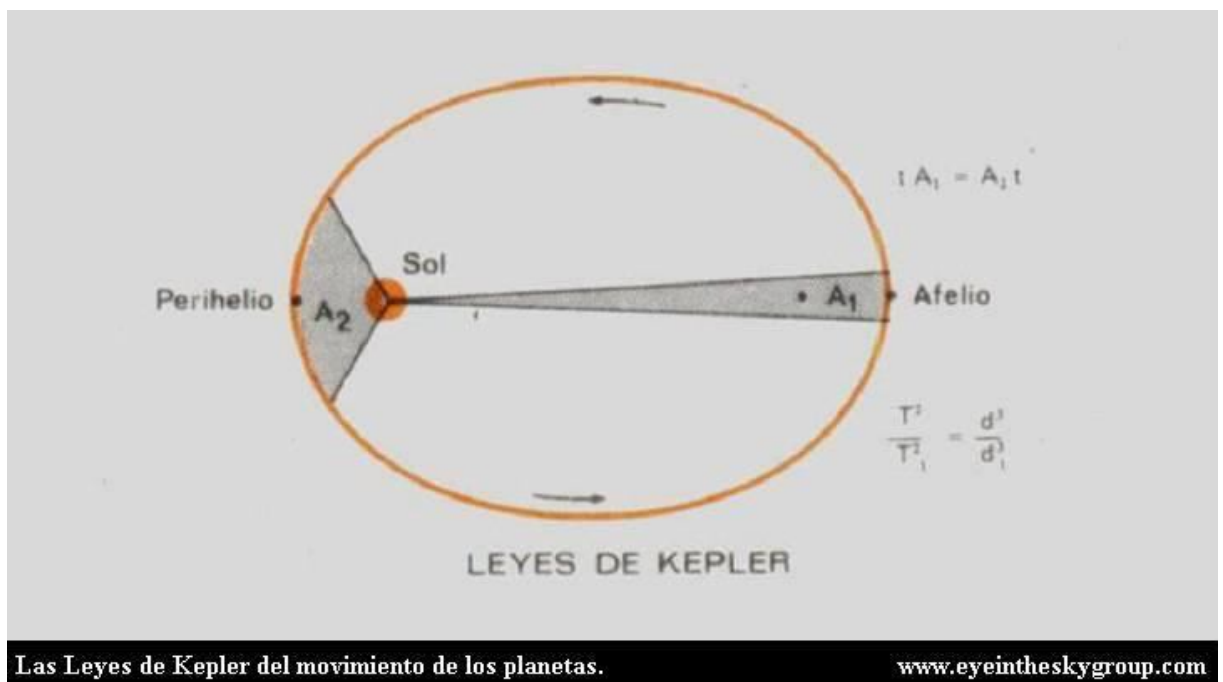


Figura 3.5

### 3. FUERZA GRAVITATORIA ENTRE DOS MASAS PUNTUALES

Basándose en las leyes de Kepler y en sus propias leyes de la Dinámica, Isaac Newton propone, en el s. XVII, su **ley de gravitación universal**, publicada en su obra *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, con la que describe la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. El enunciado de dicha ley puede resumirse así:

*“La fuerza con que se atraen dos masa puntuales ( $M$  y  $m$ ) separadas por una distancia  $r$  es directamente proporcional a los valores de dichas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”*

$$F = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \quad (\text{módulo del vector fuerza})$$

La expresión vectorial de la fuerza gravitatoria entre masas puntuales puede escribirse de la siguiente forma:

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{vector fuerza}) \quad [3.2]$$

Donde:

**$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$**  es la llamada constante de gravitación universal

“ **$r$** ” es módulo del vector  $\vec{r}$  (que es la distancia que separa a las dos masas que interaccionan)

El vector  $\vec{r}$  es el vector que va de la masa fuente a la masa testigo

Y  $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector  $\vec{r}$  y por tanto un vector unitario dirigido de la masa fuente a la masa testigo (fig. 1.2).

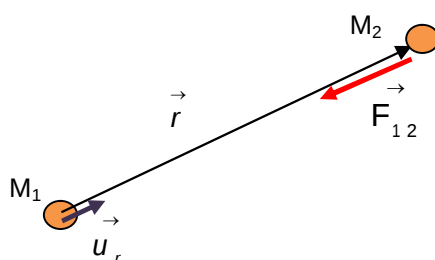


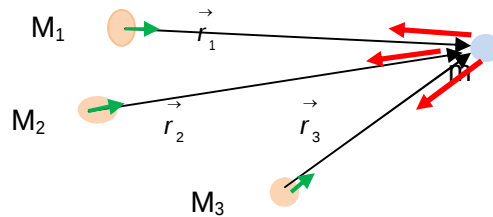
Figura 3.6

Junto a las características anteriores, podemos hacer las siguientes observaciones con respecto a la fuerza gravitatoria:

- o Es una fuerza de atracción.
- o Es una fuerza central porque su dirección coincide con la dirección de la recta que une las dos masas que interaccionan.
- o La fuerza gravitatoria es una fuerza de largo alcance porque se manifiesta tanto a cortas distancias como a largas distancias.
- o  $G$  es una constante universal, es decir, su valor no depende del medio en el que se encuentren las masas que interaccionan y, por tanto, la atracción gravitatoria entre dos masas también es independiente del medio en el que se encuentren.
- o Debido al pequeño valor de  $G$  la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas sólo es apreciable en el caso en que al menos una de las dos masas sea de valor elevado.

- o Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las masas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.
- o **Principio de superposición:** Las fuerzas ejercidas por las masas son aditivas lo cual significa que la fuerza resultante sobre una determinada masa es igual a la suma vectorial de las fuerzas de otras masas. Esta propiedad recibe el nombre de **principio de superposición** y se puede enunciar así:

*Si una masa está sometida simultáneamente a varias fuerzas independientes, la fuerza resultante se obtiene sumando vectorialmente dichas fuerzas.*



$$\vec{F}_{Rte} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = -G \frac{M_1 \cdot m}{r_1^2} \vec{u}_{r1} - G \frac{M_2 \cdot m}{r_2^2} \vec{u}_{r2} - \dots - G \frac{M_n \cdot m}{r_n^2} \vec{u}_{rn}$$

Figura 3.7

- o Si una de las masas es la tierra, entonces la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la tierra sobre una masa m cualquiera sería:

$$\boxed{\vec{F} = -G \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{u}_r} \quad \boxed{F = G \frac{M_T \cdot m}{r^2} = G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}} \quad \text{Donde } r = R_T + h \quad [3.3]$$

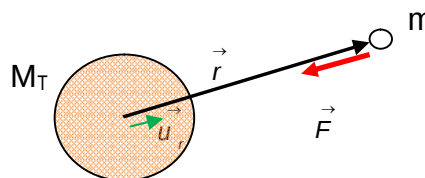


Figura 3.8

A esta fuerza es a la que llamamos peso de la masa m:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \quad P = m \cdot g$$

Y podemos identificar al vector aceleración de la gravedad terrestre  $\vec{g}$  y a su módulo g

$$\boxed{\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r} \quad \boxed{g = G \frac{M_T}{r^2} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}} \quad [3.4]$$

### EJEMPLO 1º

Dos masas de 10 t cada una se encuentran situadas en las posiciones (0,4) m y (3,0) m.

Dibuja y calcula los vectores fuerza de interacción gravitatoria entre ambas.

EJEMPLO 2º

Dos masas de 5 t cada una se encuentran situadas en las posiciones (0,0) m y (4,0) m.

- a) Dibuja la fuerza gravitatoria que ejerce cada una de ellas sobre una tercera masa de 1 t situada en el punto (0,3) m. Dibuja también la fuerza gravitatoria resultante que ejercen las dos primeras masas sobre la tercera.
- b) Calcula el valor de cada una de las fuerzas.

#### 4. FUERZA ELECTROSTÁTICA ENTRE CARGAS PUNTUALES

En la actualidad, la carga eléctrica es un modelo que utiliza la Física para explicar los fenómenos eléctricos. También se denomina carga eléctrica a cualquier cuerpo electrizado. En general, damos el nombre de **carga puntual** a todo cuerpo electrizado cuando no se tienen en cuenta sus dimensiones.

Las cargas eléctricas pueden ser:

- **Positivas:** arbitrariamente se dio este nombre a la carga adquirida por el vidrio frotado. Los protones tienen esta carga.
- **Negativas:** es la carga que adquiere el ámbar (resina fosilizada) por frotamiento y de ella son portadores los electrones.

##### Propiedades de la carga eléctrica

1. La carga eléctrica es una magnitud física cuya unidad en el S.I. es el culombio (C), en honor al científico francés Charles Coulomb (1736-1806).
2. Las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo contrario se atraen.
3. La carga se conserva: en la electrización no se crea carga, solamente se transmite de unos cuerpos a otros, de forma que la carga total permanece constante (**principio de conservación de la carga eléctrica**).
4. La carga está **cuantizada**: se presenta como un múltiplo entero (N) de la carga elemental (e) que es la carga más pequeña que puede presentarse libremente en la naturaleza. Esta carga es la del electrón, siendo su valor  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Así, el valor de la carga eléctrica de cualquier cuerpo electrizado será  $Q = \pm N \cdot e$ .
5. La electrización de un cuerpo consiste en que éste pierda o gane electrones quedando cargado positiva o negativamente, respectivamente.

##### Ley de Coulomb

Esta ley establece las características que presenta la interacción entre cargas puntuales:

*“La fuerza con que se atraen o se repelen dos cuerpos cargados es directamente proporcional al producto de dichas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”.*

$$F = K \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} \quad \text{módulo del vector fuerza electrostática}$$

La expresión vectorial de la fuerza electrostática entre dos cargas puntuales puede escribirse de la siguiente forma:

$$\vec{F} = K \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{vector fuerza electrostática [3.5]}$$

Donde:

K es la llamada constante eléctrica.

“**r**” es módulo del vector  $\vec{r}$  (que es la distancia que separa a las dos cargas que interaccionan)

El vector  $\vec{r}$  es el vector que va de la carga fuente a la carga testigo

Y  $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector  $\vec{r}$  y por tanto un vector unitario dirigido de la carga fuente a la carga testigo (fig. 1.2).

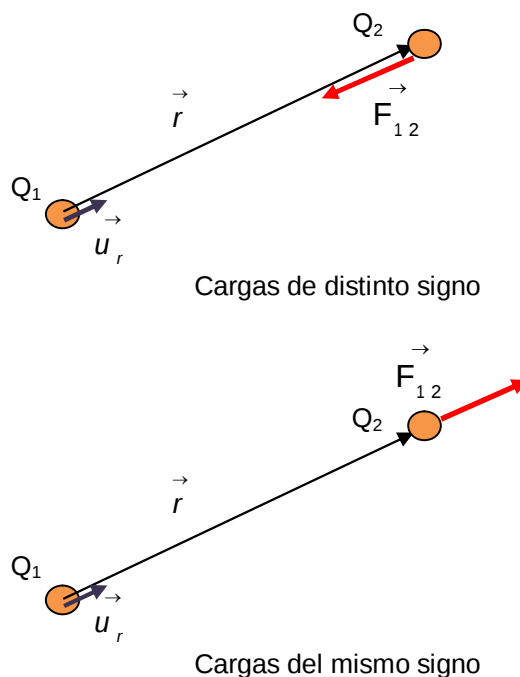


Figura 3.9

A partir de estas características, deducimos las siguientes **consecuencias**:

- o La fuerza de interacción eléctrica puede ser de atracción (cargas de distinto signo), o de repulsión (cargas del mismo signo).
- o Es una fuerza central porque.....
- o Es una fuerza de largo alcance.
- o El valor de la constante eléctrica  $K$  no es una constante universal puesto que su valor depende del medio interpuesto entre las cargas que interaccionan. Por tanto la interacción eléctrica entre dos cargas sí depende del medio en el que se encuentran dichas cargas.
- o La constante eléctrica es máxima en el vacío y vale aproximadamente:

$$K(\text{vacío}) = K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

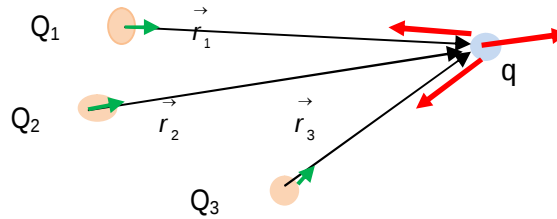
Por tanto la interacción eléctrica entre dos cargas es máxima cuando estas están en el vacío, y disminuye cuando se encuentran en un medio material.

La constante eléctrica puede expresarse en función de otra constante, la denominada constante dieléctrica  $\epsilon$ . La relación entre ambas es:

$$K = \frac{1}{4 \pi \epsilon}$$

- o Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las cargas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.
- o La ley de Coulomb solamente es válida para cargas puntuales y para cuerpos finitos de forma esférica que estén alejados, es decir, cuando el radio de las esferas es despreciable frente a la distancia entre sus centros.
- o **Principio de superposición:** Las fuerzas ejercidas entre las cargas son aditivas lo cual significa que la fuerza resultante sobre una determinada carga es igual a la suma vectorial de las fuerzas que otras cargas. Esta propiedad recibe el nombre de **principio de superposición** y se puede enunciar así:

Si una carga está sometida simultáneamente a varias fuerzas independientes, la fuerza resultante se obtiene sumando vectorialmente dichas fuerzas.



$$\vec{F}_{Rte} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = K \frac{Q_1 \cdot q}{r_1^2} \vec{u}_{r1} + K \frac{Q_2 \cdot q}{r_2^2} \vec{u}_{r2} + \dots + K \frac{Q_n \cdot q}{r_n^2} \vec{u}_{rn}$$

Figura 3.10

### EJEMPLO 3º

Dos cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  se encuentran en el vacío en las posiciones (0,0) m y (-4,0) m.

- Dibuja la fuerza que ejerce cada una de estas cargas sobre una tercera carga  $Q_3$  situada en la posición (0,3) m. Dibuja también la fuerza resultante que ejercen las dos primeras cargas sobre la tercera.  $Q_1 = 3 \mu\text{C}$   $Q_2 = -5 \mu\text{C}$   $Q_3 = -1 \mu\text{C}$
- Calcula el valor de cada una de estas fuerzas.

## 5. INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO E INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO

Recordemos que los campos de fuerzas se representan gráficamente mediante las denominadas líneas de fuerza, que son líneas imaginarias tangentes en todo punto al vector que caracteriza al campo de fuerzas, denominado vector intensidad de campo. En esta pregunta veremos quién es este vector tanto en el campo gravitatorio como en el campo eléctrico.

### 5.A INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO.

Definimos el **vector intensidad de campo gravitatorio o vector campo gravitatorio** en un punto de un campo gravitatorio como la fuerza gravitatoria por unidad de masa en dicho punto, es decir, a la fuerza que se ejercería sobre una masa de 1 Kg colocada en dicho punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \quad [3.6]$$

Si conocemos el valor de esta magnitud en un punto cualquiera del campo, podemos determinar la fuerza gravitatoria ejercida sobre cualquier masa puntual  $m$  colocada en dicho punto a partir de la ecuación [1.8]:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \quad [3.7]$$

Es decir, multiplicando la masa testigo  $m$  por el valor del vector intensidad de campo en dicho punto.

Si el campo gravitatorio es creado por una masa puntual  $M$ , entonces el **vector intensidad de campo gravitatorio o vector campo gravitatorio** creado por esta masa fuente en un punto cualquiera de su alrededor valdrá:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_r}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \quad g = G \frac{M}{r^2} \quad [3.8]$$

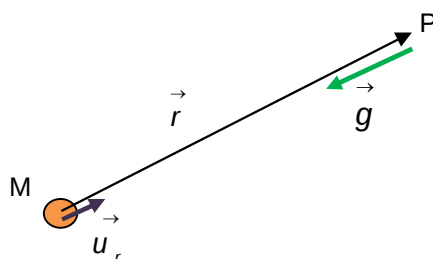


Figura 3.11

- o El vector intensidad de campo gravitatorio creado por una masa puntual en cualquier punto de su campo es un vector radial dirigido hacia la masa fuente como se puede ver en la figura anterior.
- o La intensidad de campo gravitatorio se mide en unidad de fuerza dividida por unidad de masa que, en el SI de unidades sería:

$$\frac{N}{Kg} = \frac{Kg \cdot \frac{m}{s^2}}{Kg} = \frac{m}{s^2}$$

Que como vemos es la unidad de aceleración.

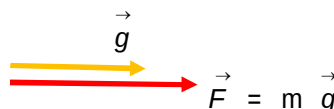
- o Si observamos el módulo del vector intensidad de campo gravitatorio creado por una masa puntual en cualquier punto de su alrededor, vemos que es directamente proporcional a la masa fuente  $M$ , e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay entre la cada punto y la masa fuente.

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

- o Si conocemos el valor de la intensidad de campo gravitatorio en un punto, podemos calcular el valor de la fuerza que experimentaría una masa cualquiera testigo  $m$  al colocarla en dicho punto. Para ello bastaría con multiplicar el valor de la masa testigo por el valor del campo.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m \vec{g}$$

- o Si observamos la expresión anterior  $\vec{F} = m \vec{g}$ , podemos comprobar que el vector intensidad de campo gravitatorio en un punto y la fuerza que ejerce ese campo sobre una masa testigo  $m$  colocada en dicho punto, son vectores de la misma dirección y sentido.



- o Recordemos que un campo de fuerzas se puede representar gráficamente mediante las denominadas **líneas de campo** o **líneas de fuerza**. Por tanto el campo gravitatorio creado por una masa puntual, como campo de fuerzas que es, también se representará mediante las líneas de fuerza, que son tangentes en cada punto al vector que caracteriza al campo. Teniendo en cuenta que el vector que caracteriza al campo es el vector intensidad de campo, las líneas de fuerza del campo gravitatorio de una masa puntual  $M$  tienen la siguiente forma:

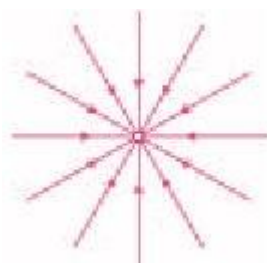


Figura 3.12

Observa como la densidad de líneas de fuerza disminuye al alejarnos de la masa fuente, es decir, las líneas de fuerza se van separando, y esto nos indica que el campo es menos intenso.

- o **Principio de superposición para el campo gravitatorio:** Si el campo gravitatorio está creado por varias masas puntuales  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , la intensidad de campo gravitatorio en un punto dado se determina sumando vectorialmente las intensidades de campo gravitatorio creado por cada masa por separado en dicho punto:

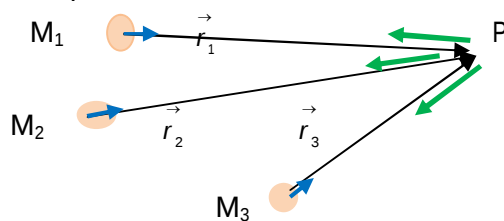


Figura 3.13

$$\vec{g}_{Rte} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_n = -G \frac{M_1}{r_1^2} \vec{u}_{r1} - G \frac{M_2}{r_2^2} \vec{u}_{r2} - \dots - G \frac{M_n}{r_n^2} \vec{u}_{rn}$$

- o Si la masa fuente del campo gravitatorio es la tierra, y la consideramos como una masa puntual, entonces la intensidad de campo gravitatorio en cualquier punto de su superficie o por encima de ella es:

$$\boxed{\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r} \quad \boxed{g = G \frac{M_T}{r^2} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}} \quad \text{Donde } r = R_T + h \quad [3.9]$$

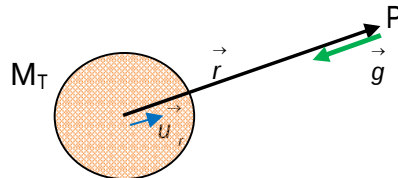


Figura 3.14

A esta magnitud es a la que llamamos aceleración de la gravedad terrestre, que como podemos observar no es constante sino que disminuye con el cuadrado de la distancia al centro de la tierra.

Podemos obtener el valor de esta magnitud en la superficie de la tierra que, como sabemos, es de  $9,8 \text{ m/s}^2$ :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$$

$$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

$$R_T = 6380 \text{ Km} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g(\text{superficie}) = g_o = G \frac{M_T}{R_T^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(6,38 \cdot 10^6)^2} = 9,799 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### 5.B INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO.

Definimos el **vector intensidad de campo eléctrico o vector campo eléctrico** en un punto de un campo eléctrico como la fuerza eléctrica por unidad de carga positiva en dicho punto, es decir, a la fuerza que se ejercería sobre una carga de +1 C colocada en dicho punto.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [3.10]$$

Si conocemos el valor de esta magnitud en un punto cualquiera del campo, podemos determinar la fuerza eléctrica ejercida sobre cualquier carga puntual  $q$  colocada en dicho punto a partir de la ecuación [1.8]:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad [3.11]$$

Es decir, multiplicando la carga testigo  $q$  por el valor del vector intensidad de campo en dicho punto.

Si el campo eléctrico es creado por una carga puntual  $Q$ , entonces el **vector intensidad de campo eléctrico o vector campo eléctrico** creado por esta carga fuente en un punto cualquiera de su alrededor valdrá:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{k \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r}{q} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \quad E = k \frac{|Q|}{r^2} \quad [3.12]$$

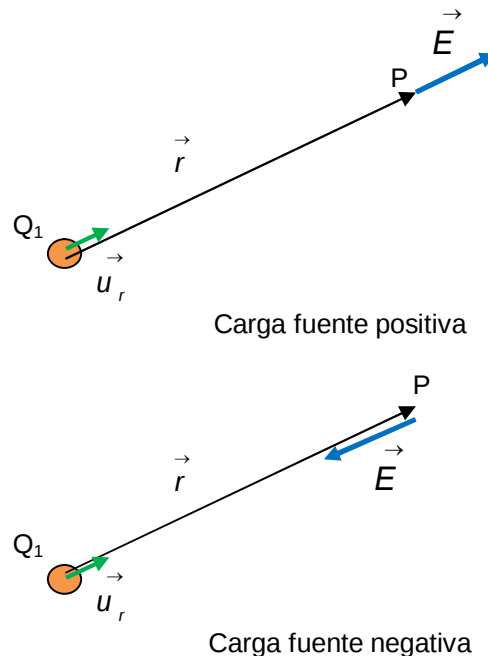


Figura 3.15

- o El vector intensidad de campo eléctrico creado por una carga puntual en cualquier punto de su campo es un vector radial, alejándose de la carga fuente, si la carga es positiva, y dirigido hacia la carga fuente, si la carga es negativa, tal y como se puede ver en las figuras anteriores.
- o La intensidad de campo eléctrico se mide en unidad de fuerza dividida por unidad de carga que, en el SI de unidades sería:

$$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

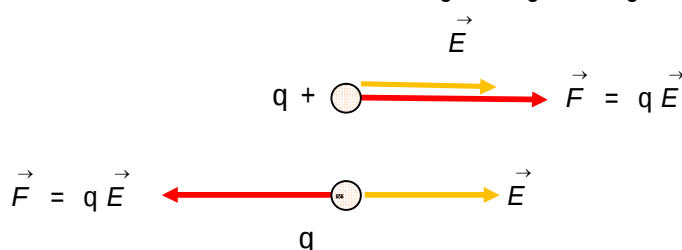
- o Si observamos el módulo del vector intensidad de campo eléctrico creado por una carga puntual en cualquier punto de su alrededor, vemos que es directamente proporcional a la carga fuente  $Q$ , e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay entre la cada punto y la carga fuente.

$$E = K \frac{|Q|}{r^2}$$

- o Si conocemos el valor de la intensidad de campo eléctrico en un punto, podemos calcular el valor de la fuerza que experimentaría una carga testigo cualquiera  $q$  al colocarla en dicho punto. Para ello bastaría con multiplicar el valor de la carga testigo por el valor del campo.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{F} = q \vec{E}$$

- o Si observamos la expresión anterior  $\vec{F} = q \vec{E}$ , podemos comprobar que el vector intensidad de campo eléctrico en un punto y la fuerza que ejerce ese campo sobre una carga testigo  $q$  colocada en dicho punto, son vectores de la misma dirección y sentido, si la carga testigo es positiva, o de sentidos contrarios, si la carga testigo es negativa.



- o Recordemos que un campo de fuerzas se puede representar gráficamente mediante las denominadas **líneas de campo** o **líneas de fuerza**. Por tanto el campo eléctrico creado por una carga puntual  $Q$ , como campo de fuerzas que es, también se representará mediante las líneas de fuerza, que son tangentes en cada punto al vector que caracteriza al campo. Teniendo en cuenta que el vector que caracteriza al campo eléctrico es el vector intensidad de campo, las líneas de fuerza del campo eléctrico de una carga puntual  $Q$  tienen la siguiente forma:

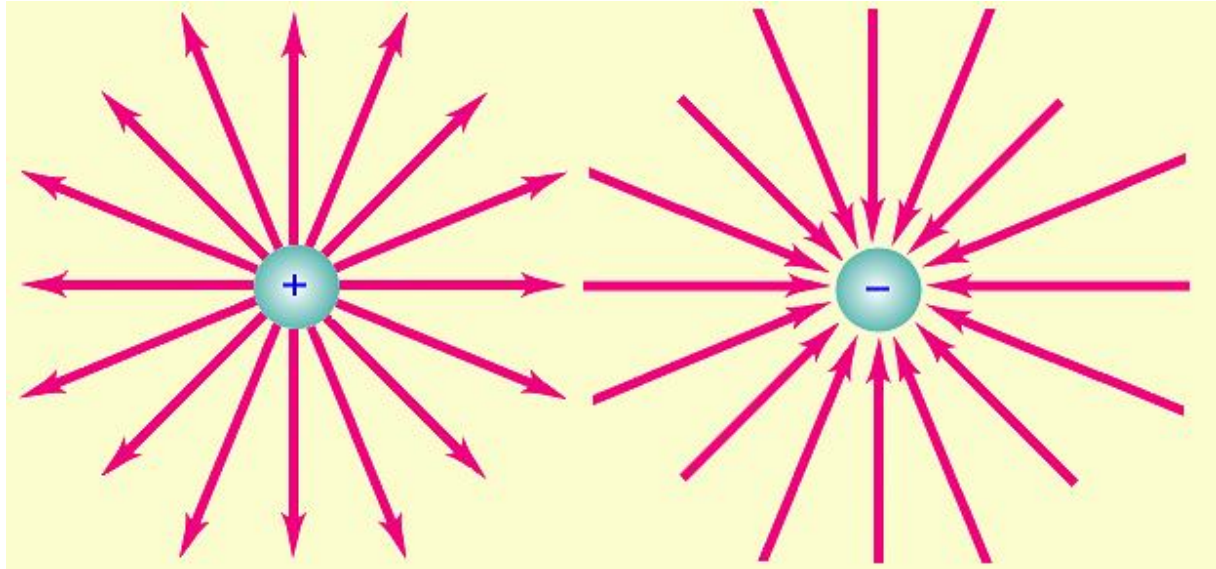


Figura 3.16

Se dice que las cargas positivas son fuentes de líneas de campo y que las cargas negativas son sumideros de líneas de campo.

Observa como la densidad de líneas de fuerza disminuye al alejarnos de la masa fuente, es decir, las líneas de fuerza se van separando, y esto nos indica que el campo es menos intenso.

- o **Principio de superposición para el campo eléctrico:** Si el campo eléctrico está creado por varias cargas puntuales  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , la intensidad de campo eléctrico en un punto dado se determina sumando vectorialmente las intensidades de campo eléctrico creado por cada carga por separado en dicho punto:

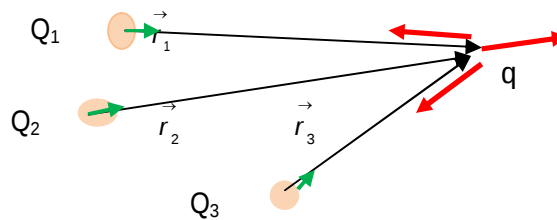


Figura 3.17

$$\vec{E}_{Rte} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = K \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r1} + K \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r2} + \dots + K \frac{Q_n}{r_n^2} \vec{u}_{rn}$$

#### EJEMPLO 4º

Dos masas iguales de 10 t se encuentran respectivamente en el origen de coordenadas y en el punto (0, -3) m.

- Dibuja la intensidad de campo gravitatorio de cada una de las masas en el punto (4,0) m. Dibuja también la intensidad de campo resultante en dicho punto debido a la acción de ambas masas.
- Calcula el valor de los tres campos.

- c) Dibuja y calcula la fuerza resultante que ejercerían las dos masas sobre una tercera masa de 2 Kg al colocarla en la posición (4,0) m.

**EJEMPLO 5º**

Dos cargas eléctricas de  $Q_1 = 5 \mu\text{C}$  y  $Q_2 = -5 \mu\text{C}$  se encuentran respectivamente en los puntos (3,0) y (-3,0) m.

- Dibuja el campo eléctrico creado por cada una de las cargas y el campo resultante en el punto  $P = (0,4)$  m.
- Calcula el valor de cada uno de los campos anteriores suponiendo que las cargas están en el vacío.
- Dibuja y calcula la fuerza eléctrica total que ejercerían las dos cargas anteriores sobre una tercera carga  $q = 10 \text{ C}$  colocada en el punto P.

**EJEMPLO 6º**

Considera el campo gravitatorio creado por la tierra.

- Calcula su valor a 5000 Km de altura.
- Calcula su valor a una altura de seis veces el radio terrestre.
- ¿A qué altura habría que subir para que disminuyera al 20 % de lo que vale en su superficie?
- ¿A qué altura de la superficie de la tierra el campo disminuye un 20 % de lo que vale en su superficie?

**EJEMPLO 7º**

Un planeta tiene doble masa que la tierra y también doble radio. ¿Qué relación existe entre el campo gravitatorio de este planeta en su superficie y el de la tierra, también en su superficie?

**EJEMPLO 8º**

Dos masas  $M_1$  y  $M_2$  se encuentran separadas una distancia  $d$ . Analiza si hay algún punto en el que se anule el campo gravitatorio resultante creado por ambas masas.

**EJEMPLO 9º**

Calcula en qué punto se anula el campo gravitatorio resultante creado por dos masas de 10 t y 100 t que están a 10 Km de distancia.

**EJEMPLO 10º**

Calcula en qué punto se anula el campo gravitatorio resultante creado por la tierra y la luna.

**EJEMPLO 11º**

Dos cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  se encuentran separadas una distancia  $d$ . Analiza si hay algún punto en el que se anule el campo eléctrico resultante creado por ambas cargas.

**EJEMPLO 12º**

Calcula en qué punto se anula el campo eléctrico resultante creado por dos cargas de  $4\ \mu\text{C}$  y  $6\ \mu\text{C}$  situadas en el vacío a 40 cm de distancia.

**EJEMPLO 13º**

Calcula en qué punto se anula el campo eléctrico resultante creado por dos cargas de  $-4\ \mu\text{C}$  y  $2\ \mu\text{C}$  situadas en el vacío a 20 cm de distancia.

**EJEMPLO 14º**

Considera un campo gravitatorio uniforme  $\vec{g}$

- Dibuja el vector intensidad de campo gravitatorio en tres puntos distintos de dicho campo.
- ¿En cuál de los tres puntos es mayor el módulo del campo? ¿por qué?
- Coloca una masa  $m$  en cada uno de los puntos y dibuja la fuerza gravitatoria que ejerce el campo sobre ella. ¿Dónde es mayor la fuerza?
- Dibuja como serán aproximadamente las líneas del campo gravitatorio terrestre en el aula.

**EJEMPLO 15º**

Considera un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$

- Dibuja el vector intensidad de campo eléctrico en tres puntos distintos de dicho campo.
- ¿En cuál de los tres puntos es mayor el módulo del campo? ¿por qué?
- Coloca una carga positiva  $q$  en cada uno de los puntos y dibuja la fuerza eléctrica que ejerce el campo sobre ella. ¿Dónde es mayor la fuerza?
- Coloca una carga negativa  $q$  en cada uno de los puntos y dibuja la fuerza eléctrica que ejerce el campo sobre ella. ¿Dónde es mayor la fuerza?

**EJEMPLO 16º**

Una partícula de 20 g de masa y carga positiva  $q$ , está suspendida del techo mediante un hilo. En la zona en la que está la partícula se aplica un campo eléctrico uniforme y horizontal de 100 N/C. En estas condiciones el hilo se desvía  $20^\circ$  respecto a la vertical hasta alcanzar de nuevo el equilibrio.

- Calcula el valor de la carga  $q$ .
- ¿Qué habría ocurrido si la carga  $q$  hubiera tenido carga negativa?

## 6. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Recordemos que tanto la fuerza gravitatoria como la fuerza eléctrica son fuerzas conservativas, y por tanto, cada una de ellas tiene asociada una función energía potencial tal que cuando una masa o carga se desplace entre dos posiciones de un campo gravitatorio o eléctrico, respectivamente, el trabajo realizado por la fuerza del campo (gravitatorio o eléctrico) coincide con la variación de la energía potenciales de la masa o carga entre ambas posiciones pero cambiada de signo.

En esta pregunta veremos las expresiones de ambas energías potenciales.

### 6.A ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

El hecho de que la fuerza gravitatoria sea conservativa permite asociarle la magnitud escalar energía potencial gravitatoria de modo que podemos calcular el trabajo realizado por aquella entre dos puntos dados, aplicando el teorema de la energía potencial:

$$W_c = -\Delta E_p \quad [3.13]$$

Se puede demostrar que la expresión de la energía potencial de una masa testigo  $m$  en un punto del campo creado por una masa puntual  $M$  vale:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r} \quad [3.14]$$

De la expresión anterior podemos deducir los siguientes comentarios:

- o La energía potencial gravitatoria entre dos masas tiene signo negativo, lo que indica que se trata de una fuerza de atracción.
- o El signo  $-$  en la expresión anterior también nos indica que si la masa testigo  $m$  se aleja de la masa fuente  $M$ , la energía potencial aumenta acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

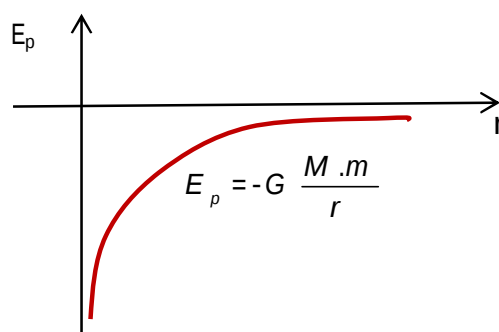


Figura 3.18

- o En la gráfica anterior puede observarse que el origen de energía (lugar donde la energía vale 0) está en el infinito.
- o Si la masa  $m$  se traslada desde cualquier punto  $P$  hasta el infinito y calculamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en este desplazamiento obtenemos:

$$W_c (P \rightarrow \infty) = E_p(P) - E_p(\infty) = E_p(P)$$

Es decir, la energía potencial gravitatoria de una masa  $m$  en un punto  $P$  del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza gravitatoria) cuando la masa  $m$  se trasladase desde ese punto hasta el infinito.

- o **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más masas puntuales, la energía potencial gravitatoria de una masa puntual  $m$  en un punto del campo, sería la suma escalar de las energías de interacción de la masa  $m$  con cada una de las masas fuente.

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + \dots + E_{pn} = -G \frac{M_1 \cdot m}{r_1} - G \frac{M_2 \cdot m}{r_2} - \dots - G \frac{M_n \cdot m}{r_n}$$

- o Si la masa fuente es la tierra y la tratamos como una masa puntual, la energía potencial gravitatoria de cualquier masa testigo  $m$  colocada en su superficie o por encima de ella sería:

$$E_p = -G \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \quad [3-15]$$

- o **Validez de las expresiones de la energía potencial gravitatoria:** Las expresiones que conocemos para la energía potencial gravitatoria de una masa  $m$  situada en un punto del campo gravitatorio terrestre son dos:

$$E_p = -G \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \quad E_p = m g h$$

Pero ¿qué relación hay entre ellas? ¿dónde tienen validez?

La expresión de energía potencial gravitatoria dada por la ecuación [3.15] es válida para cualquier punto exterior a la Tierra, incluidos puntos de su superficie. Sin embargo, si la masa  $m$  se desplaza entre dos puntos muy próximos a la superficie terrestre, la variación de  $g$  es prácticamente inapreciable, pudiendo considerarse constante el campo gravitatorio en tales circunstancias. Sólo en estas condiciones será válida la expresión de la energía potencial gravitatoria terrestre  $m \cdot g \cdot h$ .

La primera expresión o expresión general tiene signo  $-$  y toma como origen de energía el  $\infty$ , la segunda expresión tiene signo  $+$  y toma como origen de energía la superficie terrestre. Pero ambas expresiones tienen en cuenta que la energía potencial gravitatoria aumenta al alejarnos de la tierra. Esto hace que la variación de energía potencial gravitatoria entre dos puntos próximos a la superficie terrestre coincida.

## 6.B ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

El hecho de que la fuerza eléctrica sea conservativa permite asociarle la magnitud escalar energía potencial eléctrica de modo que podemos calcular el trabajo realizado por aquélla entre dos puntos dados, aplicando el teorema de la energía potencial:

$$W_c = -\Delta E_p \quad [3.16]$$

Se puede demostrar que la expresión de la energía potencial de una carga testigo  $q$  en un punto del campo creado por una carga puntual  $Q$  vale:

$$E_p = K \frac{Q \cdot q}{r} \quad [3.17]$$

De la expresión anterior podemos deducir los siguientes comentarios:

- o Si las cargas que interaccionan son del mismo signo, la energía potencial eléctrica es positiva. Esto indica que la interacción entre ellas es de repulsión y también nos indica que si la carga testigo  $q$  se aleja de la carga fuente  $Q$ , la energía potencial disminuye acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

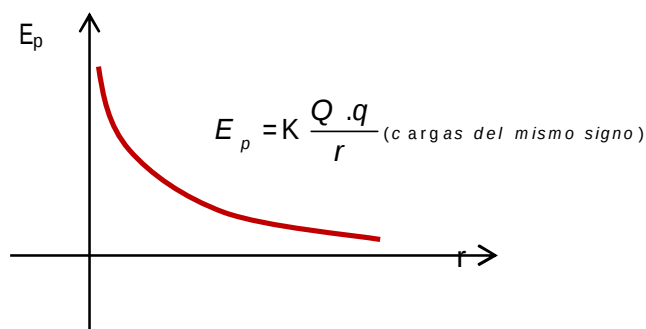


Figura 3.19

- o Si las cargas que interaccionan son de distinto signo, la energía potencial eléctrica es negativa. Esto indica que la interacción entre ellas es de atracción y también nos indica que si la carga testigo  $q$  se aleja de la carga fuente  $Q$ , la energía potencial aumenta acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

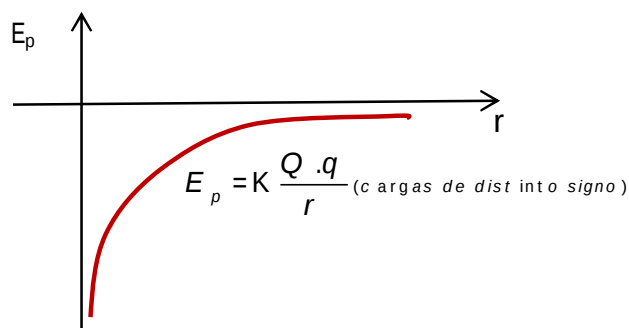


Figura 3.20

- o En las dos gráficas anteriores puede observarse que el origen de energía (lugar donde la energía vale 0) está en el infinito.
- o Si la masa  $q$  se traslada desde cualquier punto  $P$  hasta el infinito y calculamos el trabajo realizado por la fuerza eléctrica en este desplazamiento obtenemos:

$$W_c (P \rightarrow \infty) = E_p(P) - E_p(\infty) = E_p(P)$$

Es decir, la energía potencial eléctrica de una carga  $q$  en un punto  $P$  del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza eléctrica) cuando la masa  $q$  se trasladase desde ese punto hasta el infinito.

- o **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más cargas puntuales, la energía potencial eléctrica de una carga puntual  $q$  en un punto del campo, sería la suma escalar de las energías de interacción de la carga  $q$  con cada una de las cargas fuente.

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + \dots + E_{pn} = K \frac{Q_1 \cdot q}{r_1} + K \frac{Q_2 \cdot q}{r_2} + \dots + K \frac{Q_n \cdot q}{r_n}$$

### EJEMPLO 17º

Considera el campo creado por dos cargas puntuales  $Q_1$  y  $Q_2$  de 4 y -5  $\mu\text{C}$  cada una están en el vacío situadas respectivamente en el origen de coordenadas y en el punto (0,6) m.

- Calcula la energía potencial eléctrica que tendría una tercera carga  $q$  de 2  $\mu\text{C}$  colocada en el punto  $A = (10,0)$  m
- Si la carga  $q$  se traslada desde el punto  $A$  anterior al punto  $B = (0, -3)$  m, ¿aumenta o disminuye su energía potencial eléctrica?
- Calcula el trabajo que realizaría el campo eléctrico sobre la carga  $q$  al desplazarse de  $A$  a  $B$ . ¿Qué indica el signo de este trabajo?

### EJEMPLO 18º

Imagina que desde una altura de 10.000 Km se deja caer hacia la tierra a una masa  $m$ .

- Despreciando los efectos del rozamiento, analiza energéticamente como sería su movimiento de caída hasta llegar a la superficie terrestre.
- Calcula la velocidad con la que llegaría a la superficie.

## 7. POTENCIAL GRAVITATORIO Y POTENCIAL ELÉCTRICO

### 7. A POTENCIAL GRAVITATORIO.

El carácter conservativo del campo gravitatorio permite asociar a la fuerza gravitatoria por unidad de masa  $\vec{g}$  una magnitud escalar a la que se denomina **potencial gravitatorio**  $V$  en un punto del campo gravitatorio y que se define como la energía potencial gravitatoria que posee la unidad de masa situada en dicho punto, es decir, la energía potencial gravitatoria que tendría una masa de 1 Kg colocada en dicho punto:

$$V = \frac{E_p}{m} \quad [3.18]$$

De esta definición podemos concluir que si conocemos el valor del potencial gravitatorio en un punto del campo, podemos conocer la energía potencial gravitatoria de una masa testigo  $m$  al colocarla en dicho punto, bastaría con multiplicar la masa testigo  $m$  por el valor del potencial.

$$E_p = m V \quad [3.19]$$

Para el campo gravitatorio creado por una masa puntual  $M$ , el potencial gravitatorio en un punto se puede expresar:

$$V = \frac{E_p}{m} = \frac{-G \frac{M \cdot m}{r}}{m} = -G \frac{M}{r} \quad [3.20]$$

De la expresión anterior podemos deducir las siguientes conclusiones:

- o El potencial gravitatorio es una magnitud física escalar que se mide en unidades de energía dividido entre unidades de masa, y que en el sistema internacional de unidades sería:

$$\frac{J}{Kg}$$

Esta unidad no recibe ningún nombre especial.

- o El potencial gravitatorio creado por una masa puntual en cualquier punto de su campo tiene signo negativo y aumenta al alejarnos de la masa fuente acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en la gráfica siguiente.

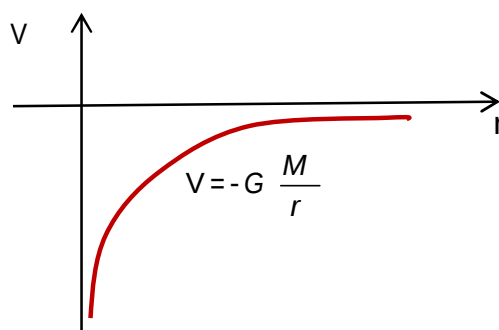


Figura 3.21

- o Todos los puntos que equidistan de la masa fuente tienen el mismo valor del potencial, es decir todos los puntos de una esfera con centro en la masa fuente  $M$  y con radio  $r$  tienen el mismo valor del potencial y forman lo que se denomina una superficie equipotencial.

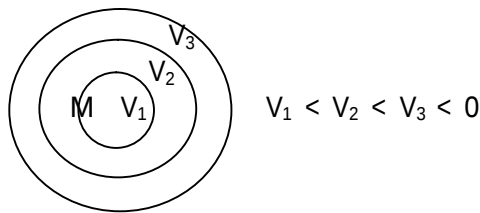


Figura 3.22

- o La diferencia de potencial (ddp) gravitatorio entre dos puntos del campo gravitatorio creado por una masa puntual  $M$  valdría:

$$V_B - V_A = \left( -G \frac{M}{r_B} \right) - \left( -G \frac{M}{r_A} \right) = -G M \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = G M \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

- o El potencial gravitatorio en un punto  $P$  del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza gravitatoria) cuando una masa de 1 Kg se trasladase desde ese punto hasta el infinito.
- o **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más masas puntuales, el potencial gravitatorio en un punto del campo, sería la suma escalar de los potenciales de cada una de las masas fuente.

$$V_p = V_{p1} + V_{p2} + \dots + V_{pn} = -G \frac{M_1}{r_1} - G \frac{M_2}{r_2} - \dots - G \frac{M_n}{r_n}$$

- o Si la masa fuente es la tierra y la tratamos como una masa puntual, el potencial gravitatorio de creado por la tierra en un punto cualquiera de su superficie o por encima de ella sería:

$$V = -G \frac{M_T}{R_T + h} \quad [3.21]$$

## 7. B POTENCIAL ELÉCTRICO.

Igual que ocurre con el campo gravitatorio, el carácter conservativo del campo eléctrico permite asociar a la fuerza eléctrica una magnitud escalar a la que se denomina **potencial eléctrico**  $V$  en un punto del campo eléctrico y que se define como la energía potencial eléctrica que posee la unidad de carga positiva situada en dicho punto, es decir, la energía potencial eléctrica que tendría una carga de +1 C colocada en dicho punto:

$$V = \frac{E_p}{q} \quad [3.22]$$

De esta definición podemos concluir que si conocemos el valor del potencial eléctrico en un punto del campo, podemos conocer la energía potencial eléctrica de una carga testigo  $q$  al colocarla en dicho punto, bastaría con multiplicar la carga testigo  $q$  por el valor del potencial.

$$E_p = q V \quad [3.23]$$

Para el campo eléctrico creado por una carga puntual  $Q$ , el potencial eléctrico en un punto se puede expresar:

$$V = \frac{E_p}{q} = \frac{K \frac{Q \cdot q}{r}}{q} = K \frac{Q}{r} \quad [3.24]$$

De la expresión anterior podemos deducir las siguientes conclusiones:

- o El potencial eléctrico es una magnitud física escalar que se mide en unidades de energía dividido entre unidades de carga, y que en el sistema internacional de unidades sería:

$$\frac{J}{C} = \text{Voltio (V)}$$

Esta unidad recibe el nombre de voltio.

- o El potencial gravitatorio creado por una carga puntual  $Q$  en cualquier punto de su campo tiene signo positivo si la carga es positiva y disminuye al alejarnos de ella acercándose al valor 0 para una distancia infinita, y tiene signo negativa si la carga fuente es negativa y aumenta al alejarnos de la ella acercándose al valor 0 para una distancia infinita, tal y como se puede ver en las gráficas siguientes.

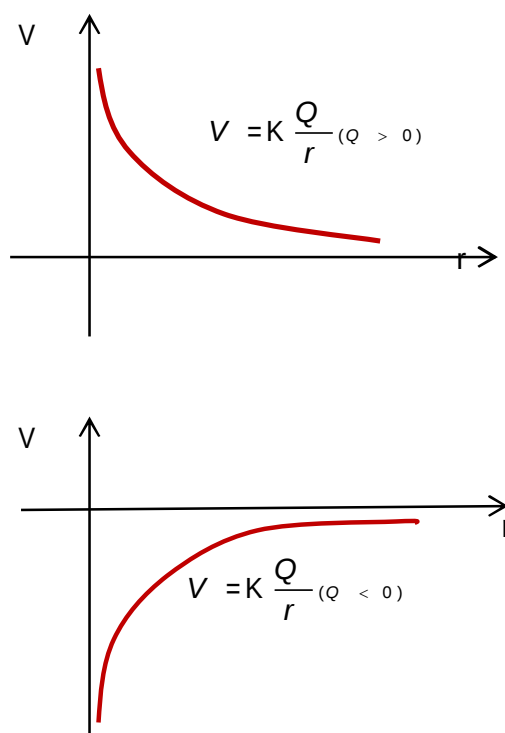


Figura 3.23

- o La diferencia de potencial (ddp) eléctrica entre dos puntos del campo eléctrico creado por una carga puntual  $Q$  valdría:

$$V_B - V_A = K \frac{Q}{r_B} - K \frac{Q}{r_A} = K Q \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

- o Todos los puntos que equidistan de la carga fuente tienen el mismo valor del potencial, es decir todos los puntos de una esfera con centro en la carga fuente  $Q$  y con radio  $r$  tienen el mismo valor del potencial eléctrico y forman lo que se denomina una superficie equipotencial.

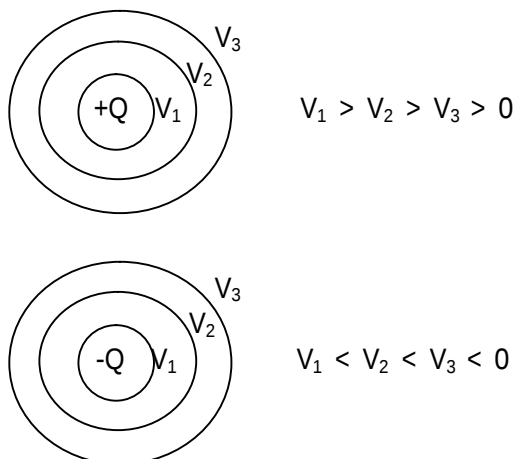


Figura 3.24

- o El potencial eléctrico en un punto  $P$  del campo puede interpretarse como el trabajo que realizaría el campo (fuerza eléctrica) por unidad de carga positiva, es decir, cuando una carga de  $+1$  C se traslada desde ese punto hasta el infinito.
- o **Principio de superposición:** si el campo es creado por dos o más cargas puntuales, el potencial eléctrico en un punto del campo, sería la suma escalar de los potenciales de cada una de las cargas fuente.

$$V_p = V_{p1} + V_{p2} + \dots + V_{pn} = K \frac{Q_1}{r_1} + K \frac{Q_2}{r_2} + \dots + K \frac{Q_n}{r_n}$$

**EJEMPLO 19º**

Dos masas iguales de 10 t se encuentran en las posiciones  $(-4,0)$  m y  $(0,4)$  m.

- Calcula el potencial gravitatorio resultante creado por ambas masas en el origen de coordenadas.
- Calcula la energía potencial gravitatoria que tendría una masa de 100 Kg colocada en el origen de coordenadas.

**EJEMPLO 20º**

Dos cargas puntuales de  $-2$  y  $6$  nC ( $1\text{nC} = 10^{-9}$  C) cada una, se encuentran en el vacío respectivamente en las posiciones  $(3,0)$  y  $(-3,0)$  m.

- Calcula el potencial eléctrico resultante en el punto  $P = (0, -4)$  m creado por ambas cargas.
- ¿Dónde tendría más energía potencial eléctrica una carga testigo  $q$ , en el punto  $P$  o en el origen de coordenadas?

**EJEMPLO 21º**

Dos masas puntuales  $M_1$  y  $M_2$  se encuentran a una distancia  $d$ . Analiza si se anulará o no el potencial gravitatorio resultante en algún punto del campo creado por ambas masas.

**EJEMPLO 22º**

Dos cargas puntuales  $Q_1$  y  $Q_2$  se encuentran a una distancia  $d$ . Analiza si se anulará o no el potencial eléctrico resultante en algún punto del campo creado por ambas cargas.

**EJEMPLO 23º**

Dos cargas puntuales  $Q_1 = 3 \text{ nC}$  y  $Q_2 = 6 \text{ nC}$  se encuentran separadas 20 cm.

- a) Calcula el punto dónde se anula el potencial eléctrico resultante creado por las dos cargas.
- b) Calcula el punto dónde se anula el campo eléctrico resultante creado por las dos cargas.

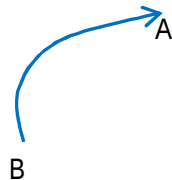
**EJEMPLO 24º**

Repite el problema anterior si se trata de dos cargas  $Q_1 = -3 \text{ nC}$  y  $Q_2 = 9 \text{ nC}$  separadas 40 cm.

## 8. TRABAJO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL GRAVITATORIO Y ELÉCTRICO

### 8. A TRABAJO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL GRAVITATORIO.

Consideremos dos puntos A y B de un campo gravitatorio. Cada uno de estos puntos tendrá un valor definido para el potencial gravitatorio  $V_A$  y  $V_B$ . Supongamos que una masa testigo  $m$  se traslada desde A hasta B. Por el teorema de la energía potencial sabemos que el trabajo que realiza el campo gravitatorio (fuerza conservativa) sobre la masa  $m$  en este desplazamiento coincide con la variación de energía potencial gravitatoria de la masa  $m$  entre ambas posiciones pero cambiada de signo:



$$W_{A \text{ campo}}^B = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Y si tenemos en cuenta la relación entre el potencial gravitatorio y la energía potencial  $E_p = m V$  podemos escribir:

$$W_{A \text{ campo}}^B = -\Delta E_p = -[E_{pB} - E_{pA}] = -[mV_B - mV_A] = -m[V_B - V_A] = -m \Delta V$$

Esta ecuación nos permite calcular el trabajo del campo a partir de la diferencia de potencial:

$$W_{A \text{ campo}}^B = -m[V_B - V_A] = -m \Delta V \quad [3.25]$$

Si llamamos trabajo externo o trabajo que hay que realizar al trabajo realizado por una fuerza opuesta a la del campo y tenemos en cuenta que ambos trabajos son de signo opuesto, obtenemos:

$$W_{A \text{ externo}}^B = -W_{A \text{ campo}}^B = m[V_B - V_A] = m \Delta V \quad [3.26]$$

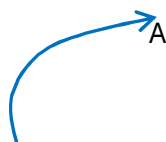
Por otro lado, si despejamos en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores obtenemos la interpretación física de la diferencia de potencial gravitatoria entre dos puntos de un campo:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{-W_{A \text{ campo}}^B}{m} = \frac{W_{A \text{ externo}}^B}{m} \quad [3.27]$$

*La diferencia de potencial gravitatoria entre dos puntos de un campo es el trabajo realizado por el campo por unidad de masa pero cambiado de signo, o bien, el trabajo externo por unidad de masa.*

### 8. B TRABAJO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL ELÉCTRICO.

Consideremos dos puntos A y B de un campo eléctrico. Cada uno de estos puntos tendrá un valor definido para el potencial eléctrico  $V_A$  y  $V_B$ . Supongamos que una carga testigo  $q$  se traslada desde A hasta B. Por el teorema de la energía potencial sabemos que el trabajo que realiza el campo eléctrico (fuerza conservativa) sobre la carga  $q$  en este desplazamiento coincide con la variación de energía potencial eléctrica de la carga  $q$  entre ambas posiciones pero cambiada de signo:



$$W_{A \text{ campo}}^B = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

B

Y si tenemos en cuenta la relación entre el potencial eléctrico y la energía potencial  $E_p = qV$  podemos escribir:

$$W_{A \text{ campo}}^B = -\Delta E_p = -[E_{pB} - E_{pA}] = -[qV_B - qV_A] = -q[V_B - V_A] = -q\Delta V$$

Esta ecuación nos permite calcular el trabajo del campo a partir de la diferencia de potencial:

$$W_{A \text{ campo}}^B = -q[V_B - V_A] = -q\Delta V \quad [3.28]$$

Si llamamos trabajo externo o trabajo que hay que realizar al trabajo realizado por una fuerza opuesta a la del campo y tenemos en cuenta que ambos trabajos son de signo opuesto, obtenemos:

$$W_{A \text{ externo}}^B = -W_{A \text{ campo}}^B = q[V_B - V_A] = q\Delta V \quad [3.29]$$

Por otro lado, si despejamos en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores obtenemos La interpretación física de la diferencia de potencial eléctrica entre dos puntos de un campo:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{-W_{A \text{ campo}}^B}{q} = \frac{W_{A \text{ externo}}^B}{q} \quad [3.30]$$

*La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un campo es el trabajo realizado por el campo por unidad de carga positiva pero cambiado de signo, o bien, el trabajo externo por unidad de carga positiva.*

### EJEMPLO 25º

Dos cargas puntuales de -2 y 6 nC ( $1\text{nC} = 10^{-9}\text{ C}$ ) cada una, se encuentran en el vacío respectivamente en las posiciones (3,0) y (-3,0) m.

- Calcula la diferencia de potencial eléctrico creado por las dos cargas entre los puntos A = (1, 4) m y B = (0,0) m.
- Calcula el trabajo realizado por el campo y el trabajo externo cuando una carga  $q = 10\text{ C}$  se traslade del punto A al punto B.

### EJEMPLO 26º

Un electrón inicialmente en reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 10 KV.

- Analiza las transformaciones energéticas del electrón a lo largo de su movimiento.
- Calcula la velocidad adquirida por el electrón una vez acelerado.

**EJEMPLO 27º**

Se denomina electronvoltio (eV) a la energía cinética que adquiere un electrón cuando, estando en reposo, es acelerado por una diferencia de potencial de 1 V.

- a) Calcula la energía cinética que adquiere el electrón en estas condiciones.
- b) ¿A cuántos julios equivale 1 eV?

**EJEMPLO 28º**

Repite el problema anterior suponiendo que es un protón el que se acelera.

## 9. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN CAMPO DE FUERZAS CONSERVATIVO

### 9. A SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES EN EL CAMPO GRAVITATORIO

Recordemos que tanto el campo gravitatorio como el campo eléctrico son campos vectoriales de fuerzas y por tanto se pueden representar gráficamente mediante las líneas de campo o líneas de fuerza que son.....

Pero, también sabemos, que ambos campos son campos de fuerzas conservativos, y esto nos permite completar su representación gráfica mediante la introducción de un nuevo concepto: el de superficies equipotenciales.

Se denominan superficies equipotenciales en un campo de fuerzas conservativo, a las superficies imaginarias formadas por todos aquellos puntos que tienen el mismo valor del potencial (gravitatorio o eléctrico).

Por ejemplo, si se trata del campo gravitatorio creado por una masa puntual  $M$ , sabemos que el valor del potencial en cualquier punto de su campo vale:

$$V = -G \frac{M}{r}$$

que, como ya dijimos en una pregunta anterior, los puntos que tienen el mismo valor del potencial gravitatorio son los que equidistan de la masa fuente, es decir, todos los puntos situados en una esfera concéntrica con la masa fuente. Por tanto, las superficies equipotenciales del campo gravitatorio creado por una masa puntual  $M$  son esferas concéntricas con ella, tal y como se observa en la figura siguiente:

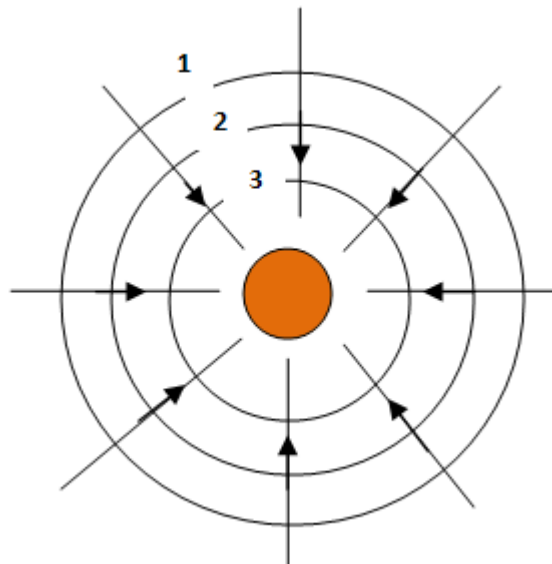


Figura 3.25

En este esquema, observamos que las líneas de campo gravitatorio son perpendiculares a las superficies equipotenciales y se dirigen en el sentido de máximo decrecimiento del potencial gravitatorio, es decir,  $V_1 > V_2 > V_3$ .

Si se trata del campo eléctrico creado por una carga puntual  $Q$ , podemos afirmar también que las superficies equipotenciales son esferas concéntricas con la carga fuente:

$$V = k \frac{Q}{r}$$

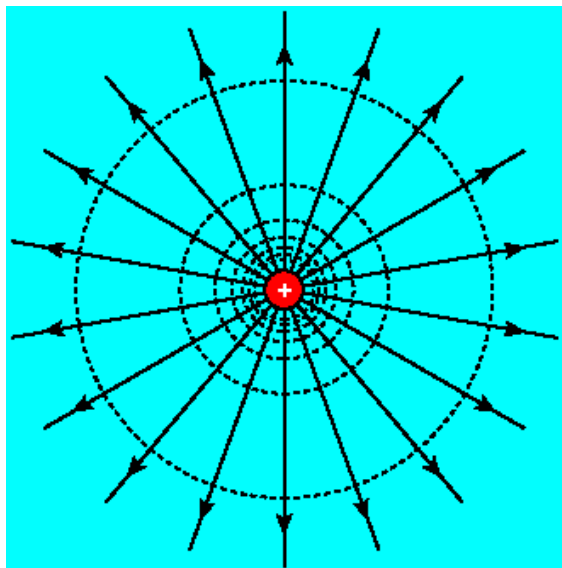


Figura 3.26

Si la carga fuente es negativa lo único que cambiaría sería el sentido de las líneas de fuerza.

Observa que, tanto si la carga fuente es positiva como si es negativa, las líneas de fuerza son perpendiculares a las superficies equipotenciales y siempre van dirigidas hacia los potenciales decrecientes.

De la definición de superficies equipotenciales, podemos deducir lo siguiente:

- o Dos superficies equipotenciales diferentes nunca se cortarán, es decir, no puede haber un mismo punto con dos valores diferentes del potencial.
- o Cuando una masa o una carga testigo se mueva entre dos puntos de una superficie equipotencial, su energía potencial no cambia, y por tanto, no se realiza trabajo sobre ella.

$$E_p = m V \Rightarrow W_{A \text{ campo}}^B = -W_{A \text{ externo}}^B = -\Delta E_p = -m \Delta V = 0$$

$$E_p = q V \Rightarrow W_{A \text{ campo}}^B = -W_{A \text{ externo}}^B = -\Delta E_p = -q \Delta V = 0$$

En el caso del campo gravitatorio, esto es lo que le ocurre a los satélites en su movimiento de rotación alrededor de los planetas, que lo hacen en una órbita que pertenece a la misma superficie equipotencial y por tanto mantienen su movimiento de rotación sin consumir energía.

- o Las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza son siempre perpendiculares en cada uno de los puntos del campo, y además, el potencial decrece en el sentido del campo.
- o Del apartado anterior podemos concluir que, si conocemos la forma de las superficies equipotenciales, podemos deducir la forma que tendrán las líneas de fuerza, y a la inversa. Y esto podemos aplicarlo a un campo de fuerzas uniforme, ya sea gravitatorio o eléctrico. Como las

líneas de fuerza de un campo uniforme son líneas paralelas e igualmente espaciadas, podemos deducir que las superficies equipotenciales serán planos perpendiculares a las líneas de fuerza y paralelos entre sí. En la figura siguiente se ha representado a un campo eléctrico uniforme:

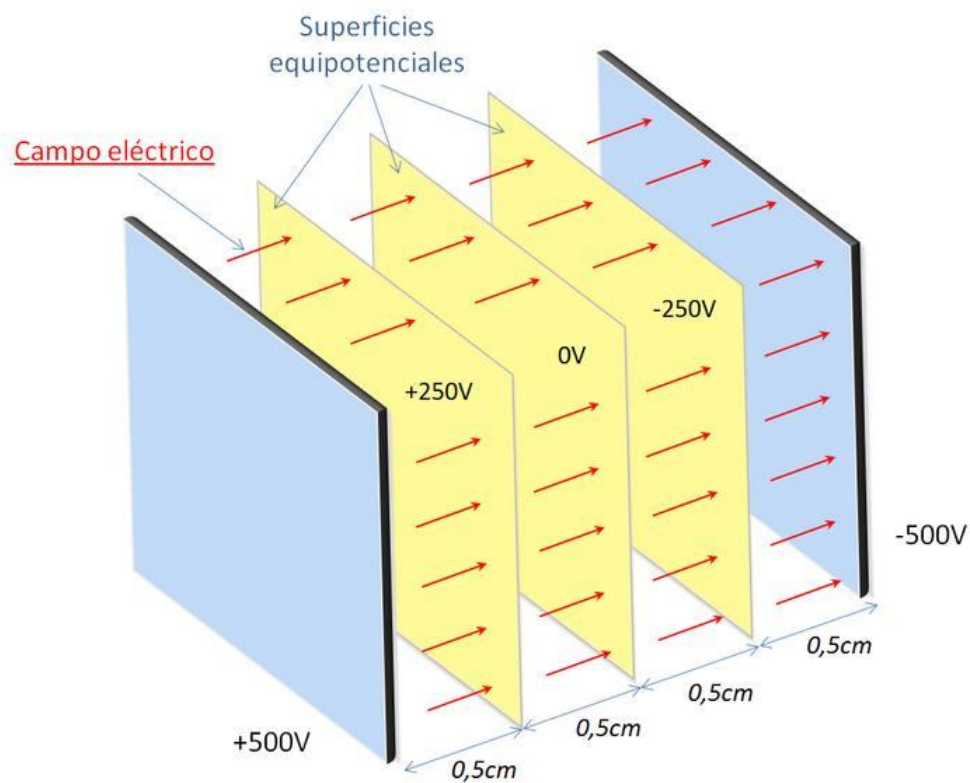


Figura 3.27

Observa como las líneas de fuerza se dirigen hacia los potenciales decrecientes.

## 10. CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

A continuación, vamos a realizar un estudio elemental del campo gravitatorio terrestre a partir de las generalidades descritas hasta ahora sobre el campo gravitatorio creado por masas puntuales. Dicho estudio también sería válido para el campo gravitatorio creado por cualquier otro cuerpo celeste.

### 10.1 FUERZA GRAVITATORIA Y ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA TERRESTRES

Suponiendo que la Tierra fuese una esfera perfecta, se puede demostrar que la fuerza gravitatoria que aquélla ejerce sobre cualquier cuerpo de masa  $m$  situado en sus proximidades, viene dada por la misma expresión que proporciona la ley de gravitación universal:

$$\vec{F} = -G \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{u}_r$$

donde  $M_T$  es la masa de la Tierra,  $r$  es la distancia entre el centro de la Tierra y el punto en que se encuentra la masa  $m$ , y  $\vec{u}_r$  es un vector unitario con origen en el centro de la Tierra y dirigido hacia la posición de  $m$ .

Esta fuerza, también denominada **peso**, tiene las mismas características que la fuerza gravitatoria ente masas puntuales pudiendo expresarse su módulo como:

$$F = G \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Si  $R_T$  es el radio de la Tierra y  $h$  la altura a la que se sitúa  $m$  sobre la superficie terrestre, podemos escribir  $r = R_T + h$ .

Por ser la fuerza gravitatoria conservativa, cualquier cuerpo de masa  $m$  situado a una altura  $h$  sobre la superficie terrestre poseerá una energía potencial gravitatoria, cuya expresión vendrá dada a partir de la ecuación [3.15]:

$$E_p = -G \frac{M_T \cdot m}{r} \Leftrightarrow E_p = -G \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \quad [3.31]$$

donde hemos considerado el infinito como origen de energía potencial.

### 10.2 INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

La intensidad de campo gravitatorio terrestre o aceleración de la gravedad en cualquier punto exterior a la Tierra tiene la misma expresión que en el caso de una masa puntual. Así pues, podemos escribir:

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

cuyo módulo vendrá dado por:

$$g = G \frac{M_T}{r^2}$$

Podemos transformar la expresión anterior en otra equivalente que nos proporciona como varía la gravedad terrestre con la altura. Para ello escribimos en la expresión anterior  $r = R_T + h$ :

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \quad [3.32]$$

Si llamando  $g_0$  a la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre ( $h = 0$ ):

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Sustituyendo en la ecuación [3.32]:

$$g = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Si dividimos por  $R_T^2$  tanto su numerador como su denominador, se convierte en la expresión:

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

que nos indica la variación de  $g$  con la altura y en relación a su valor en la superficie terrestre  $g_0$ .

### 10.3 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA TERRESTRE

$$E_p = -G \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \quad E_p = m g h$$

La expresión de energía potencial gravitatoria dada por la primera ecuación es válida para cualquier punto exterior a la Tierra, incluidos puntos de su superficie. Sin embargo, si la masa  $m$  se desplaza entre dos puntos muy próximos a la superficie terrestre, la variación de  $g$  es prácticamente inapreciable, pudiendo considerarse constante el campo gravitatorio en tales circunstancias. Sólo en estas condiciones será válida la segunda expresión de la energía potencial gravitatoria terrestre

### 10.4 POTENCIAL GRAVITATORIO TERRESTRE

Definimos el potencial gravitatorio terrestre,  $V$ , en un punto como la energía potencial gravitatoria que posee la unidad de masa situada en dicho punto. Por tanto:

$$V = \frac{E_p}{m}$$

Si tenemos en cuenta la ecuación correspondiente a la energía potencial dada en el apartado anterior, el potencial gravitatorio en un punto situado a una altura  $h$  de la superficie terrestre será:

$$V = -G \frac{M_T}{R_T + h}$$

### 10.5 MOVIMIENTO DE SATÉLITES: VELOCIDAD, PERIODO Y ENERGÍA ORBITAL

En este apartado describiremos el movimiento de satélites alrededor de la Tierra. En todo los casos, supondremos que el satélite describe una órbita circular de radio  $r$  a una altura  $h$  de la superficie terrestre. Lo que se deduzca en este punto puede generalizarse a cualquier satélite orbitando alrededor de su planeta, y a cualquier planeta orbitando alrededor del sol.

#### Velocidad orbital

Es la velocidad lineal con la que un satélite se traslada alrededor de la Tierra describiendo una órbita cerrada. Suponiendo que el satélite de masa  $m$  describe un MCU, la fuerza gravitatoria terrestre proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener estable la órbita del satélite (fig. 1.5). Aplicando el principio fundamental de la dinámica al satélite obtenemos la velocidad de órbita:

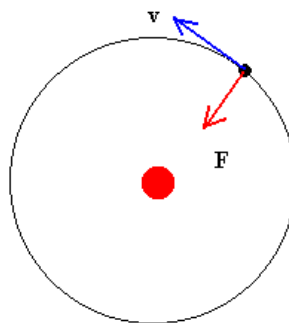


Figura 1.5

$$F_c = m \cdot a_c \Rightarrow G \frac{M_T \cdot m}{r^2} = m \frac{v_{orb}^2}{r} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = \sqrt{G \frac{M_T}{R_T + h}}$$

$$v_{orb} = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = \sqrt{G \frac{M_T}{R_T + h}} \quad [3.34]$$

donde  $r = R_T + h$  es el radio de la órbita.

En la expresión anterior podemos deducir lo siguiente:

- o La velocidad orbital de un satélite es independiente de su masa. Sólo depende de la masa que crea el campo, la tierra en este caso, y del radio de la órbita.
- o Cada órbita tiene un valor definido para la velocidad a la que se puede mover el satélite y esta velocidad disminuye con la raíz cuadrada del radio orbital.

#### Periodo orbital

Se denomina periodo orbital de un satélite al tiempo que tarda el satélite en completar una vuelta. Para deducir su expresión utilizamos la expresión de la velocidad orbital obtenida en el punto anterior y la expresión que relaciona a esta con la velocidad angular:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{G \frac{M_T}{r}} \\ v &= \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = \frac{2\pi}{T} r \Rightarrow G \frac{M_T}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r^2 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G M_T}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_T}}} \quad [3.35]$$

De la expresión anterior podemos deducir lo siguiente:

- o El periodo orbital no depende de la masa del cuerpo que orbita. Sólo depende de la masa fuente y del radio orbital.
- o Cuanto más alejado este el satélite orbitando, más tiempo tardará en completar una vuelta.
- o Esta expresión también se puede utilizar para calcular el radio orbital de un satélite si conocemos su periodo orbital.

### Energía orbital

Llamada también energía de ligadura, E, es la energía total o mecánica que posee un satélite en su órbita estable alrededor de la Tierra. Esta energía es tanto cinética como potencial gravitatoria. Por tanto:

$$E = E_c + E_p \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M_T \cdot m}{r} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} - G \frac{M_T \cdot m}{r}$$

Sacando factor común, finalmente podemos escribir:

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2} G \frac{M_T \cdot m}{r}} \quad [3.36]$$

De la expresión anterior podemos deducir lo siguiente:

- o Observamos que la energía orbital es negativa lo que significa que el satélite en órbita alrededor de la Tierra es un cuerpo ligado al campo gravitatorio terrestre al que hay que comunicarle energía para que salga de su influencia.
- o También destacamos el hecho de que al aumentar el radio orbital la energía orbital aumenta haciéndose menos negativa, es decir, acercándose a cero. Esto es debido a que la interacción gravitatoria entre las dos masas va disminuyendo al aumentar la distancia de interacción entre ellas.
- o El hecho de que la energía orbital aumente al aumentar el radio orbital, también implica que para que un satélite cambie a una órbita de mayor radio será necesario comunicarle una cantidad de energía igual a la diferencia entre las energías orbitales correspondientes.

### **10.6 VELOCIDAD DE ESCAPE**

Es la mínima velocidad,  $v_e$ , que hay que suministrar a un satélite situado en un punto del campo gravitatorio terrestre para que salga de la influencia de éste. Para ello la energía total que debe poseer el satélite debe ser, al menos, nula:

$$E = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_e^2 - G \frac{M_T \cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 G \cdot M_T}{r}}$$

$$v_e = \sqrt{2G \frac{M_T}{r}} = \sqrt{2G \frac{M_T}{R_T + h}} \quad [3.37]$$

En estas condiciones, el satélite saldría del campo gravitatorio terrestre alcanzando el infinito sin energía cinética, pudiéndose demostrar que su trayectoria es una parábola.

En el caso de que el satélite sea lanzado desde la superficie terrestre ( $h = 0$ ), la velocidad de escape tendrá la expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G \cdot M_T}{R_T}}$$

Que vale aproximadamente unos 11 Km/s

Si la velocidad comunicada al satélite fuese mayor que la de escape, su energía total sería positiva y alcanzaría el infinito con cierta energía cinética, demostrándose en este caso que el satélite seguiría una hipérbola.

### EJEMPLO 29

La estación espacial europea está orbitando aproximadamente a 400 Km de altura.

- Calcula la velocidad con la que orbita.
- Calcula la velocidad de escape de una capsula si es lanzada desde la estación espacial.

### EJEMPLO 30

Se desea poner a un satélite en órbita geoestacionaria. ¿A qué altura habría que situarlo? (se denomina órbita geoestacionaria a aquella órbita a la que le corresponde un periodo orbital igual al tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta completa sobre sí misma, es decir, 24 h).

### EJEMPLO 31

Un satélite artificial de 1 t orbita en torno a la tierra a una altura de 5000 Km. ¿Qué energía extra habría que comunicarle al satélite para que pase a orbitar a una altura doble de la que está?

### EJEMPLO 32

Se quiere lanzar desde la tierra a un satélite de 500 Kg para que orbite a una altura de 1000 Km. ¿Qué energía habría que comunicarle al satélite para ponerlo en órbita?

## 11. INGRAVIDEZ

Se denomina ingravidez a la ausencia de gravedad, es decir, a la ausencia de campo gravitatorio.

Si analizamos la expresión del campo gravitatorio creado por una masa puntual:

$$\boxed{\vec{g} = -G \frac{M_1}{r^2} \vec{u}_r} \text{ (vector campo)} \quad \boxed{g = G \frac{M_1}{r^2}} \text{ (módulo del vector campo)}$$

podemos ver que la ingravidez se alcanzaría teóricamente en el infinito. En la práctica se alcanzaría en aquellas zonas donde el campo sea lo suficientemente débil como para no apreciarse.

En el caso de la tierra, considerada como una masa puntual, la expresión quedaría:

$$\boxed{\vec{g}_T = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r - G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r} \text{ (vector campo)}$$

$$\boxed{g_T = G \frac{M_T}{r^2} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}} \text{ (módulo del vector campo)}$$

Pero, ¿es esto lo que les ocurre a los astronautas en la Estación Espacial Internacional (ISS) o en los transbordadores espaciales? La respuesta es que no, puesto que estos ingenios están muy cerca de la tierra, a menos de 500 Km de altura, y allí la gravedad, como fácilmente puedes comprobar, es sólo algo inferior a  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Entonces, ¿qué es lo que sucede para que los astronautas estén flotando en el aire? Lo que sucede es que los astronautas se encuentran, al igual que sus naves, en movimiento circular alrededor de la tierra, y la fuerza gravitatoria (su peso) se está empleando en proporcionarles la aceleración centrípeta que necesitan para mantenerse en órbita. Esto produce una pérdida aparente de peso similar a lo que ocurre en un ascensor cuando inicia la bajada o se descuelga, ó cuando salta al vacío un paracaidista antes de abrir su paracaídas. Por tanto se trata de es una ingravidez aparente que aparece siempre que se esté en caída libre.

## 12. ANALOGÍAS Y DIFERENCIAS ENTRE LOS CAMPOS GRAVITATORIO Y ELÉCTRICO

Si analizamos las expresiones de la fuerza de interacción gravitatoria entre dos masas (Ley de Gravitación Universal) y de la fuerza de interacción eléctrica entre dos cargas (Ley de Coulomb) podemos deducir ciertas analogías y ciertas diferencias entre ellas:

Fuerza gravitatoria:

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{vector fuerza}) \quad F = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \quad (\text{módulo del vector fuerza})$$

$$\vec{g} = -G \frac{M_1}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{vector campo}) \quad g = G \frac{M_1}{r^2} \quad (\text{módulo del vector campo})$$

Fuerza electrostática

$$\vec{F} = K \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{vector fuerza}) \quad F = K \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} \quad (\text{módulo del vector fuerza})$$

$$\vec{E} = K \frac{Q_1}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{vector campo}) \quad E = K \frac{|Q_1|}{r^2} \quad (\text{módulo del vector campo})$$

### ANALOGÍAS:

1ª.- En ambos la fuerza es directamente proporcional al producto de las magnitudes de los cuerpos que interaccionan e inversa mente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

2ª.- Ambos son campos de fuerzas centrales, es decir, su dirección es la línea que une los cuerpos que interaccionan, masas en el campo gravitatorio y cargas en el campo eléctrico.

3ª.- Son fuerzas de largo alcance puesto que la interacción entre dos masas o entre dos cargas se anula a distancia infinita.

4ª.- No son fuerzas por contacto, sino interacciones a distancia que actúan tanto en el vacío como en presencia de medios materiales. La presencia de una masa o de una carga produce una “deformación” que dota al espacio de cierta propiedad en cada uno de sus puntos, creándose, de este modo, los campos correspondientes. Esta “deformación” del espacio sólo se pone de manifiesto al situar en esos puntos a una masa o a una carga testigo.

5ª.- Ambos son campos de fuerzas conservativos, es decir, ambos admiten una energía potencial asociada y es posible definir en ellos un potencial gravitatorio y eléctrico respectivamente.

6ª.- En ambos campos las líneas de fuerza son radiales y abiertas.

**DIFERENCIAS**

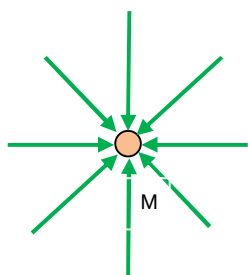
1ª.- La fuente del campo gravitatorio es la masa, y la del campo eléctrico es la carga. Sólo hay un tipo de masa, pero hay dos tipos de carga, positiva y negativa.

2ª.- Las fuerzas de interacción gravitatoria son siempre de atracción, mientras que las fuerzas de interacción electrostática pueden ser de atracción (cargas de distinto signo) o de repulsión (cargas del mismo signo).

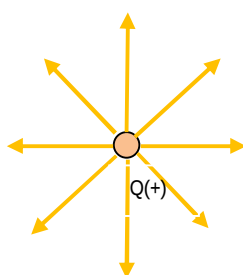
3ª.- Al ser  $G$  una constante universal, la interacción gravitatoria entre dos masas es independiente del medio en el que se encuentren estas; pero no ocurre lo mismo con las cargas ya que el valor de  $K$  es diferente para cada medio, siendo máximo en el vacío. Por tanto, la interacción eléctrica entre dos cargas es máxima cuando estas están en el vacío.

4ª.- La fuerza eléctrica es mucho mayor que la fuerza gravitatoria. Así por ejemplo la constante  $K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ UI}$ , mientras que la constante  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ UI}$ , y esto supone que el valor de  $K_0$  es aproximadamente  $10^{20}$  veces superior.

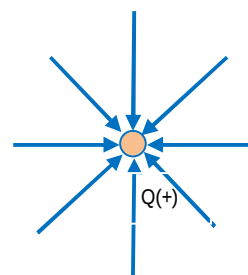
5ª.- Las líneas de fuerza del campo gravitatorio siempre son entrantes en la masa que lo crea (se dice que las masas son sumideros de líneas de fuerza), mientras que las líneas de fuerza del campo electrostático son entrantes si la carga es negativa (sumideros de líneas de campo) o salientes si la carga es positiva (fuentes de líneas de campo).



Líneas de fuerza de una masa puntual

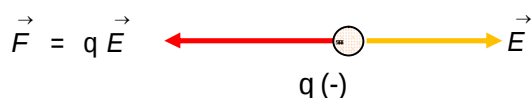
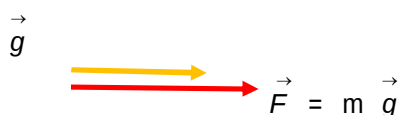


Líneas de fuerza de una carga puntual +



Líneas de fuerza de una carga puntual -

6ª.- La fuerza que actúa sobre una masa colocada en un campo gravitatorio siempre tiene la misma dirección y sentido que el campo gravitatorio. Sin embargo, en un campo eléctrico la fuerza que actúa sobre una carga positiva sí tiene la misma dirección y sentido que el campo eléctrico, pero tiene sentido contrario si el campo actúa sobre una carga negativa.



7ª.- La energía potencial gravitatoria es negativa pues corresponde a una fuerza atractiva, mientras que la energía potencial eléctrica puede ser positiva (cargas del mismo signo que se repelen) o negativa (cargas de distinto signo que se atraen).

$$E_{p.grav} = -G \frac{M.m}{r} \qquad E_p = K \frac{Q.q}{r}$$

8ª.- El campo gravitatorio creado por una masa no se altera por el hecho de que la masa esté moviéndose. Sin embargo, cuando una carga está moviéndose, además del campo electrostático aparece un nuevo campo de fuerzas: la interacción magnética.

#### **TEMA 4. CAMPO MAGNÉTICO**

- 1. Origen del campo magnético**
- 2. Descripción del campo magnético**
- 3. Campo magnético creado por una carga en movimiento**
- 4. Campo magnético creado por una corriente eléctrica rectilínea e indefinida**
- 5. Fuerza magnética sobre cargas puntuales en movimiento: Fuerza de Lorentz**
- 6. Movimiento de cargas puntuales en campos magnéticos**
- 7. Fuerza magnética sobre una corriente rectilínea**
- 8. Fuerza magnética entre corrientes rectilíneas**

## 1. ORIGEN DEL CAMPO MAGNÉTICO

El fenómeno del magnetismo es conocido desde hace más de 2000 años. Se descubrió por primera vez en Magnesia (Asia Menor). Algunos cuerpos naturales como la magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), presentan la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. A tales cuerpos se les da el nombre de **imanes naturales**, y la propiedad que tienen recibe el nombre de **magnetismo**.

Además de los imanes naturales, existen otras sustancias, como el hierro, el cobalto y el níquel, que pueden adquirir el magnetismo de una manera artificial. A estos cuerpos se les da el nombre de **imanes artificiales**.

Los imanes, tanto naturales como artificiales, tienen las siguientes propiedades:

- Todo imán presenta la máxima atracción o repulsión en los extremos, que reciben el nombre de **polos magnéticos**.
- Los polos magnéticos reciben los nombres de Norte y Sur porque se orienta según los polos magnéticos de la Tierra, que es un imán natural.
- No existen los monopolos magnético, es decir, los polos magnéticos son inseparables por lo que un imán siempre presenta dos polos (dipolos) por muy pequeño que sea.

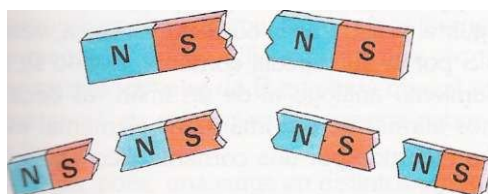


Figura 4.1

- Los polos del mismo tipo se repelen y los de distinto nombre se atraen.
- El valor de la fuerza de atracción o repulsión entre imanes decrece con la distancia de separación entre ellos.

El origen del magnetismo empezó a ser bien conocido en el transcurso de los siglos XVIII y XIX. Así, en 1819, el científico danés Christian Oersted descubrió que **las corrientes eléctricas creaban campos magnéticos a su alrededor**. Su experiencia consistió en observar que al acercar una aguja imantada a una corriente eléctrica, aquella dejaba de orientarse hacia el polo Norte para situarse perpendicularmente a la corriente. A partir de aquí, se dedujo que las corrientes eléctricas producen el mismo efecto que los imanes.

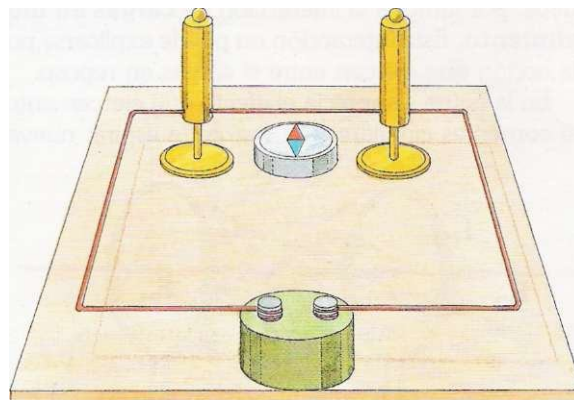
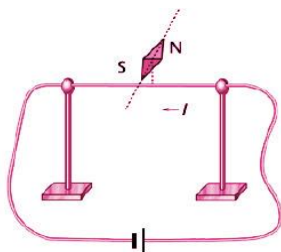


Figura 4.2 Experiencia de Oersted

Doce años más tarde, Michael Faraday observó el efecto recíproco: aproximando o alejando un imán a un conductor, en este se origina una corriente eléctrica. Ambas experiencias tienen el mismo fundamento: **las cargas eléctricas en movimiento producen fuerzas magnéticas**. El magnetismo es, pues, una consecuencia de la electricidad y del movimiento.

Posteriormente, Ampère, con sus teorías basadas en las experiencias de Oersted y Faraday, asentó los fundamentos del electromagnetismo. De todo lo dicho se deduce que el electromagnetismo se basa en una serie de puntos básicos:

- Cargas eléctricas en movimiento producen una interacción de tipo magnético, además de la interacción electrostática dada por la Ley de Coulomb. Producen, pues, una interacción electromagnética.
- Toda carga en movimiento produce un campo magnético.
- Un campo magnético actúa sobre cargas eléctricas cuando éstas están en movimiento y se cumplen, además, ciertas condiciones como veremos más adelante.
- Se dice que en un punto existe un campo magnético si una carga móvil colocada en él y que cumpla las condiciones adecuadas, experimenta una fuerza.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

El campo magnético es la región del espacio en la que se pone de manifiesto la fuerza magnética. Por tanto, existirá un campo magnético en cualquier punto de la región que hay en el entorno de un imán, de una carga eléctrica en movimiento o de una corriente eléctrica. Para comprobarlo, bastaría con colocar en dicha región otro imán, limaduras de hierro, una aguja imantada, una corriente eléctrica o una carga en movimiento, y observaríamos la acción de una fuerza sobre cualquiera de ellos.

El campo magnético es un campo vectorial de fuerzas y por tanto en cada punto viene caracterizado por el vector intensidad de campo, que en este caso recibe el nombre de **vector inducción magnética**, o simplemente **campo magnético**, y se representa por  $\vec{B}$ .

El vector campo magnético en cada punto se define como la fuerza que ejerce el campo sobre la unidad de carga positiva que se mueve con una unidad de velocidad en dirección perpendicular al campo en dicho punto. Su unidad en el S.I. es el tesla (T), en honor del científico de origen serbio Nikola Tesla.

Un **tesla** es la inducción de un campo magnético que ejerce una fuerza de 1 N sobre una carga de 1 C que se mueve a 1 m/s en el interior del campo y perpendicularmente al mismo:

$$1 \text{ Tesla} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m} / \text{s}}$$

Otra unidad de campo magnético es el **Gauss (g)**:

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ g}$$

El campo magnético, como campo vectorial de fuerzas que es, se puede representar gráficamente por líneas de campo o líneas de fuerza que reciben el nombre de **líneas de inducción magnética**. La dirección del campo es tangente en cada punto a las líneas de inducción y tiene el mismo sentido que éstas. Además se construyen de modo que la densidad de líneas es mayor en aquellos puntos en donde el campo magnético es más intenso.

### 2.1 Líneas de fuerza del campo magnético de un imán rectangular

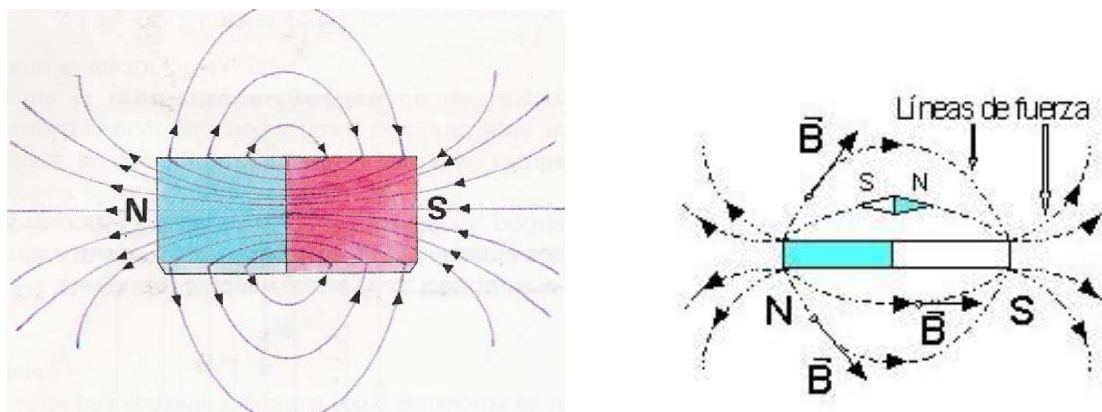


Figura 4.3  
Líneas de inducción magnética del campo magnético de un imán

La tierra es un potente imán. El polo sur magnético se encuentra al norte de Canadá, aproximadamente a 1300 Km del polo norte geográfico. Por tanto, la brújula no apunta exactamente hacia el norte geográfico.

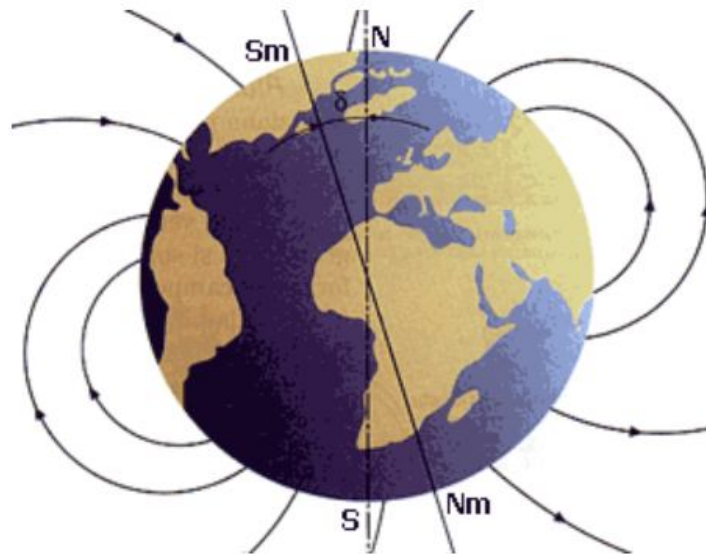


Figura 4.4

*Líneas de inducción magnética del campo magnético terrestre*

Observa que las líneas de fuerza son cerradas (a diferencia de las de los campos gravitatorio y eléctrico que son abiertas) y su densidad aumenta en las proximidades de los extremos del imán que es donde la intensidad del campo magnético es mayor. Observa también que las líneas de fuerza salen del polo norte y entran por el polo sur.

## 2.2 Líneas de fuerza de una corriente circular (espira circular)

Las líneas de inducción magnética del campo creado por una espira están representadas en la siguiente figura donde se puede observar que son líneas cerradas pudiendo decir que, al igual que un imán y según por donde se mire, la espira presenta su polo norte (por donde salen las líneas) o su polo sur (por donde entran las líneas).

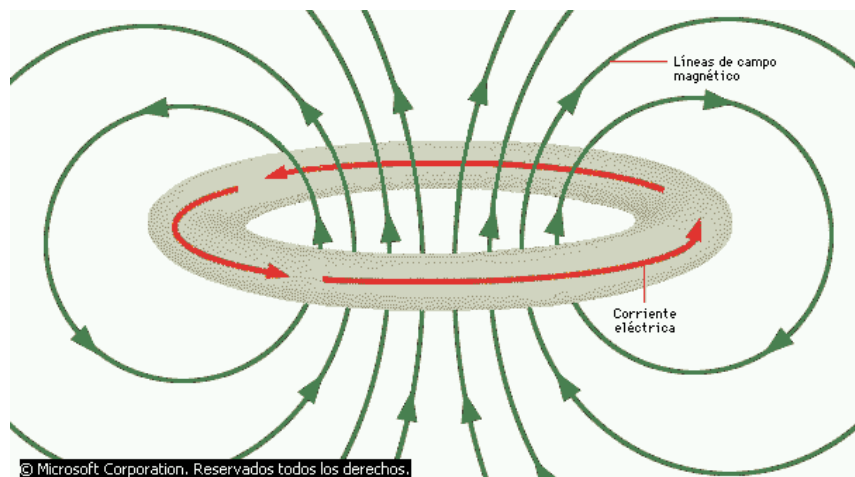


Figura 4.5

*Líneas de campo de una corriente circular (espira circular)*

Para saber qué cara de la espira es un polo N o un polo S, basta con seguir la regla que se indica en la siguiente figura:



Figura 4.6  
Polos magnéticos de una espira circular

### 2.3 Líneas de fuerza de un campo uniforme

En el caso de que el campo magnético sea uniforme, las líneas de inducción son paralelas entre sí, igualmente espaciadas y todas del mismo sentido.

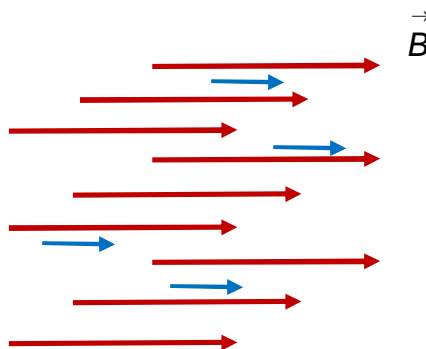


Figura 4.7  
Líneas de inducción de un campo magnético uniforme

En ocasiones, se utilizan puntos o cruces para simbolizar un campo uniforme saliente o entrante al plano del papel, respectivamente.

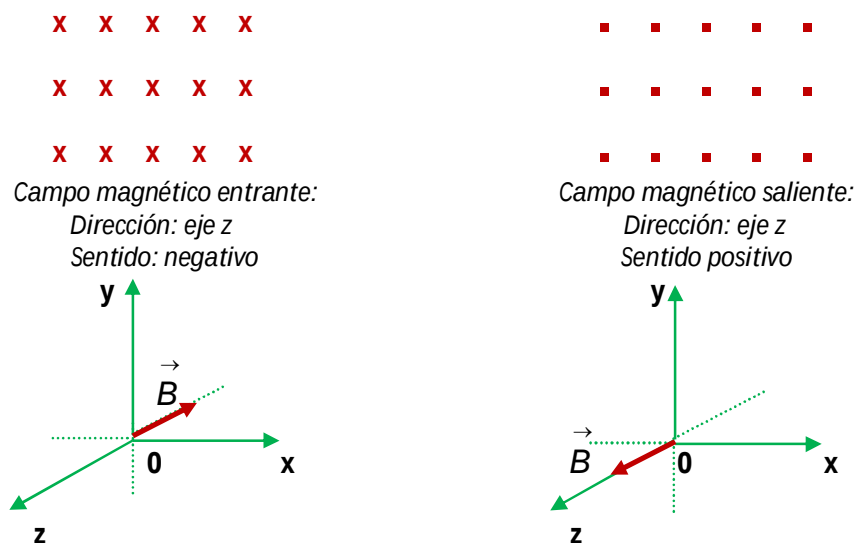


Figura 4.8  
Líneas de inducción de un campo magnético uniforme

### 3. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO

El campo magnético  $\vec{B}$  que crea una carga puntual  $Q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en un punto  $P$  que se encuentra a una distancia  $r$  de ella viene dado por la expresión:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{v} \times \vec{u}_r \quad [4.1]$$

Donde:

$\vec{r}$  es el vector que va de la carga fuente hasta el punto  $P$

$\vec{u}_r$  es un vector unitario de la misma dirección y sentido que  $\vec{r}$

$\mu$  es una constante característica de cada medio llamada **permeabilidad magnética**

De la expresión anterior podemos deducir las siguientes consecuencias:

- o El campo magnético que crea una carga puntual  $Q$  en un punto aumenta con el valor de la carga y con su velocidad, pero decrece con el cuadrado de la distancia que hay de la carga fuente a dicho punto.
- o El campo magnético  $\vec{B}$  siempre es perpendicular a los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$
- o Al igual que ocurría con el campo eléctrico el valor del campo magnético depende de las características del medio en el que se encuentren las cargas a través de la permeabilidad magnética  $\mu$  aunque su comportamiento es diferente al de la constante eléctrica  $K$ , tal y como se explica a continuación.

La permeabilidad magnética  $\mu$  no tiene su valor máximo en el vacío, y por tanto el campo magnético no es máximo en el vacío (recuerda que sí lo era el campo eléctrico). En el vacío la permeabilidad magnética vale:

$$\mu_0 = \mu (\text{vacío}) = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ UI}$$

El comportamiento magnético de la materia se establece por comparación con el vacío. Para ello se utiliza la **permeabilidad magnética relativa**  $\mu_r$ . La permeabilidad magnética de un medio es el cociente entre su permeabilidad  $\mu$  magnética y la del vacío  $\mu_0$ .

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

- Destaquemos que la permeabilidad magnética relativa no tiene unidades.
- Observa que la permeabilidad magnética relativa del vacío vale 1 ( $\mu_{r0} = 1$ ).
- Si la permeabilidad magnética relativa de un medio vale 1 ( $\mu_r = 1$ ), este medio tiene la misma permeabilidad magnética que el vacío ( $\mu = \mu_0$ ).
- Si la permeabilidad magnética relativa de un medio vale más de la unidad ( $\mu_r > 1$ ), este medio tiene más permeabilidad magnética que el vacío ( $\mu > \mu_0$ ).
- Si la permeabilidad magnética relativa de un medio vale menos de la unidad ( $\mu_r < 1$ ), este medio tiene una permeabilidad magnética menor que la del vacío ( $\mu < \mu_0$ ).

Respecto a la permeabilidad magnética, podemos distinguir tres tipos de sustancias o medios, cuyo comportamiento es muy diferente:

- ❖ **Sustancias diamagnéticas**, como el oro o la plata cuya permeabilidad magnética es ligeramente menor que la del vacío  $\mu < \mu_0$  ( $\mu_r < 1$ ) y por tanto el campo magnético en su interior es ligeramente menor al que existe en el vacío.
- ❖ **Sustancias paramagnéticas**, como el cromo o el manganeso cuya permeabilidad magnética es ligeramente mayor que la del vacío  $\mu > \mu_0$  ( $\mu_r > 1$ ) y por tanto el campo magnético en su interior es ligeramente superior al que existe en el vacío.
- ❖ **Sustancias ferromagnéticas**, como el hierro cuya permeabilidad magnética es mucho mayor que la del vacío  $\mu \gg \mu_0$  ( $\mu_r \gg 1$ ) y por tanto el campo magnético en su interior es muchísimo mayor al que existe en el vacío.

#### 4. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE ELÉCTRICA RECTILÍNEA E INDEFINIDA

Las líneas de fuerza o líneas de inducción magnética del campo magnético creado por una corriente rectilínea e indefinida son circunferencias concéntricas alrededor del conductor cuyo sentido viene determinado por la regla de la mano derecha: si se coge el conductor con la mano derecha de manera que el pulgar apunte en el sentido de la corriente, los demás dedos rodearán el conductor en el mismo sentido de giro que lo hacen las líneas de campo.

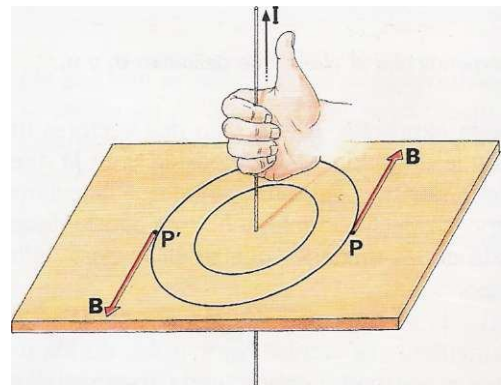
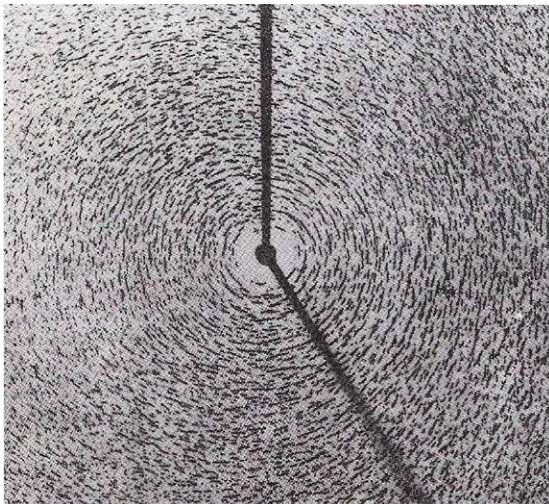


Figura 4.9  
Líneas de inducción de una corriente eléctrica rectilínea

El campo magnético producido por una corriente eléctrica de intensidad  $I$  que circula por un conductor rectilíneo e indefinido en un punto  $P$  próximo al mismo presenta las siguientes características:

- **Dirección:** tangente a las líneas de inducción en cada punto.
- **Sentido:** el de las líneas de inducción determinado por la regla de la mano derecha.
- **Intensidad:** se determina con la expresión

$$\boxed{|\vec{B}| = B = \frac{\mu I}{2\pi r}} \quad [4.2]$$

donde:

$\mu$  : permeabilidad magnética del medio (en el vacío vale  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$ )

$I$  : intensidad de corriente que pasa por el conductor (en amperios: A)

$r$  : distancia del conductor al punto P (en metros: m)

### EJEMPLO 1º

Un hilo recto por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío situado en el eje de abscisas. Si la corriente circula en el sentido positivo del eje:

- Dibuja las líneas del campo magnético (líneas de inducción magnética) creadas por la corriente eléctrica.
- Dibuja y calcula el campo magnético en los siguientes puntos: A = (0,2,0) m    B = (0,-2,0) m  
C = (0,0,2) m    D = (0,0,-2) m

### EJEMPLO 2º

Un hilo recto por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío situado en el eje de ordenadas. Si la corriente circula en el sentido positivo del eje:

- Dibuja las líneas del campo magnético (líneas de inducción magnética) creadas por la corriente eléctrica.
- Dibuja y calcula el campo magnético en los siguientes puntos: A = (2,0,0) m    B = (-2,0,0) m  
C = (0,0,2) m    D = (0,0,-2) m

### EJEMPLO 3º

Un hilo recto por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío situado en el eje z. Si la corriente circula en el sentido positivo del eje:

- Dibuja las líneas del campo magnético (líneas de inducción magnética) creadas por la corriente eléctrica.
- Dibuja y calcula el campo magnético en los siguientes puntos: A = (2,0,0) m    B = (-2,0,0) m  
C = (0,2,0) m    D = (0,-2,0) m

### EJEMPLO 4º

Puedes repetir los tres ejemplos anteriores, suponiendo que la corriente eléctrica circula en sentido negativo de los ejes.

### EJEMPLO 5º

Dos conductores rectilíneos y paralelos, por los que circulan corrientes de 2 y 4 A, se encuentran en el vacío a 40 cm de distancia.

- a) Dibuja y calcula el campo magnético que crean cada uno de los hilos en un punto situado entre los dos hilos y equidistante de ambos. Calcula el campo magnético resultante en dicho punto.
- b) Haz lo mismo en un punto situado a la izquierda del primer hilo y a 50 cm de él.
- c) Haz lo mismo que en los apartados anteriores en un punto situado a la derecha del segundo conductor y a 80 cm de él.
- d) Razona si existirá algún punto en el que se anule el campo magnético resultante creado por los dos hilos. En caso afirmativo, calcúlalo.

## 5. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS PUNTUALES EN MOVIMIENTO: FUERZA DE LORENTZ

La fuerza magnética  $\vec{F}$  ejercida sobre una carga puntual  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en el seno de un campo magnético  $\vec{B}$  está caracterizada por la ley de Lorentz cuya expresión matemática es:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

[4.3]

$$|\vec{F}| = |q| |\vec{v}| |\vec{B}| \sin(\vec{v}, \vec{B})$$

Esta fuerza se denomina **fuerza de Lorentz** y tiene las siguientes características:

De la ley de Lorentz se extraen las siguientes **conclusiones**:

- o Si una carga se introduce en reposo dentro de un campo magnético, no sufre la acción de ninguna fuerza, es decir, los campos magnéticos no actúan sobre cargas en reposo.
- o Si la carga se introduce con una velocidad de la misma dirección que el campo magnético, no sufre la acción de fuerza alguna, puesto que los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  forman un ángulo de  $0^\circ$  o de  $180^\circ$ , y en ambos casos el seno es cero.
- o La dirección de la fuerza de Lorentz siempre es perpendicular a los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , es decir, al plano que contiene a ambos vectores.
- o El sentido de la fuerza de Lorentz es el mismo que el producto vectorial si la carga es positiva, o de sentido contrario si la carga es negativa.

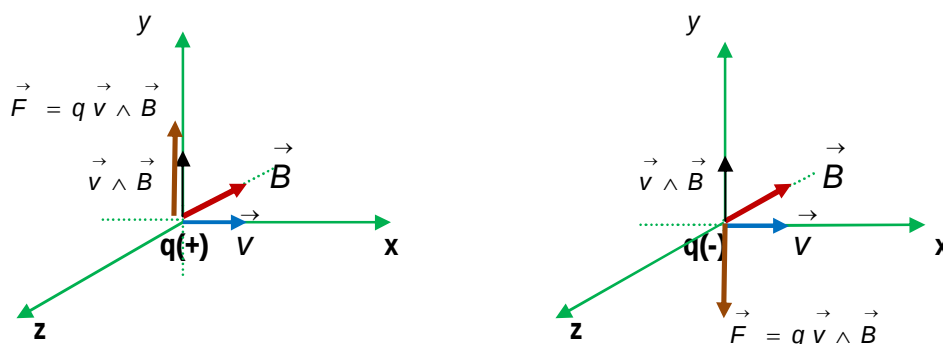


Figura 4.10  
Dirección y sentido de la Fuerza de Lorentz

- o Si la carga se introduce con velocidad perpendicular a la dirección del campo, la fuerza magnética toma su máximo valor:

$$|\vec{F}|_{\text{máx}} = |q| |\vec{v}| |\vec{B}|$$

- o La fuerza magnética es en todo momento perpendicular a la velocidad por lo que no realiza trabajo alguno sobre la carga y, por tanto, no modifica su energía cinética.

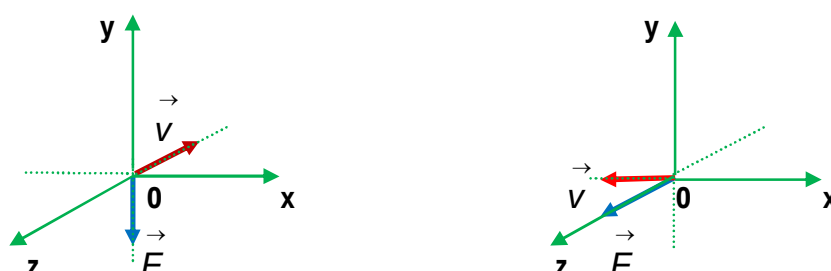
- o Si la carga se introduce en una región en la que coexisten un campo eléctrico y otro magnético, la fuerza ejercida sobre la misma será igual a la suma vectorial de la fuerza eléctrica y de la fuerza magnética:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [4.4]$$

expresión conocida como **fuerza de Lorentz generalizada**.

### EJEMPLO 6º

Calcula en cada uno de los casos que se representan, la dirección y el sentido del campo magnético que actúa.



### EJEMPLO 7º

Un electrón que se mueve paralelamente al eje de abscisas con una velocidad de  $10^5$  m/s, entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T.

- Dibuja la fuerza que experimentará el  $e^-$  al entrar en el campo magnético.
- Calcula el valor de la fuerza de Lorentz que actúa sobre el  $e^-$ .
- Dibuja razonadamente la dirección y el sentido del campo eléctrico que habría que superponer al magnético para que el  $e^-$  no se desviara al entrar en ellos.
- Calcula el módulo del campo eléctrico del apartado anterior.

### EJEMPLO 8º

Repite el problema anterior si se trata de un protón.

### EJEMPLO 9º

Un conductor rectilíneo por el que circula una corriente de 0,2 A se encuentra en el vacío a lo largo del eje x. En un instante dado un electrón se encuentra a 4 m por encima del hilo con una velocidad paralela al eje z de  $10^4$  m/s.

- El campo magnético que crea la corriente eléctrica del hilo en el punto donde está el electrón (módulo, dirección y sentido).
- La fuerza magnética que ejerce la corriente eléctrica sobre el electrón en dicho punto (dirección, sentido y módulo).
- Razona cómo debería moverse el electrón en dicho punto para que la fuerza magnética sobre él fuese nula.

## 6. MOVIMIENTO DE CARGAS PUNTUALES EN CAMPOS MAGNÉTICOS

### 6.1 CARGA QUE ENTRA PERPENDICULARMENTE A UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

Si una carga puntual  $q$  se introduce con velocidad  $\vec{v}$  en dirección perpendicular a un campo magnético  $\vec{B}$ , actuará sobre aquella una fuerza magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  que tendrá el valor máximo  $|\vec{F}| = |q| |\vec{v}| |\vec{B}|$ . Esta fuerza será en todo momento perpendicular a la velocidad por lo que será una fuerza centrípeta que no modificará el valor de la velocidad pero sí su dirección y que, al ser constante, hará que la partícula, de masa  $m$ , describa un movimiento circular uniforme (MCU) en el seno del campo magnético.

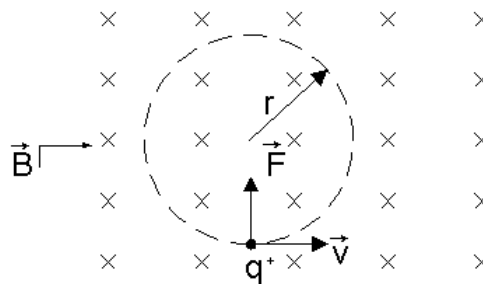


Figura 4.11

Trayectoria de una carga positiva que entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme

Aplicando el segundo principio de la Dinámica al MCU, obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \vec{F}_c \Rightarrow |\vec{F}|_{\text{Lorentz}} = |\vec{F}_c| \Rightarrow |q| |\vec{v}| |\vec{B}| = m \frac{|\vec{v}|^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m |\vec{v}|}{|q| |\vec{B}|}$$

$$\boxed{r = \frac{m |\vec{v}|}{|q| |\vec{B}|} = \frac{mv}{|q| B}} \quad [4.5]$$

Esta última expresión proporciona el radio de la trayectoria descrita por la partícula dentro del campo magnético.

Si expresamos tanto la fuerza magnética como la fuerza centrípeta en función de la velocidad angular  $\omega$ , obtenemos:

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = v : \frac{mv}{|q| B} = \frac{|q| B}{m} = \frac{|q|}{m} B$$

$$\boxed{\omega = \frac{|q|}{m} B} \quad [4.6]$$

A esta expresión se le denomina **frecuencia ciclotrón** cuyo valor sólo depende de la relación carga/masa de la partícula y de la intensidad del campo magnético. A partir de ella podemos deducir el periodo  $T$  y la frecuencia  $f$  del MCU de la partícula:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi : \frac{|q|}{m} B = \frac{2\pi m}{|q| B}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{|q| B}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{|q| B}{2\pi m}} \quad [4.7]$$

## 6.2 CARGA QUE NO ENTRA PERPENDICULARMENTE A UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

Si la carga no entra perpendicularmente al campo magnético, siempre es posible descomponer el vector velocidad en dos componentes: una paralela a la dirección del campo y otra perpendicular a dicho campo. La componente paralela no se ve afectada por la fuerza de Lorentz, por lo que el movimiento en esta dirección será un MRU, mientras que la componente perpendicular sí se verá afectada por la fuerza de Lorentz, curvándose como se ha descrito en el apartado anterior. El resultado de la composición de ambos movimientos será un movimiento helicoidal como se indica en la siguiente figura:

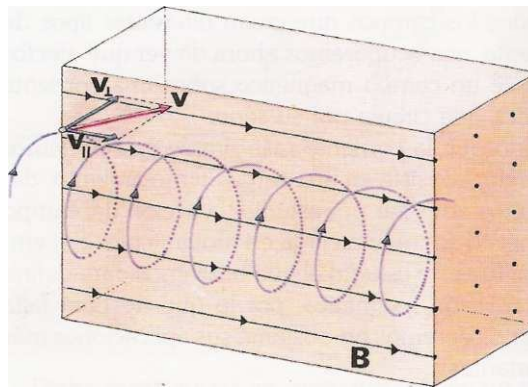


Figura 4.12

*Trayectoria de una carga que no entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme*

## 6.3 CARGA QUE ENTRA A UN CAMPO MAGNÉTICO NO UNIFORME

Si además el campo no es uniforme, la curvatura de la trayectoria helicoidal será mayor en aquellas zonas en la que el campo aumenta. En esta situación puede demostrarse además, que la componente paralela disminuye, de modo que las vueltas de la hélice están más próximas a medida que aumenta el campo y, si este es suficientemente intenso, la componente paralela de la velocidad llega anularse, forzando a la carga a retroceder. A este dispositivo se le denomina “espejo magnético”.

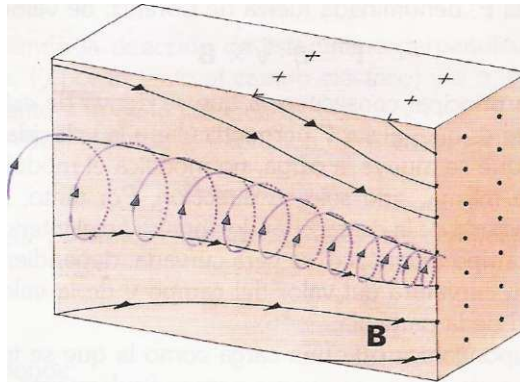


Figura 4.13

*Trayectoria de una carga en un campo magnético no uniforme (espejo magnético)*

Si en el lado opuesto ocurre lo mismo, la carga quedará confinada en dicha región. A este dispositivo se le denomina botella magnética. Este dispositivo es utilizado actualmente para confinar gases ionizados o plasmas como en los experimentos de fusión nuclear.

### EJEMPLO 10º

Un electrón que se mueve paralelamente al eje de abscisas con una velocidad de  $10^5$  m/s, entra perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 T.

- Dibuja la fuerza que experimentará el  $e^-$  al entrar en el campo magnético.
- Calcula el valor de la fuerza de Lorentz que actúa sobre el  $e^-$ .
- Dibuja razonadamente la trayectoria seguida por el  $e^-$  dentro del campo magnético.
- Calcula el radio, el periodo y la frecuencia del movimiento del  $e^-$  ( $m_{e^-} = 9,11 \cdot 10^{-31}$  Kg).

### EJEMPLO 11º

Repite el problema anterior si se trata de un protón ( $m_{p^+} = 1,67 \cdot 10^{-27}$  Kg)..

### EJEMPLO 12º

Un electrón y un protón poseen la misma velocidad  $\vec{v}$  y entran perpendicularmente a un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ .

- Dibuja la trayectoria seguida por cada una de las cargas en el interior del campo magnético.
- Razona cualitativamente (sin cálculo numérico) quién de las dos cargas curva más su trayectoria (tiene menor radio)

### EJEMPLO 13º

Un electrón y un protón, que inicialmente están en reposo, son acelerados por la misma ddp eléctrica. Calcula:

- La relación que existe entre sus energías cinéticas, una vez acelerados.
- La relación que existe entre sus velocidades.

- c) Si una vez acelerados entran perpendicularmente a un campo magnético de intensidad  $B$ , calcula la relación que existe entre los radios de sus trayectorias ( $m_{p^+} = 1833m_{e^-}$ ).

## 7. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CORRIENTE RECTILÍNEA

La corriente eléctrica consiste en el desplazamiento de cargas eléctricas a lo largo de un conductor. Por tanto, si situamos adecuadamente un conductor rectilíneo de longitud  $l$ , por el que pasa una corriente eléctrica de intensidad  $I$  en el seno de un campo magnético uniforme  $B$ , éste ejercerá una fuerza magnética sobre cada una de las cargas (electrones) que se desplazan por el conductor.

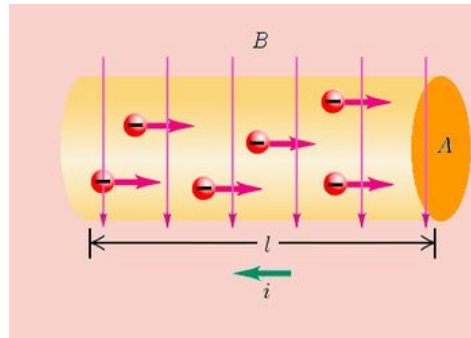


Figura 4.14

Movimiento de los electrones en el interior de un conductor

La fuerza magnética ejercida sobre todo el conductor será la resultante de las ejercidas sobre cada uno de los portadores de carga que circulan por él. Se puede demostrar que dicha fuerza tiene la siguiente expresión:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \wedge \vec{B} \quad [4.8]$$

Donde:

$I$  es la intensidad de corriente que circula por el hilo medida en A.

$\vec{l}$  es el vector longitud del conductor cuya dirección es la de éste, cuyo sentido es el de la corriente que pasa por él y cuyo módulo es la propia longitud  $l$  del conductor medida en m.

$\vec{B}$  es el vector intensidad de campo magnético que ejerce la fuerza sobre el conductor rectilíneo.

De la expresión anterior podemos sacar las siguientes conclusiones:

- o La dirección de la fuerza es perpendicular al plano en el que se encuentran el conductor y el campo magnético.
- o El sentido de la fuerza es el mismo que el producto vectorial  $\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

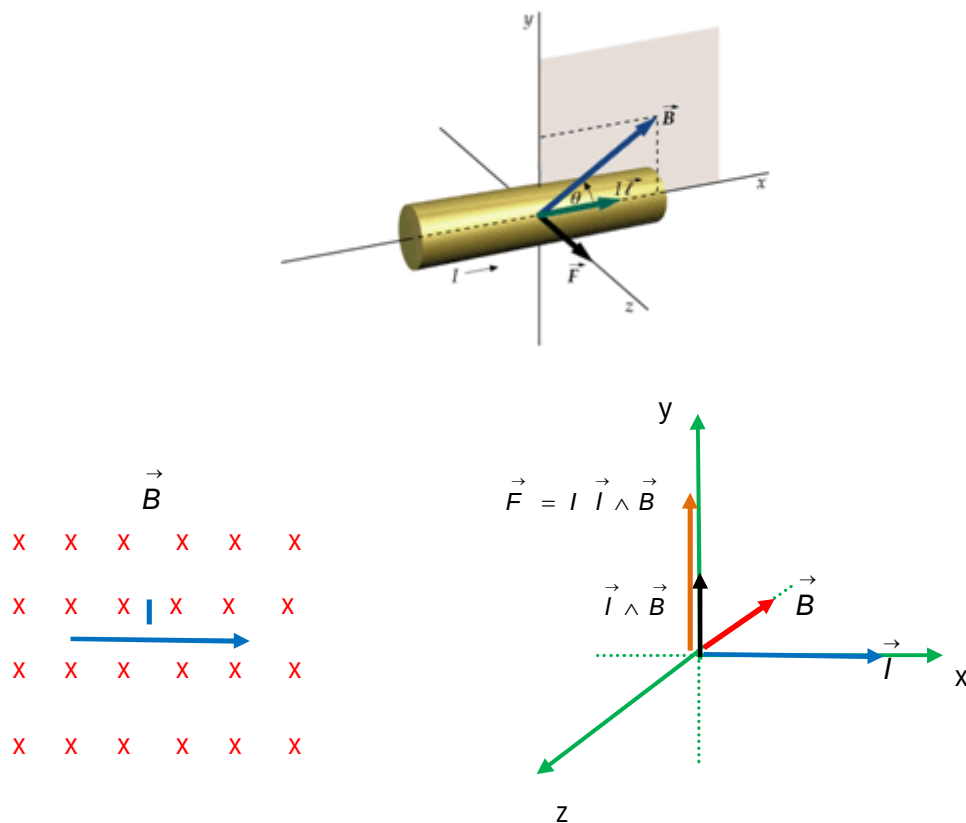


Figura 4.15  
Fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo

- o El módulo de la fuerza es

$$|\vec{F}| = I \cdot |\vec{l}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen}(\vec{l}, \vec{B}) \quad [4.9]$$

- o Si el hilo está colocado paralelamente a las líneas de campo, este no ejerce ninguna fuerza sobre aquél, ya que los vectores  $\vec{l}$  y  $\vec{B}$  tendrían la misma dirección (paralelos o antiparalelos), formando entre ellos un ángulo de  $0^\circ$  o  $180^\circ$ , y en ambos casos el seno vale 0.

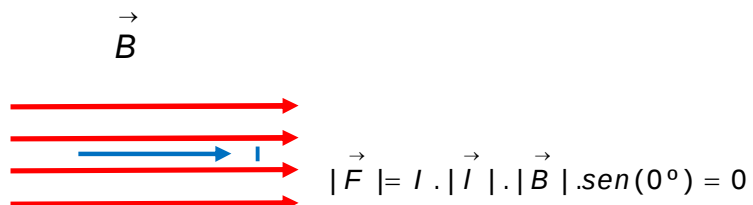


Figura 4.16  
Conductor situado en la misma dirección que las líneas de fuerza

- o Si el hilo está colocado perpendicularmente a las líneas de campo, este ejercería sobre aquél la máxima fuerza, ya que los vectores  $\vec{I}$  y  $\vec{B}$  serían perpendiculares, formando entre ellos un ángulo de  $90^\circ$  y el seno vale 1.

**EJEMPLO 14º**

Un conductor de 10 cm de lado está situado sobre el eje de abscisas. Por él, circula una corriente eléctrica de 5 A, dirigida en sentido negativo. En la región en la que se sitúa el conductor existe un campo magnético uniforme de 0,01 T, dirigido según el eje Z, en sentido creciente.

- Calcula la fuerza (módulo, dirección y sentido) que actuará sobre el conductor.
- Idem, si el campo es paralelo al plano XZ y forma  $60^\circ$  con el eje Z
- Idem, si el campo tiene la dirección del eje X.
- Idem, si el campo está dirigido según el eje Y, hacia las y crecientes.

**EJEMPLO 15º**

Supongamos un hilo conductor recto de 0,3 m de longitud y 20 g de masa. Dicho conductor está en una región en la que existe un campo magnético de 1 T, saliente del papel.

- Calcula la intensidad que debe circular por el hilo, y el sentido en el que ha de circular, para que el conductor se mantenga en equilibrio.
- ¿Qué sucedería si, una vez conseguido lo anterior, se duplicase la longitud del hilo.

## 8. FUERZA MAGNÉTICA ENTRE CORRIENTES RECTILÍNEAS, PARALELAS E INDEFINIDAS

Supongamos dos conductores rectos de longitudes  $l_1$  y  $l_2$  por los que circulan corrientes de intensidades  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente, dispuestos paralelamente uno respecto del otro y separados una distancia  $d$ . Cada uno de ellos producirá un campo magnético en cada uno de los puntos que forman el otro cuyos valores vendrán dados por:

$$|\vec{B}_1| = B_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi d}$$

$$|\vec{B}_2| = B_2 = \frac{\mu I_2}{2\pi d}$$

Dichos campos son perpendiculares a cada uno de los conductores ( $\theta = 90^\circ$ ) por lo que ejercerán sendas fuerzas sobre cada conductor de valores máximos respectivos:

$$F_{12} = |\vec{F}_{12}| = I_2 \cdot |\vec{l}_2| \cdot |\vec{B}_1| = I_2 \cdot |\vec{l}_2| \cdot \frac{\mu I_1}{2\pi d} = \frac{\mu I_1 I_2 \cdot l_2}{2\pi d}$$

$$\boxed{F_{12} = |\vec{F}_{12}| = \frac{\mu I_1 I_2 \cdot l_2}{2\pi d}} \quad [4.12]$$

$$F_{21} = |\vec{F}_{21}| = I_1 \cdot |\vec{l}_1| \cdot |\vec{B}_2| = I_1 \cdot |\vec{l}_1| \cdot \frac{\mu I_2}{2\pi d} = \frac{\mu I_1 I_2 \cdot l_1}{2\pi d}$$

$$\boxed{F_{21} = |\vec{F}_{21}| = \frac{\mu I_1 I_2 \cdot l_1}{2\pi d}} \quad [4.13]$$

Si los conductores son indefinidos, conviene utilizar la expresión de la fuerza por unidad de longitud:

$$f = \frac{F}{l}$$

que resulta ser la misma para cada conductor:

$$\boxed{f_1 = f_2 = \frac{F_{12}}{l_2} = \frac{F_{21}}{l_1} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}} \quad [4.14]$$

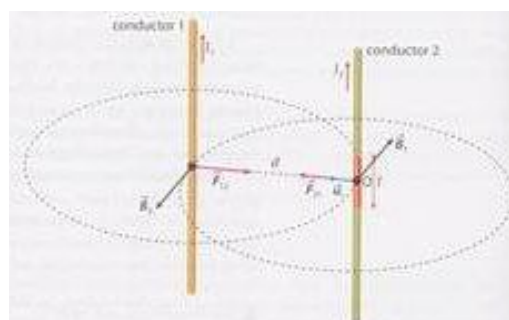


Figura 4.17  
Interacción entre corrientes rectilíneas y paralelas

Esta fuerza será atractiva si las corrientes circulan en el mismo sentido (como el caso de la anterior figura) y repulsiva si circulan en sentidos opuestos.

La ecuación [4.14] permite dar la siguiente definición de amperio como unidad fundamental de intensidad de corriente en el S.I.:

*Un amperio es la intensidad de corriente que debe circular por dos conductores paralelos, rectilíneos e indefinidos y separados 1 m en el vacío, para que se atraigan o repelan con una fuerza de  $2 \cdot 10^{-7}$  N por unidad de longitud.*

### **EJEMPLO 16º**

Por dos conductores rectilíneos y paralelos, que se encuentran separados 40 cm en el vacío, circulan sendas corrientes eléctricas de 2 y 4 A en sentido contrario. Calcular:

- a) El campo magnético que crea cada una de ellas donde está la otra.
- b) La fuerza por unidad de longitud que ejerce una sobre la otra.

## **TEMA 5. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA**

- 1. Flujo magnético a través de una superficie**
- 2. Experiencias de Faraday: inducción electromagnética**
- 3. Ley de Faraday-Lenz**
- 4. Generación de corriente alterna**
- 5. Transformadores**
- 6. Autoinducción electromagnético**
- 7. Analogías y diferencias entre el campo electrostático y el campo magnético**

## INTRODUCCIÓN

En el tema anterior hemos visto que las corrientes eléctricas (cargas eléctricas en movimiento), generan a su alrededor un campo magnético. En este tema nos planteamos si un campo magnético es capaz de generar una corriente eléctrica. La respuesta es que sí pero, bajo ciertas condiciones.

### 1. FLUJO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE

Cuando una superficie  $S$  se coloca en el interior de un campo magnético  $\vec{B}$ , esta superficie es atravesada por un cierto nº de líneas de fuerza. En Física existe una magnitud física cuyo valor es directamente proporcional al nº de líneas de fuerza que atraviesa una determinada superficie.

Supongamos un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , y una superficie plana  $S$ , colocada en el interior de dicho campo. Se define el **flujo magnético** del campo  $\vec{B}$ , a través de la superficie plana  $S$ , como el producto escalar de los vectores campo magnético  $\vec{B}$  y superficie  $\vec{S}$ .

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = |\vec{B}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\vec{B}, \vec{S}) \quad [5.1]$$

El vector superficie  $\vec{S}$  es un vector perpendicular a la superficie y de módulo el valor del área de la misma.

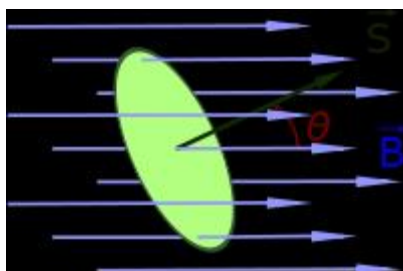


Figura 5.1

De la definición de flujo magnético a través de una superficie, podemos deducir las siguientes características:

1ª.- El flujo magnético es una magnitud física escalar puesto que se define mediante el producto escalar de dos vectores.

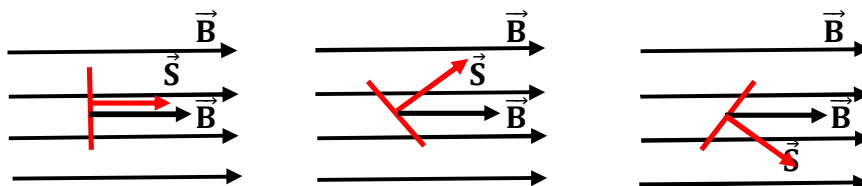
2ª.- La unidad de flujo magnético es la unidad de campo magnético por la unidad de superficie que, en el SI de unidades sería  $T \cdot m^2$ . A esta unidad se le denomina weber (Wb).

$$1Wb = 1 T \cdot m^2$$

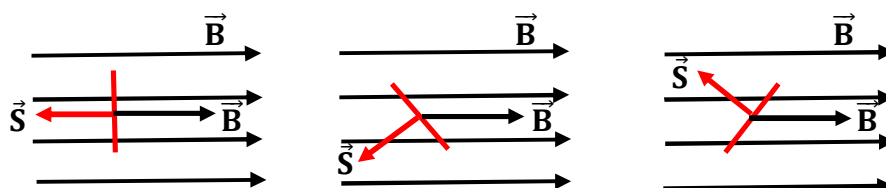
3ª.- Si observamos la expresión del flujo, podemos ver que depende de tres factores: la intensidad del campo  $|\vec{B}|$ , el tamaño de la superficie  $|\vec{S}|$ , y la orientación de la superficie respecto al campo magnético  $\cos(\vec{B}, \vec{S})$ . Por tanto, si queremos modificar el flujo magnético a través de una superficie, podemos modificar cualesquiera de estos tres factores.

4ª.- El flujo magnético puede ser positivo, negativo o cero.

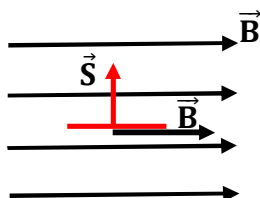
- El flujo a través de una superficie es positivo si  $\cos(\vec{B}, \vec{S}) > 0$ , y esto implica que los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  formen un ángulo agudo. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son salientes de la superficie.



- El flujo a través de una superficie es negativo si  $\cos(\vec{B}, \vec{S}) < 0$ , y esto implica que los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  formen un ángulo mayor de 90°. Desde el punto de vista físico esto significa que hay un nº neto de líneas de fuerza que son entrantes a la superficie.



- El flujo a través de una superficie es nulo si  $\cos(\vec{B}, \vec{S}) = 0$ , y esto implica que los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  sean perpendiculares, es decir, que la superficie este colocada paralelamente a las líneas de fuerza. Desde el punto de vista físico esto significa que la superficie no es atravesada por ninguna línea de fuerza o que el nº de líneas que atraviesan la superficie en ambos sentidos es el mismo.



5ª.- El flujo es máximo y positivo cuando  $\cos(\vec{B}, \vec{S}) = 1$ , es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo y salientes. Si  $\cos(\vec{B}, \vec{S}) = -1$ , El flujo es máximo y negativo, es decir, el nº de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es máximo pero entrantes.

6ª.- Si la superficie es cerrada, el flujo a través de ella es cero, ya que la superficie es atravesada en ambos sentidos por el mismo nº de líneas de campo.

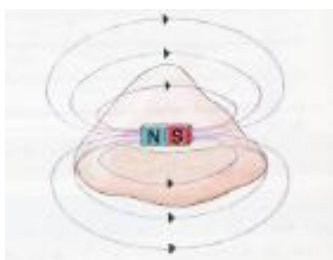


Figura 5.2

7ª.- La definición que hemos dado es para un campo magnético uniforme y una superficie plana. Pero, y si el campo no es uniforme y/o la superficie no es plana.

En estos casos se divide la superficie en infinitas superficies elementales de modo que cada una de estas superficies infinitesimales puede ser considerada como plana y el campo magnético constante en cada una de ellas. Calcularíamos entonces el flujo elemental  $d\phi$  realizado en cada superficie elemental mediante el producto escalar  $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$  y sumariamos todos estos flujos para obtener el flujo total a través de toda la superficie. Esta sumatoria se realiza mediante una operación matemática denominada integral y se escribe así:

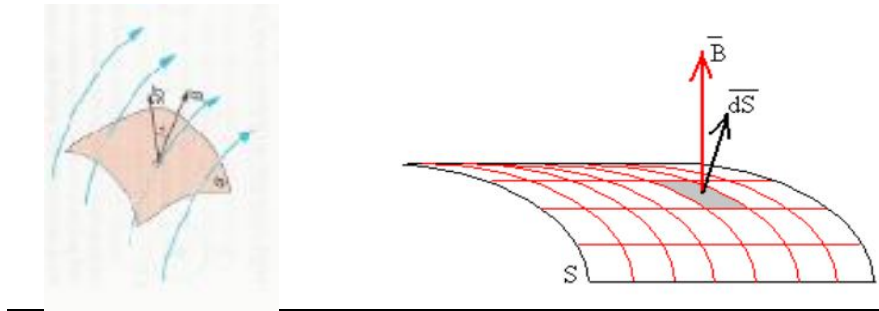
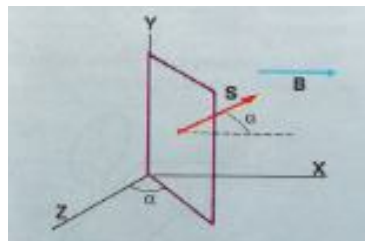


Figura 5.3

$$\phi = \int_A^B d\phi = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad [5.2]$$

### Ejemplo 1º

Una espira cuadrada de 10 cm de lado, puede girar en torno a uno de sus lados que está situado en el eje y, tal y como se indica en la figura. En esa región existe un campo magnético uniforme de 0,1 T, en sentido positivo del eje x.



a) Calcula el valor del flujo magnético a través de la superficie de la espira para cuando la espira ha girado los siguientes ángulos:  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $180^\circ$ .

b) Si suponemos que la espira con una velocidad angular de  $w = \pi \text{ rad/s}$ , calcula la expresión que proporcionaría el valor del flujo magnético en cualquier instante.

## 2. EXPERIENCIAS DE FARADAY: INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

En el tema anterior, vimos cómo una corriente eléctrica genera a su alrededor un campo magnético. El científico inglés Michael Faraday y el físico estadounidense Joseph Henry demostraron por separado en 1832 y 1831, respectivamente, con sus experiencias, cómo los campos magnéticos, en determinadas circunstancias, son capaces de generar corrientes eléctricas. Analicemos algunas de ellas.

### Primera experiencia

Al acercar o alejar un imán a una espira conectada a un galvanómetro (aparato que detecta el paso de corriente eléctrica en un circuito), se observa que éste mide el paso de corriente eléctrica por la espira. Sin embargo, al dejar en reposo el imán, cesa el paso de corriente por la espira.

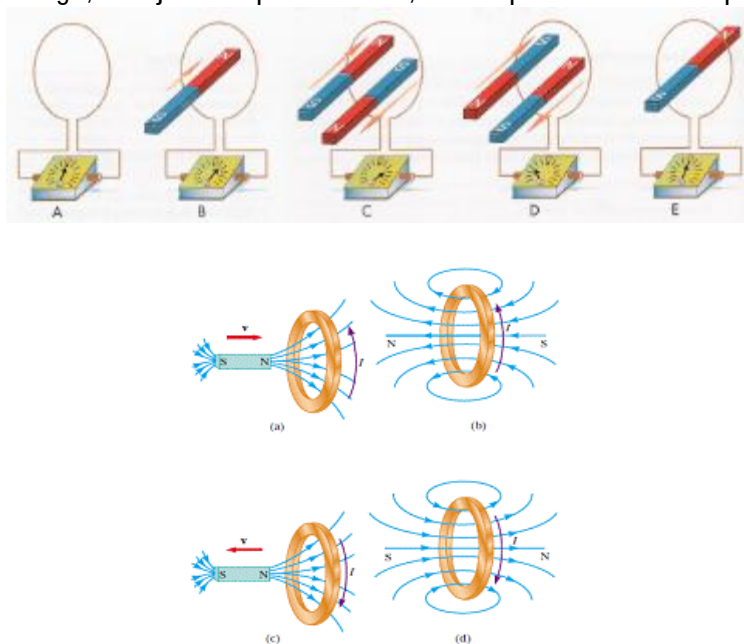


Figura 5.4

### Segunda experiencia

Si en la primera experiencia se sustituye el imán por una espira por la que pasa una determinada corriente eléctrica y se acerca o se aleja a la espira conectada al galvanómetro, éste detectará paso de corriente eléctrica en esta última espira. Si las espiras se mantienen en reposo una respecto a la otra, no aparecerá corriente en la espira con galvanómetro.

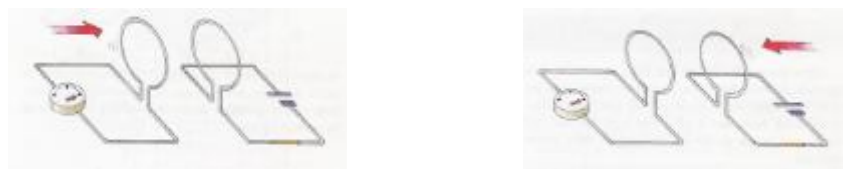


Figura 5.5

### Tercera experiencia

Al enfrentar dos circuitos, uno de ellos conectado a un generador de corriente y a un interruptor (bobina primaria) ,y cerrar y abrir alternativamente el interruptor, se observa la aparición de corriente eléctrica en el otro circuito (bobina secundaria). No aparece corriente en este segundo circuito si el interruptor se mantiene cerrado o abierto.

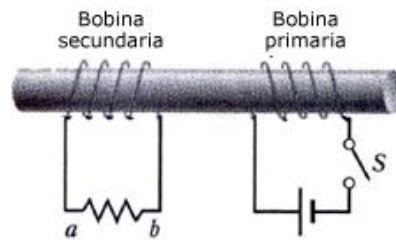


Figura 5.6

### Inducción electromagnética

En todas las experiencias anteriores, hay un hecho en común: la **variación del flujo magnético** que atraviesa el circuito en el que aparece la corriente eléctrica.

Se denomina **inducción electromagnética**, al fenómeno que consiste en la creación de una corriente eléctrica, denominada **corriente inducida**, en un circuito (**inducido**) mediante un campo magnético. Para que este fenómeno se produzca, no basta con la sola utilización de un campo magnético, es necesario que exista una variación del flujo magnético a través del circuito en el que queremos inducir la corriente.

### 3. LEY DE FARADAY-LENZ

Esta ley caracteriza (cuantifica) el fenómeno de la inducción electromagnética y permite determinar el valor y el sentido de la corriente inducida que aparece en un determinado circuito. Para que aparezca dicha corriente es necesario generar la energía para ello. Se llama **fuerza electromotriz (fem) inducida ( $\mathcal{E}$ )** a la energía comunicada a la unidad de carga eléctrica que circula por el inducido. Su unidad en el S.I. es el voltio (V).

#### Ley de Faraday

Permite calcular el valor de la fem inducida y su enunciado es el siguiente:

*La fuerza electromotriz inducida en un circuito es proporcional a la rapidez con que varía el flujo magnético que lo atraviesa.*

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \quad [5.3]$$

El valor absoluto permite obtener el valor de la fem inducida sin signo independientemente de que el flujo magnético aumente o disminuya.

- **Observaciones a la ley de Faraday**

- o Si el flujo magnético varía uniformemente a lo largo de un determinado intervalo de tiempo ( $\Delta t$ ) o bien sólo podemos conocer los valores inicial y final del mismo, el valor de la fem se determinará con la expresión:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \quad [5.4]$$

- o Como el flujo depende de tres factores (valor del campo magnético, superficie del circuito inducido y ángulo formado por el campo y la normal a la superficie del circuito), la variación de cualquiera de ellos permite que se genere corriente en el inducido.
- o El mayor o menor valor de la fem inducida no depende de lo grande o pequeño que sea el flujo magnético, depende de la mayor o menor rapidez en la variación del flujo, independientemente de si este es grande o pequeño.
- o Si el inducido consiste en una bobina (enrollamiento de N espiras), el valor de la fem será:

$$\mathcal{E} = N \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \quad \text{ó} \quad \mathcal{E} = N \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$$

- o Si R es la resistencia óhmica del circuito inducido, la intensidad de corriente inducida se podrá determinar por medio de la ley de Ohm:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

**Ley de Lenz**

Permite determinar el sentido de la corriente inducida y su enunciado es el siguiente:

*El sentido de la corriente inducida es tal que se opone con sus efectos (generación de un campo magnético inducido), a la causa que la produce.*

Esto significa que el sentido de la corriente inducida es tal que su campo magnético se opondrá a los aumentos o disminuciones de flujo que la han originado.

- **Observaciones a la ley de Lenz**

- o Si el flujo magnético inductor aumenta, la corriente inducida producirá un campo magnético que tiende a oponerse al campo inductor, por lo que tendrá sentido opuesto a éste (ver esquema superior de la figura 5.4).
- o Si el flujo magnético inductor disminuye, la corriente inducida producirá un campo magnético que tiende a oponerse al campo inductor, por lo que tendrá el mismo sentido que éste (ver esquema inferior de la figura 5.4).

**Ley de Faraday-Lenz**

Consiste en la aplicación conjunta de la ley de Faraday y la ley de Lenz, siendo su expresión:

$$\boxed{\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}} \quad [5.5]$$

donde el signo “-” expresa la oposición de la fem inducida a la variación del flujo magnético que la genera.

**Ejemplo 2º**

Una bobina está formada por 100 espiras rectangulares de 20x30 cm de lado, y se encuentra situada perpendicularmente a un campo magnético variable de valor  $B = t^2 + 4t$  T

- Calcula el flujo magnético a través de una de las espiras de la bobina en función del tiempo.
- Calcula el flujo magnético a través de la bobina en función del tiempo.
- Calcula la fem inducida en la bobina.
- Dibuja la gráfica del flujo magnético y de la fem inducida en la bobina en función del tiempo.

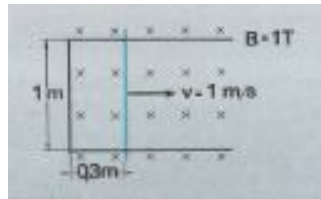
**Ejemplo 3º**

Una bobina está formada por 500 espiras circulares de 50 cm de radio cada una, y se encuentra en el seno de un campo magnético perpendicular al plano de las espiras. El campo magnético inicialmente vale 1 T y disminuye linealmente hasta anularse en 10 s.

- Calcula la expresión del campo magnético en función del tiempo.
- Calcula el flujo magnético a través de la bobina en función del tiempo.
- Calcula la fem inducida en la bobina. ¿Habría otra forma de calcular la fem inducida?  
¿Cuál?
- Razona el sentido de la corriente eléctrica inducida.

**Ejemplo 4º**

Una espira rectangular está colocada perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 1 T. La espira posee un lado móvil que se desplaza con una velocidad constante de 1 m/s, debido a un agente externo, tal y como se indica en la figura:

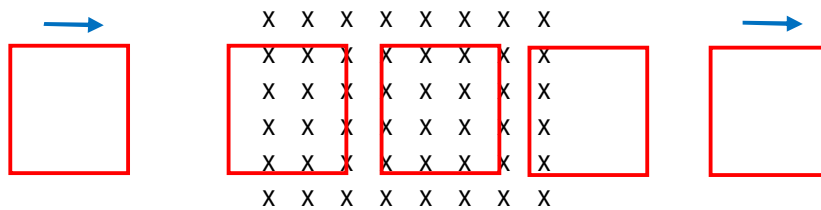


- Calcula:
- La expresión instantánea del flujo magnético que atraviesa la espira.
  - La fem inducida en la espira.
  - El valor de la corriente eléctrica inducida si la resistencia de la espira es de  $2 \Omega$ .
  - El sentido de la corriente inducida.

### **Ejemplo 5º**

Una espira cuadrada de 20 cm de lado se aproxima con velocidad constante hacia una región en la que existe un campo magnético uniforme B, perpendicular a la espira.

- Razona cuando y porqué se producirá inducción electromagnética en la espira desde que se acerca al campo, penetra en él y lo abandona.
- Cuando se produzca inducción electromagnética, razona el sentido de la corriente inducida.



#### 4. GENERACIÓN DE CORRIENTE ALTERNA

La corriente alterna consiste en la variación periódica tanto de la fem inducida como de la intensidad de corriente que aparece en el circuito inducido.

Una forma de generarla consiste en disponer, dentro de un campo magnético uniforme  $B$ , una espira que gira con velocidad angular  $\omega$  constante (MCU) alrededor de un determinado eje (figura 5.7).

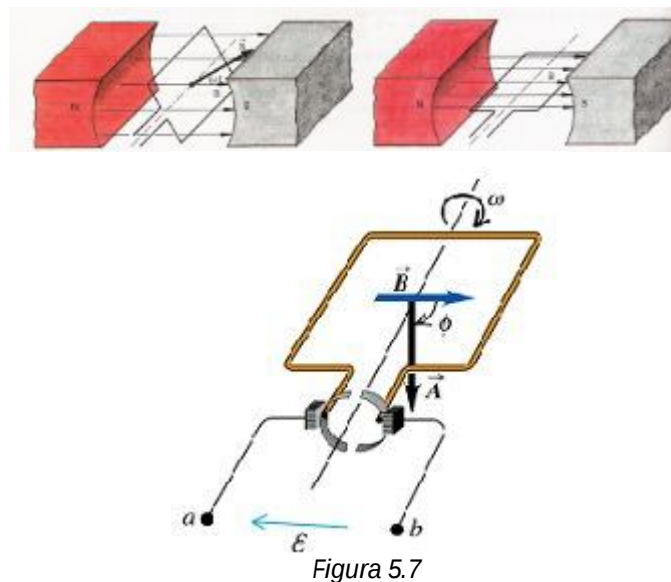


Figura 5.7

En estas condiciones, el valor del ángulo  $\theta$  que forma el campo magnético con la normal a la espira, varía con el tiempo según la expresión  $\theta = \theta_0 + \omega \cdot t$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo que forman inicialmente el campo y la normal a la espira. Si suponemos que inicialmente los vectores campo magnético y superficie formaban  $0^\circ$ , podemos, entonces, escribir la expresión del flujo magnético a través de la espira de la siguiente forma:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = |\vec{B}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\vec{B}, \vec{S}) = B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Si se trata de una bobina formada por  $N$  espiras, todas de la misma superficie, el flujo instantáneo a través de la bobina sería:

$$\Phi(t) = N \cdot B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad [5.6]$$

Aplicando la ley de Faraday-Lenz, la fem inducida instantánea será:

$$\epsilon(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Llamando fem máxima  $\epsilon_0$  al término  $N \cdot B \cdot S \cdot \omega$ , resulta:

$$\epsilon(t) = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = \epsilon_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad [5.7]$$

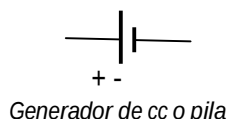
Aplicando la ley de Ohm, la expresión de la corriente inducida queda así:

$$i(t) = \frac{\epsilon}{R} = \frac{N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{R} = i_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad [5.8]$$

donde  $i_0$  es la intensidad máxima ( $i_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$ ).

Como puede observarse en las expresiones instantáneas de la fem y de la intensidad, éstas varían periódicamente con el tiempo, y por tanto, la corriente eléctrica inducida en el dispositivo anterior es una corriente alterna y, al dispositivo anterior se le denomina **GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA** o **ALTERNADOR**.

Recuerda que para una pila o generador de corriente continua (c. c.) se utiliza un símbolo que consiste en dos pequeñas líneas paralelas de distinta longitud, para un generador de c. a. o alternador se utiliza también un símbolo y es el siguiente:



Generador de cc o pila



Generador de ca o alternador

Con la siguiente tabla de valores podemos representar gráficamente ambas magnitudes físicas:

| $t$ (s) | $\omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$ (rad)          | $\sin(\omega t)$ | $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cdot \sin(\omega t)$ (V) | $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$ (A) |
|---------|----------------------------------------------------|------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 0       | 0                                                  | 0                | 0                                                         | 0                                     |
| $T/4$   | $\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ | 1                | $\mathcal{E}_0$                                           | $I_0$                                 |
| $T/2$   | $\pi$                                              | 0                | 0                                                         | 0                                     |
| $3T/4$  | $3\pi/2$                                           | -1               | $-\mathcal{E}_0$                                          | $-I_0$                                |
| $T$     | $2\pi$                                             | 0                | 0                                                         | 0                                     |

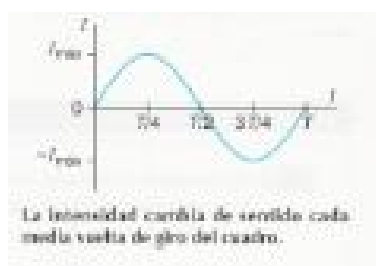
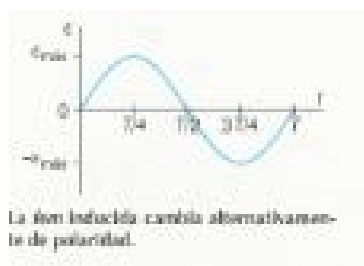


Figura 5.8

Como podemos observar el signo de la fem cambia dos veces en un periodo, por tanto, el sentido de la corriente eléctrica cambia también dos veces en un periodo.

Podría pensarse que este cambio en el sentido de la intensidad de la c. a. supone que los electrones se desplazan a lo largo del conductor en uno y otro sentido alternativamente, sin embargo, lo que en realidad ocurre, es que los electrones del conductor se ponen a vibrar en torno a una posición fija.

### Ejemplo 6º

Una bobina de 1000 espiras circulares de 5 cm de radio cada una gira en el interior de un campo magnético uniforme de 0,2 T, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro, a razón de 1200 rpm.

- Calcula las expresiones instantáneas del flujo, de la fem inducida y de la intensidad en la bobina, si su resistencia es de 20  $\Omega$ .
- Calcula el valor de las tres magnitudes anteriores para  $t = 1$  s.
- Representa gráficamente al flujo, a la fem inducida y a la intensidad en función del tiempo.

**Ejemplo 7º**

Calcula a qué velocidad angular debería de girar una bobina de 10.000 espiras cuadradas de 20 cm de lado en el seno de un campo magnético de 1 T para que produzca una fem máxima de 220 V. Exprésala en rpm.

## 5. TRANSFORMADORES

La corriente alterna ha de ser transportada desde donde se produce hasta donde se utiliza. En este transporte se producen pérdidas energéticas por efecto Joule en los cables conductores por los que circula. En concreto la potencia disipada en un conductor de resistencia  $R$  por el que circula una c. a. de intensidad  $I$  es:

$$P = I^2 R$$

Si se quieren reducir las pérdidas energéticas puede elegirse entre dos opciones: disminuir la resistencia del cable conductor que la transporta, o disminuir la intensidad que circula por el mismo.

La primera opción supone aumentar el grosor del conductor (recordemos que la resistencia de un conductor viene dada por la expresión:  $R = \rho \frac{L}{S}$ ). Esto implica un mayor gasto en la instalación, al aumentar la cantidad de metal a utilizar y ser mayor el peso que tendrían que soportar las torres de sujeción.

La segunda opción, la disminución de la intensidad que circula, puede conseguirse aumentando la ddp en los cables de conducción. Esto se explica porque la potencia que transporta (energía por unidad de tiempo) una corriente eléctrica viene dada por:

$$P = V \cdot I$$

De modo que para un cierto valor de la potencia, cuando menor sea la intensidad, mayor tendrá que ser la ddp.

Esta segunda opción obliga a transportar la c. a. a un potencial muy elevado. En las centrales eléctricas la c. a. se produce a unos 20.000 V y en los cables se transporta hasta a 400.000 V. Esto exige disponer de un dispositivo que sea capaz de aumentar la tensión de la c. a. a la salida de las centrales eléctricas, y que luego reduzca la tensión al llegar a los lugares de consumo (p. e. 220 V en los hogares). Este dispositivo es el transformador de c. a.

Un transformador es un dispositivo que consiste de un núcleo metálico (generalmente de hierro) al que se enrollan dos conductores formando dos circuitos: un circuito primario con  $N_1$  espiras (arrollamiento primario), y un circuito secundario con  $N_2$  espiras (arrollamiento secundario) (figura 5.9).

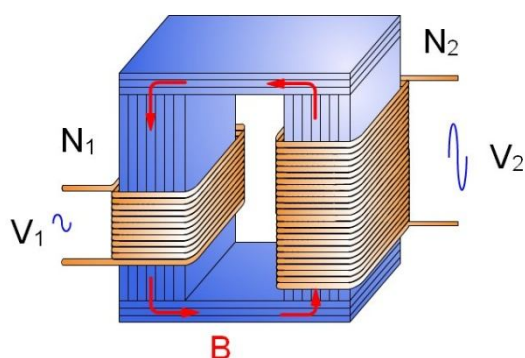


Figura 5.9

Al conectar el circuito primario a una fuente de corriente alterna de voltaje máximo  $V_1$ , ésta genera un campo magnético variable cuyas líneas de campo con conducidas a lo largo del núcleo de hierro hasta atravesar las espiras del circuito secundario. Como la intensidad de la c. a. del primario es variable con el tiempo, el campo magnético que crea también lo será, y por tanto, el flujo magnético a través del secundario, dándose la condición necesaria para que en este último arrollamiento se produzca el fenómeno de la inducción electromagnética, es decir, en el secundario aparecerá una corriente eléctrica inducida que también será alterna.

Puede demostrarse que la relación entre la tensión de entrada  $V_1$  y la tensión de salida  $V_2$ , es la siguiente:

$$\boxed{\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}} \quad [5.9]$$

La última expresión nos indica que el voltaje en cada circuito es directamente proporcional al número de espiras que lo forman. Este hecho permite **transformar** la corriente alterna de manera que:

- Si el arrollamiento secundario tiene mas vueltas que el primario, entonces la tensión a la salida del transformador es mayor que a la entrada, es decir, el transformador actúa como un elevador de tensión:

Si  $N_2 > N_1$ , entonces  $V_2 > V_1$  y hablaremos de **elevador de tensión ó transformador de alta**.

- Si el arrollamiento secundario tiene menos vueltas que el primario, entonces la tensión a la salida del transformador es menor que a la entrada, es decir, el transformador actúa como un reductor de tensión:

Si  $N_2 < N_1$ , entonces  $V_2 < V_1$  y hablaremos de **reductor de tensión ó transformador de baja**.

De la misma forma, si suponemos comportamiento ideal del transformador, no habrá pérdida de potencia cumpliéndose:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow V_1 \cdot I_1 = V_2 \cdot I_2 \Rightarrow \frac{I_1}{N_2} = \frac{I_2}{N_1}$$

donde observamos que la intensidad de corriente en cada circuito es inversamente proporcional al número de espiras en cada uno. Por tanto, un transformador elevador de tensión será reductor de intensidad y, por el contrario, un transformador reductor de tensión será elevador de intensidad.



Figura 5.10

### IMPORTANTE:

Un transformador no puede ser utilizado en cc, ya que, si al primario llega una cc, su campo magnético no produciría en el secundario un flujo variable con el tiempo y, por tanto, en este

arrollamiento no se produciría el fenómeno de la inducción electromagnética, es decir, no aparecería corriente inducida en el secundario.

**Ejemplo 8º**

Un transformador de c. a. está formado por un arrollamiento de 100 espiras y otro de 1000. Calcula cual será la tensión de salida si se conecta de una u otra forma a una tensión alterna de 220 V.

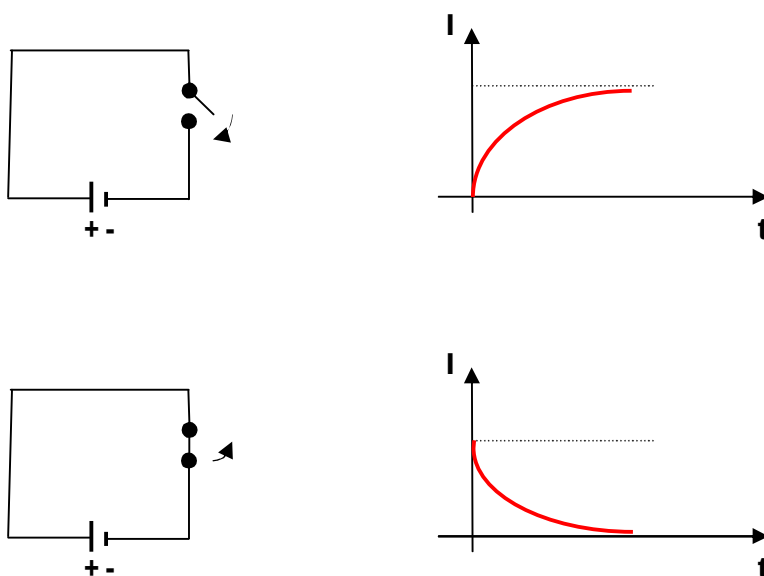
## 8. AUTOINDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Hasta ahora, en los fenómenos de inducción que hemos estudiado, el campo magnético que utilizábamos para producir el flujo variable en el circuito inducido era externo a este circuito, es decir, utilizábamos como fuente del campo magnético a un imán o a la corriente eléctrica del circuito inductor. Pero, ¿puede un circuito por el que circula una corriente eléctrica producirse a sí mismo fenómenos de inducción, es decir, puede un circuito ser al mismo tiempo el inductor y el inducido? La respuesta es que sí, y al fenómeno ahora se llamaría **AUTOINDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA**. Veámoslo.

Imaginemos un circuito por el que circula una corriente eléctrica variable (p. e. una c. a.). Por ser variable la intensidad de la corriente, creará a su alrededor un campo magnético variable con el tiempo. Este campo magnético variable producirá un flujo variable a través de la superficie del propio circuito, y por tanto, según Henry y Faraday, se dan las condiciones para que se produzca en el propio circuito fenómenos de inducción electromagnética, es decir, además de la corriente eléctrica que ya había en el circuito, aparece una segunda corriente, una corriente extra, la corriente inducida (corriente autoinducida).

Como hemos comprobado en el razonamiento anterior, para que se produzca el fenómeno de autoinducción en un circuito, es necesario que circule por él una corriente eléctrica variable. Según esto podría pensarse que el fenómeno de la autoinducción sólo se presenta en circuitos de c. a. Sin embargo, también se produce en los circuitos de c. c. durante un breve periodo de tiempo cuando se conectan o desconectan dichos circuitos.

Imaginemos un circuito abierto de c.c. Al cerrar el interruptor, varía la intensidad de la corriente que circula por él, que pasa de 0 a un valor  $I$  en un breve intervalo de tiempo  $\Delta t$ . En este intervalo de tiempo es cuando se produce la autoinducción, y desaparece cuando la intensidad se estabiliza. Lo mismo sucede cuando, una vez conectado, se desconecte el circuito, porque también habrá un breve intervalo de tiempo en el que la intensidad variará para pasar del valor  $I$  al valor 0. Estas corrientes autoinducidas se denominan extracorrientes de cierre y de apertura.



## 9. ANÁLOGÍAS Y DIFERENCIAS ENTRE EL CAMPO ELECTROSTÁTICO Y EL CAMPO MAGNÉTICO

Si analizamos las expresiones del campo eléctrico y del campo magnético creado por una carga puntual, observamos diferentes analogías y diferencias:

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{vector campo}) \quad E = K \frac{|Q|}{r^2} \quad (\text{módulo del vector campo})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{v} \times \vec{u}_r \quad (\text{vector campo}) \quad B = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{|Q|}{r^2} \cdot v \quad (\text{módulo del vector campo})$$

### ANÁLOGÍAS

1ª.- Los dos campos son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que separa cada punto de la carga fuente.

2ª.- Las fuerzas de interacción en ambos campos pueden ser de atracción o de repulsión dependiendo del signo de las cargas eléctricas que interaccionan (campo eléctrico) o de los polos que interaccionan (campo magnético).

3ª.- No son fuerzas por contacto, sino interacciones a distancia que actúan tanto en el vacío como en presencia de medios materiales. La presencia de una carga o de una carga en movimiento, produce una “deformación” que dota al espacio de cierta propiedad en cada uno de sus puntos, creándose, de este modo, los campos correspondientes. Esta “deformación” del espacio sólo se pone de manifiesto al situar en esos puntos a una carga o a una carga testigo en movimiento.

4ª.- En ambos campos el medio juega un importante papel a través de la constante eléctrica K, en el campo eléctrico, y de la permeabilidad magnética  $\mu$  en el campo magnético.

5ª.- Ambos campos presentan fenómenos de inducción.

### DIFERENCIAS

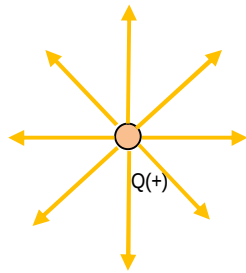
1ª.- Una carga en reposo o en movimiento puede crear un campo eléctrico. Sin embargo, una carga tiene que estar en movimiento para crear un campo magnético.

2ª.- Mientras que el campo eléctrico puede actuar sobre cargas en reposo o en movimiento, el campo magnético sólo puede hacerlo sobre cargas en movimiento.

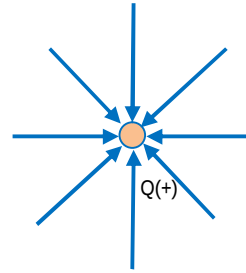
3ª.- El campo eléctrico es central ya que su dirección es la de la recta que une cada punto con la carga que crea el campo. Sin embargo el campo magnético no lo es, es perpendicular a la dirección radial y a la velocidad de la carga que lo crea.

4ª.- El campo eléctrico es conservativo, pero el campo magnético no lo es, es decir, mientras que al campo eléctrico le podemos asociar una energía potencial y un potencial, al campo magnético no.

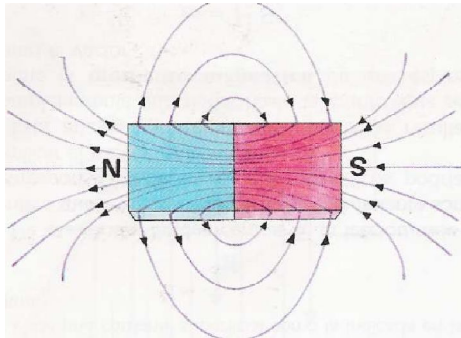
5ª.- Las líneas de campo eléctrico son abiertas, pero las del campo magnético son cerradas.



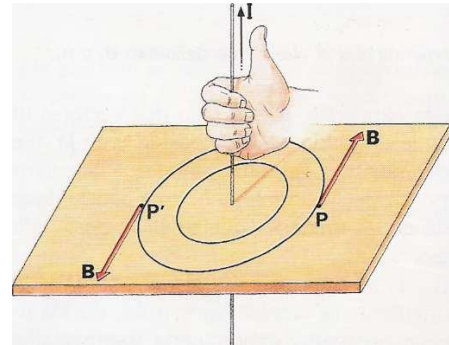
Líneas de fuerza de una carga puntual +



Líneas de fuerza de una carga puntual -



Líneas de fuerza de un imán



Líneas de fuerza de una corriente eléctrica rectilínea

6ª.- Mientras que en el campo eléctrico las cargas positivas y negativas se pueden aislar entre sí (monopolos eléctricos), en el campo magnético el polo norte y el polo sur siempre aparecen juntos (dipolo magnético), es decir, no se pueden separar, no hay monopolos magnéticos.

7ª.- El campo eléctrico es máximo en el vacío. Sin embargo el campo magnético no es máximo en el vacío. En los medios paramagnéticos y ferromagnéticos el campo magnético es mayor que en el vacío, pero en los medios diamagnéticos es menor.

## **TEMA 6. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)**

- 1. Movimientos periódicos, oscilatorios, vibratorios y vibratorios armónicos simples**
- 2. Magnitudes características de un MAS**
- 3. Descripción matemática del MAS**
  - 3.1 Ecuación del movimiento, elongación o posición**
  - 3.2 Velocidad de vibración**
  - 3.3 Aceleración de vibración**
- 4. Definición cinemática y de definición dinámica de un MAS**
- 5. Oscilaciones en un muelle**
- 6. Energía del oscilador armónico**

## 1. MOVIMIENTOS PERIÓDICOS, OSCILATORIOS, VIBRATORIOS Y VIBRATORIOS ARMÓNICOS SIMPLES

Un movimiento es **periódico** si se repite a intervalos regulares de tiempo, es decir, cuando los valores de las variables cinemáticas de la partícula (posición, velocidad y aceleración) se repiten a intervalos regulares de tiempo. Son movimientos periódicos: el MCU, cualquier movimiento de rotación de los planetas alrededor del sol y de los satélites alrededor de sus planetas, las oscilaciones de un péndulo, el movimiento de un cuerpo unido a un muelle, el movimiento de los electrones en ca, el pistón del motor de un coche, el niño columpiándose, ...

Un movimiento **periódico es oscilatorio** cuando la trayectoria se recorre en los dos sentidos. Son movimientos oscilatorios las oscilaciones de un péndulo, el movimiento de un cuerpo unido a un muelle, el movimiento de los electrones en c. a., el pistón del motor de un coche, el niño columpiándose.

Los **movimientos oscilatorios pueden ser amortiguados y no amortiguados o libre**. Un movimiento oscilatorio es no amortiguado o libre si permanece igual a lo largo del tiempo, y es amortiguado si desaparece al cabo de un cierto tiempo. En la mayoría de los casos los movimientos oscilatorios son amortiguados (pensemos en un niño columpiándose), pero, podemos mantener el movimiento indefinidamente si lo forzamos, proporcionándole energía continuamente. Nosotros estudiaremos un tipo de movimiento oscilatorio no amortiguado.

Un movimiento **oscilatorio es vibratorio** cuando la trayectoria que se recorre en los dos sentidos es recta y el punto de equilibrio se encuentra en el centro de la trayectoria. Son movimientos vibratorios el movimiento de un cuerpo unido a un muelle, el movimiento de los electrones en ca, el pistón del motor de un coche, el niño columpiándose.

El movimiento de un péndulo realmente no es vibratorio, salvo que la longitud del hilo sea muy larga y las oscilaciones muy pequeñas, y, entonces, la trayectoria del cuerpo que hay unido al hilo se podría aproximar a una rectilínea.

El movimiento vibratorio mas sencillo es el **movimiento armónico simple (MAS)**, que es aquel movimiento vibratorio en el que la posición, velocidad y aceleración se pueden describir mediante las funciones seno y/o coseno.

## 2. MAGNITUDES CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

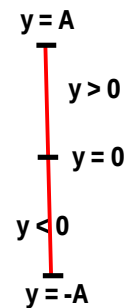
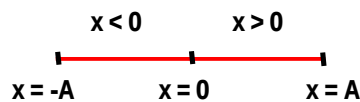
En el movimiento armónico simple se definen las siguientes magnitudes físicas:

- **Elongación (x o y):** es la posición de la partícula respecto a la posición de equilibrio, es decir, respecto al centro de la trayectoria. Se mide en m en el SI de unidades, y la representamos por la letra x si el movimiento se realiza en la horizontal, o por la letra y si se realiza en la vertical.

La elongación será positiva cuando la partícula se encuentre en la parte positiva de la trayectoria, y negativa cuando esté en la parte negativa de la trayectoria.

La elongación o posición será una función del tiempo  $x(t)$  o  $y(t)$ .

- **Amplitud (A):** es la elongación máxima, es decir, la máxima separación de la posición de equilibrio, o sea, la distancia que hay del extremo de la trayectoria a su centro. La representamos por la letra A y se mide también en m.



- **Periodo (T):** es el valor del intervalo de tiempo que emplea la partícula en volver a repetir su estado de movimiento, es decir, en dar una oscilación completa. Se expresa en segundos (s) en el SI.
- **Frecuencia (f):** es el número de veces que la partícula repite un mismo estado de movimiento por unidad de tiempo, es decir, el número de oscilaciones por unidad de tiempo. Se expresa en hercios (Hz) en el SI.

Ambas magnitudes están relacionadas por medio de la expresión:

$$f = \frac{1}{T} \quad [6.1]$$

- **Frecuencia angular ó pulsación ( $\omega$ ):** es la rapidez con que cambia el estado de movimiento de la partícula. Se expresa en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  en el SI. La relación con el periodo y la frecuencia del MAS es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [6.2]$$

### 3. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL MAS

#### 3.1 Ecuación del movimiento, elongación o posición

La ecuación de la **elongación o ecuación de la posición o ecuación del movimiento** ( $x$  ó  $y$ ) de una partícula que describe un MAS, viene dada por:

$$x(t) \text{ ó } y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad [6.3]$$

donde

- $A$  es la amplitud del movimiento es decir, el máximo desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio. Se expresa en metros (m) en el SI.
- $\omega$  es la frecuencia angular del movimiento. Se expresa en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  en el SI.

A la expresión  **$(\omega \cdot t + \varphi_0)$**  se conoce como **FASE** del movimiento, y es un ángulo medido en radianes en el SI.

A  $\varphi_0$  se le denomina **FASE INICIAL**, y es el valor de la fase en el instante  $t = 0$ . El valor de la fase inicial depende de las condiciones iniciales del movimiento, es decir, de la posición y de la velocidad de la partícula en el instante inicial. Así:

- o Si  $x(t = 0) = 0$ , es decir, si en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición de equilibrio, la ecuación del movimiento será una de estas dos:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad \text{ó} \quad x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \pi)$$

La primera ecuación indicaría que la partícula se encuentra inicialmente en la posición de equilibrio y moviéndose hacia la parte positiva de la trayectoria (velocidad inicial positiva), y la segunda que se mueve hacia la parte negativa de la trayectoria (velocidad inicial negativa)

- o Si  $x(t = 0) = A$ , es decir, si en el instante inicial la partícula se encuentra en el extremo positivo de la trayectoria, la ecuación será:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \pi/2) = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

- o Si  $x(t = 0) = -A$ , es decir, si en el instante inicial la partícula se encuentra en el extremo negativo de la trayectoria, la ecuación será:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + 3\pi/2) = -A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

- Observaciones a la ecuación de la posición

La ecuación [6.3] también se puede expresar con la función coseno, pero, la fase inicial de la función seno es diferente de la de la función coseno para describir la misma situación inicial.

#### 3.2 Velocidad de vibración

La ecuación de la velocidad se determina derivando la posición con respecto al tiempo. Tomando para ésta la ecuación [6.3] resulta:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)] \Rightarrow v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad [6.4]$$

- Observaciones a la ecuación de la velocidad

- El valor máximo de la velocidad es  $A \cdot \omega$ , y se alcanza en aquellos instantes de tiempo para los que  $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = \pm 1$ .
- La velocidad alcanza su valor máximo cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio,  $x = 0$ .

### 3.3 Aceleración de vibración

La ecuación de la aceleración se determina derivando la velocidad con respecto al tiempo. Tomando para ésta la ecuación [2.4] resulta:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)] \Rightarrow \boxed{a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x(t)} \quad [6.5]$$

- Observaciones a la ecuación de la aceleración

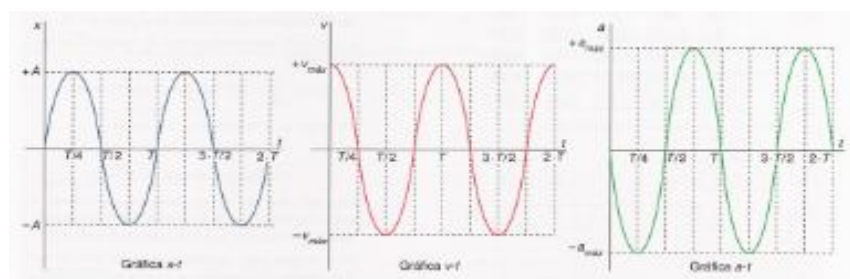
- El valor máximo de la aceleración es  $A \cdot \omega^2$ , y se alcanza en aquellos instantes de tiempo para los que  $\sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = \pm 1$ .
- La aceleración máxima se alcanza en los extremos de la trayectoria.
- Se puede comprobar fácilmente que la aceleración de un MAS es directamente proporcional a la posición pero de signo contrario:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t) \quad [6.6]$$

### Gráficas de la elongación (x), velocidad (v) y aceleración (a)

Podemos construir una tabla de valores y representar gráficamente la posición, velocidad y aceleración para una partícula con MAS. Se ha considerado el caso en el que el oscilador inicia el movimiento en la posición de equilibrio con velocidad positiva, es decir  $\varphi_0 = 0$ .

| t (s)  | $\omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot t \text{ (rad)}$ | $\sin(\omega \cdot t)$ | $\cos(\omega \cdot t)$ | $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$<br>(m) | $v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$<br>(m/s) | $a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$<br>(m/s <sup>2</sup> ) |
|--------|---------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| 0      | 0                                                       | 0                      | 1                      | 0                                            | $A \omega$                                                  | 0                                                                            |
| $T/4$  | $\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$      | 1                      | 0                      | A                                            | 0                                                           | $-A \omega^2$                                                                |
| $T/2$  | $\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi$                | 0                      | -1                     | 0                                            | $-A \omega$                                                 | 0                                                                            |
| $3T/4$ | $\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2}$    | -1                     | 0                      | -A                                           | 0                                                           | $A \omega^2$                                                                 |
| T      | $\frac{2\pi}{T} \cdot T = 2\pi$                         | 0                      | 1                      | 0                                            | $A \omega$                                                  | 0                                                                            |



|                         |                      |                   |                      |                  |
|-------------------------|----------------------|-------------------|----------------------|------------------|
| $x = -A$                | $x < 0$              | $x = 0$           | $x > 0$              | $x = A$          |
| ----- ----- ----- ----- |                      |                   |                      |                  |
| $v = 0$                 | $v (+ \text{ ó } -)$ | $v = \pm A\omega$ | $v (+ \text{ ó } -)$ | $v = 0$          |
| $a = A\omega^2$         | $a > 0$              | $a = 0$           | $a < 0$              | $a = -A\omega^2$ |

**Ejemplo 1º**

Un cuerpo realiza un MAS de 8 cm de amplitud y 20 Hz de frecuencia. Considerando nula la fase inicial, escribe las ecuaciones instantáneas de la elongación, velocidad y aceleración. Dibuja las gráficas  $x-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$ .

**Ejemplo 2º**

La ecuación de un MAS es  $x(t) = 0,1 \cdot \sin(0,4\pi t + \pi/2)$  en unidades SI.

- Calcula las magnitudes características del movimiento.
- Dibuja las gráficas  $x-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$ .
- Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.

**Ejemplo 3º**

Un cuerpo que realiza un MAS tarda 2 s en hacer 10 oscilaciones completas. Si en el instante inicial se encuentra en reposo en la posición  $x = 0,2$  m, calcula:

- La ecuación de su movimiento.
- La velocidad y aceleración máximas.

**Ejemplo 4º**

La frecuencia de un MAS es de 0,5 Hz. Si en el instante inicial se encuentra en la posición de equilibrio con una velocidad de 22 m/s, calcula la ecuación de su movimiento.

**Ejemplo 5º**

La ecuación de un MAS es  $x(t) = 0,1 \cdot \cos(0,4\pi t)$  en unidades SI.

- Calcula las magnitudes características del movimiento.
- Dibuja las gráficas  $x-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$ .
- Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.

#### 4. DEFINICIÓN CINEMÁTICA Y DEFINICIÓN DINÁMICA DE UN MAS

En la pregunta anterior hemos obtenido la relación que existe entre la aceleración de vibración y la elongación en un MAS:

$$a = -\omega^2 \cdot x \text{ ó } -\omega^2 \cdot y$$

Esta ecuación nos sirve para definir cinemáticamente a un MAS, y es la siguiente:

*Siempre que en un movimiento la aceleración sea, en todo momento, directamente proporcional a la posición y de signo contrario, diremos que se trata de un MAS.  
La constante de proporcionalidad coincide con el cuadrado de la frecuencia angular o pulsación del MAS.*

Si aplicamos el Principio Fundamental de la Dinámica ó Segunda Ley de Newton al MAS, obtenemos la siguiente relación entre la fuerza y la posición:

$$F = m \cdot a = m \cdot (-\omega^2 \cdot x) = -m \cdot \omega^2 \cdot x \text{ (ó } -m \cdot \omega^2 \cdot y)$$

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot x \quad [6.7]$$

La relación obtenida nos sirve para definir dinámicamente a un MAS, y es la siguiente:

*Siempre que en un movimiento la fuerza sea, en todo momento, directamente proporcional a la posición y de signo contrario, diremos que se trata de un MAS.  
La constante de proporcionalidad coincide con el producto de la masa por el cuadrado de la frecuencia angular o pulsación del MAS.*

##### **Ejemplo 6º**

Una partícula de masa  $m$  se mueve con una aceleración que cumple la relación  $a = -4\pi^2 x$ . Si en el instante inicial la partícula se encuentra a 40 cm de la posición de equilibrio y en reposo.

- Calcula las magnitudes características del movimiento.
- Calcula la ecuación del movimiento y las expresiones instantáneas de la velocidad y aceleración de vibración.
- Dibuja las gráficas  $x-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$ .
- Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 2 s.

##### **Ejemplo 7º**

La fuerza que actúa sobre una partícula de 200 g de masa cumple la siguiente relación  $F = -3,2\pi^2 x$ . Si en el instante inicial la partícula tiene velocidad máxima:

- Calcula las magnitudes características del movimiento.
- Calcula la ecuación del movimiento y las expresiones instantáneas de la velocidad y aceleración de vibración.
- Dibuja las gráficas  $x-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$ .
- Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 5 s.

## 5. OSCILACIONES EN UN MUELLE

Un caso particular corresponde a la fuerza recuperadora ejercida por un muelle. Recordemos que cuando desplazamos a un cuerpo unido a un muelle de su posición de equilibrio, para soltarla a continuación, la fuerza que ejerce el muelle es una fuerza recuperadora que viene dada por la Ley de Hooke:

$$F = -K \cdot x$$

Donde  $x$  representa la distancia a la posición de equilibrio, y  $K$  es la denominada constante elástica del muelle que se mide en N/m.

Como vemos la fuerza recuperadora de un muelle es directamente proporcional a la posición y de signo contrario. Según la definición dinámica de un MAS se trata de un MAS.

Además la constante elástica del muelle coincide con el producto de la masa por el cuadrado de la pulsación:

$$K = m\omega^2 \quad [6.8]$$

De esta expresión podemos deducir la pulsación, el periodo y la frecuencia de las oscilaciones en un muelle:

$$m\omega^2 = K \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad [6.9]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \quad [6.10]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad [6.11]$$

Como vemos la frecuencia angular del oscilador, el periodo y la frecuencia sólo dependen de las características físicas del oscilador: la constante recuperadora del muelle ( $K$ ) y la masa del oscilador ( $m$ ).

### Ejemplo 8º

La constante elástica de un muelle vale 50 N/m.

- Calcula el periodo, frecuencia y pulsación de las oscilaciones de un cuerpo de 0,5 Kg colgado de él. ¿Dependerían los resultados anteriores de la amplitud del movimiento?
- Calcula la ecuación del movimiento y las expresiones instantáneas de la velocidad y aceleración de vibración.
- Dibuja las gráficas  $x-t$ ,  $v-t$  y  $a-t$ .
- Calcula la posición, velocidad y aceleración de la partícula a los 5 s.

## 6. ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO

La fuerza ejercida sobre un oscilador armónico y que cumple la ley de Hooke, es conservativa, de lo que se deduce que la energía mecánica (total) del oscilador se mantiene constante a lo largo de las distintas oscilaciones. Esto quiere decir que en cada oscilación se produce una continua transformación de energía potencial elástica en energía cinética. Veamos las expresiones de dichas energías tanto en función del tiempo como en función de la posición.

Un cuerpo que describe un MAS tiene energía cinética y energía potencial elástica

### Energía cinética

La energía cinética de un oscilador armónico vale:

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

donde m es la masa del oscilador y v el valor de su velocidad instantánea. Tomando la ecuación [6.4] resulta:

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow \{K = m \cdot \omega^2\} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}K \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad [6.12]$$

En los extremos de la trayectoria la energía cinética vale 0 puesto que allí la partícula tiene velocidad 0. La energía cinética de la partícula es máxima cuando pasa por el centro de la trayectoria, puesto que en ese punto la velocidad es máxima, y vale:

$$E_{c\text{máx}} = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2}K \cdot A^2 \quad [6.13]$$

### Energía potencial elástica

La energía potencial elástica de un oscilador armónico sujeto a un muelle de constante K tiene la expresión:

$$E_p = \frac{1}{2}K \cdot x^2 \quad [6.14]$$

donde x es la posición del oscilador con respecto a su posición de equilibrio. Tomando la ecuación [6.3] resulta:

$$E_p = \frac{1}{2}K \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad [6.15]$$

En el centro de la trayectoria la energía potencial es 0, puesto que en este punto la elongación es nula. En los extremos de la trayectoria la energía potencial elástica de un oscilador armónico es máxima, puesto que en ellos la elongación es máxima, y vale:

$$E_{p.\text{máx}} = \frac{1}{2}K \cdot A^2 \quad [6.16]$$

Que como vemos coincide con la energía cinética máxima.

## Energía mecánica

Si el movimiento es no amortiguado, es decir, ausencia de rozamiento, entonces no habría trabajo de fuerzas no conservativas y se cumpliría el PCEM, es decir, la energía mecánica de la partícula permanecería constante en cualquier punto de la trayectoria y en las sucesivas oscilaciones. Esto quiere decir que en cada oscilación se produce una continua transformación o intercambio de energía potencial elástica en energía cinética y viceversa.

Como la energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial elástica del oscilador. Así, al realizar dicha suma con las ecuaciones [6.12] y [6.15] resulta:

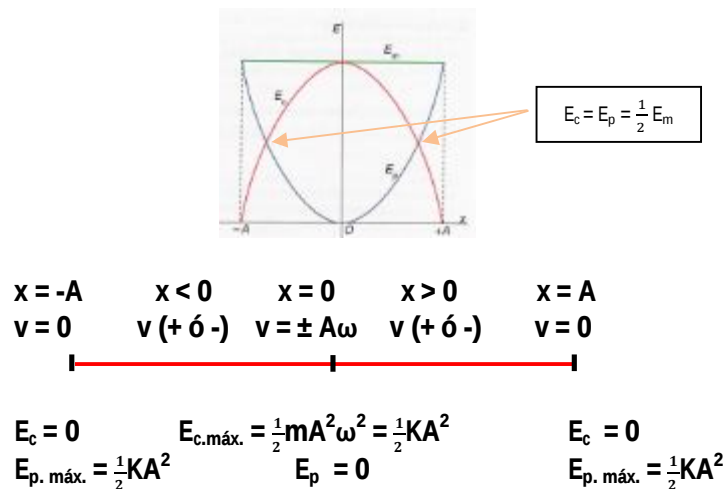
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}K \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2}K \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{1}{2}K \cdot A^2$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}K \cdot A^2 \quad [6.16]$$

con la que se comprueba que la energía mecánica del oscilador es constante una vez fijados los valores de la constante recuperadora, K, y la amplitud, A.

## Gráfica energética del oscilador armónico

En esta gráfica se han representado las variaciones de energía cinética y potencial del oscilador armónico a lo largo de una oscilación en función de la posición x. En ella se observa cómo se produce una transformación continua de una forma de energía en otra, de forma que la energía mecánica se mantiene constante.



Podemos destacar en la gráfica que hay dos puntos simétricos a un lado y otro de la posición de equilibrio, en los que la partícula tiene la misma energía cinética que potencial, y que podemos localizar del modo siguiente:

$$E_c = E_p = \frac{1}{2}E_m \Rightarrow \frac{1}{2}K \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}K \cdot A^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}A^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot A \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A \quad [6.17]$$

que como observamos son puntos que se encuentran mas cerca de los extremos que del centro de la trayectoria.

**Ejemplo 9º**

La ecuación de un oscilador armónico de 0,15 Kg de masa es  $x(t) = 0,2 \sin(30t)$ . Si las magnitudes están medidas en unidades del SI, calcula:

- a) La constante recuperadora del oscilador.
- b) Los valores de sus energías cinética, potencial y total a los 0,6s.

**Ejemplo 10º**

Un bloque de 400 g unido a un muelle de constante elástica  $K = 80 \text{ N/m}$ , oscila con una amplitud de 5 cm. Calcula las energías cinética, potencial y mecánica del bloque cuando se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio.

## TEMA 7. ONDAS O MOVIMIENTO ONDULATORIO

1. Definición de onda o movimiento ondulatorio. Clasificación de las ondas
2. Ondas armónicas y magnitudes características de una onda armónica
3. Descripción matemática de una onda armónica: ecuación de onda
4. Doble periodicidad de la función de onda
5. Velocidad de vibración y aceleración de vibración en una onda
6. Diferencia de fase espacial y diferencia de fase temporal
7. Energía e intensidad de una onda: Atenuación y absorción de ondas
8. Principio de Huygens
9. Interferencias de ondas
10. Ondas estacionarias
  - 10.1 Definición
  - 10.2 Resultados experimentales
  - 10.3 Ecuación de una onda estacionaria
  - 10.4 Estudio de una onda estacionaria en una cuerda
  - 10.5 Diferencias entre una onda estacionaria y una onda viajera
11. Reflexión y refracción
12. Reflexión total y ángulo límite. Fibra óptica
13. Difracción
14. Dispersión de la luz
15. Polarización de ondas
16. Ondas electromagnéticas

## 1. DEFINICIÓN DE ONDA O MOVIMIENTO ONDULATORIO. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS.

Un movimiento ondulatorio se origina cuando en un punto determinado del espacio se produce una perturbación en el estado físico del mismo que, a continuación, pasa a propagarse en el espacio para percibirse más tarde en otros puntos del mismo. Dicha perturbación supone una transferencia de energía al medio que pasa a transmitirse a los distintos puntos del medio sin que éstos modifiquen sustancialmente su posición original tras pasar la perturbación por ellos. Por tanto:

*Una onda o movimiento ondulatorio consiste en la propagación de una perturbación de unos puntos a otros del espacio, y esto supone un transporte de energía y cantidad de movimiento de unos puntos a otros del medio sin que exista un transporte neto de materia.*

Así pues:

- Si dejamos caer una piedra en el centro de un estanque, la energía cinética de aquella se transmite al agua produciendo una perturbación en las partículas de ésta que las hará desplazar verticalmente de su posición de equilibrio, desplazamiento que se propagará sucesivamente al resto de las partículas superficiales del agua produciendo un movimiento ondulatorio.
- Si movemos hacia arriba y hacia abajo el extremo de una cuerda, estaremos transfiriendo energía a la misma perturbando las condiciones físicas de la cuerda que se traducirá en un movimiento ondulatorio que se transmitirá a lo largo de aquella.
- Si golpeamos un objeto, las vibraciones de éste pueden transmitirse al aire cuyas partículas vibrarán del mismo modo, transmitiendo dichas vibraciones de unas partículas a otras del medio lo que originará el sonido.
- La luz que se produce en un foco (bombilla, sol, etc) también se propaga a lo largo del espacio, viajando incluso largas distancias, como es el caso de las estrellas, entre ellas nuestro sol

En los dos primeros ejemplos la perturbación que se produce en el foco y que después se propaga al resto del medio son variaciones en las posiciones de las moléculas del agua o de la cuerda, respectivamente.

En el tercer ejemplo la perturbación consiste en pequeñas variaciones de presión en el aire.

En caso de la luz la perturbación que se propaga es un campo electromagnético variable, es decir, dos campos variables de fuerzas simultáneamente: un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{B}$ . Por esta razón a estas ondas se les denomina **ondas electromagnéticas** (o. e. m.). Además de la luz, también son o. e. m. las ondas de radio y TV, los rayos X, los rayos  $\gamma$ , etc.

En un movimiento ondulatorio podemos distinguir entre pulso y onda:

**Pulso:** es el resultado de la propagación de una perturbación instantánea producida en un determinado punto del medio.

**Onda:** es el resultado de la propagación de una perturbación continua producida en un punto del medio.

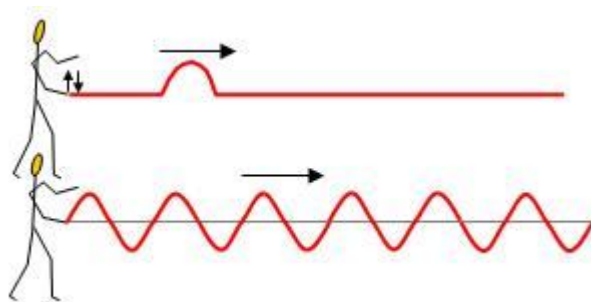


figura 7.1 Distinción entre pulso (arriba) y onda (abajo)

Por todo lo anteriormente expuesto, la función matemática (**ecuación o función de onda**) que se utilice para describir la propiedad física que se perturba en un movimiento ondulatorio dependerá en cualquier caso de dos variables: la posición del punto al que llega la perturbación y el instante de tiempo considerado.

## • CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS

Las ondas se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios.

### A) Según la relación entre la dirección de propagación y la dirección de vibración

Distinguimos entre:

- **Ondas transversales:** son aquellas en las que las partículas del medio se desplazan en dirección perpendicular a la de propagación de la onda. Ejemplos: ondas transversales en una cuerda tensa, olas superficiales en el agua, o. e. m.,...



- **Ondas longitudinales:** son aquellas en las que las partículas del medio se desplazan en la misma dirección que la de propagación de la onda. Ejemplos: ondas longitudinales en un muelle, ondas sonoras, ...



### B) Según la forma de energía que se transmite

Distinguimos entre:

- **Ondas mecánicas:** son aquellas en las que se transmite energía mecánica (cinética y potencial) de unos puntos a otros del medio, para lo cual se hace necesario un medio material para que su propagación. Ejemplos: ondas en una cuerda tensa, ondas sonoras, ...

- **Ondas electromagnéticas:** son aquéllas que se pueden propagar por el vacío, es decir, no necesitan de la presencia de un medio material para propagarse. Las o. e. m. son las únicas que pueden hacerlo. En ellas lo que se transmite es energía electromagnética consecuencia de la propagación simultánea de sendos campos eléctrico y magnético, para lo cual no se hace necesario un medio material, pudiendo propagarse por el vacío. Ejemplos: ondas de radio y TV, luz, rayos X, ...

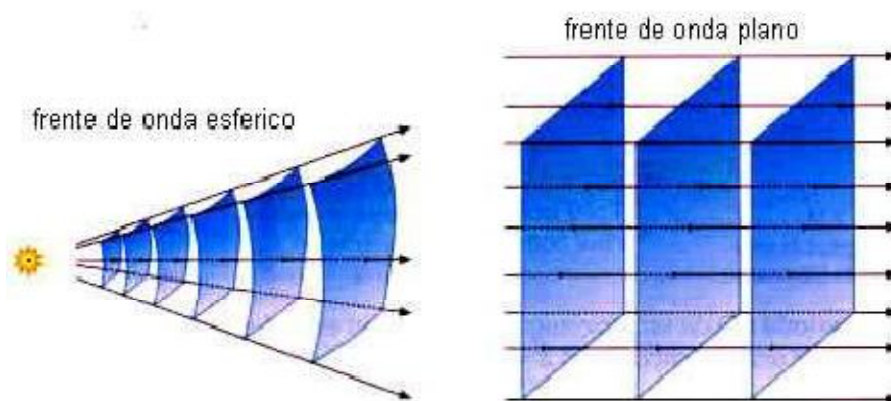
### C) Según el número de dimensiones en que se propaga la energía

Distinguimos entre:

- **Ondas unidimensionales:** son aquéllas que la energía se propaga en una única dirección. Ejemplos: ondas en una cuerda tensa, ondas en un muelle, ...
- **Ondas bidimensionales:** son aquéllas en las que la energía se propaga en un plano. Ejemplo: ondas superficiales en el agua, en una lámina metálica, ...
- **Ondas tridimensionales:** son aquéllas en las que la energía se propaga en las tres direcciones del espacio. Ejemplos: ondas sonoras, luz, ...

### D) Según la forma de la onda al avanzar

Según sea la forma del frente de onda, las ondas pueden ser circulares, esféricas, planas, elípticas, etc.



frente de onda circular

## 2. ONDAS ARMÓNICAS Y MAGNITUDES CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS ARMÓNICAS

Una onda se dice que es armónica cuando la perturbación que se produce en el foco es de tipo armónico simple, es decir, cuando la perturbación que se produce en el foco se puede describir mediante las funciones seno y/o coseno y, por tanto, la onda también se podrá describir mediante las funciones seno y/o coseno.

Las magnitudes características de una onda armónica son:

### Perturbación

Es la magnitud física que se perturba en el foco y que se transmite de unos puntos a otros del espacio. En el caso de las ondas en una cuerda o en la superficie del agua, la perturbación es una elongación, es decir, desplazamientos de los puntos de la cuerda y de las moléculas de la superficie del agua de su posición de equilibrio. En el caso del sonido, la perturbación que se propaga son pequeñas variaciones de presión del aire. En el caso de la luz, la perturbación consiste en dos campos de fuerzas variables, un campo eléctrico y un campo magnético.

La perturbación la representaremos por la letra  $y$ , y será función de dos variables, la distancia al foco y el tiempo,  $y(x, t)$ , ya que el valor de la perturbación dependerá de cada punto de la onda y de cada instante.

Las unidades de la perturbación serán las mismas que las de la magnitud física cuya variación se propaga a lo largo de la onda:

- En el caso de las ondas en una cuerda o en la superficie del agua, la perturbación se medirá en m en el SI.
- Para el sonido la perturbación se medirá en unidades de presión: Pascales en el SI o cualquier otra unidad de presión: atm, mmHg, bares, etc.
- En la luz o cualquier otra onda se medirá en N/C para el campo eléctrico, y en T para el campo magnético.

### Amplitud (A)

Es la máxima elongación con la que vibran las partículas del medio. Se representa por la letra  $A$ , y se mide en las mismas unidades que la perturbación  $y$ .

### Velocidad de vibración

La **velocidad de oscilación o de vibración ( $v$ )** es la derivada de la perturbación respecto al tiempo y su valor también depende de la distancia al foco y del tiempo:

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt}$$

### Periodo (T)

Es el tiempo que emplea una partícula del medio en realizar una oscilación alrededor de su posición de equilibrio. Se mide en s en el SI de unidades.

### Frecuencia (f)

Es el número de oscilaciones que realiza una partícula del medio en la unidad de tiempo. Por tanto:

$$f = \frac{1}{T} \quad [7.1]$$

Se mide en  $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$  en el SI de unidades

**Frecuencia angular o pulsación ( $\omega$ )**

Es el número de periodos contenidos en  $2\pi$  unidades de tiempo. Por tanto:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad [7.2]$$

Se mide en  $\text{rad/s} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  en el SI de unidades.

**Longitud de onda ( $\lambda$ )**

Es la distancia mínima entre dos puntos del medio con el mismo estado de vibración. Se representa por la letra  $\lambda$ , y se mide en m en el SI de unidades.

La longitud de onda coincide con la distancia que recorre la onda en un intervalo de tiempo igual al periodo.

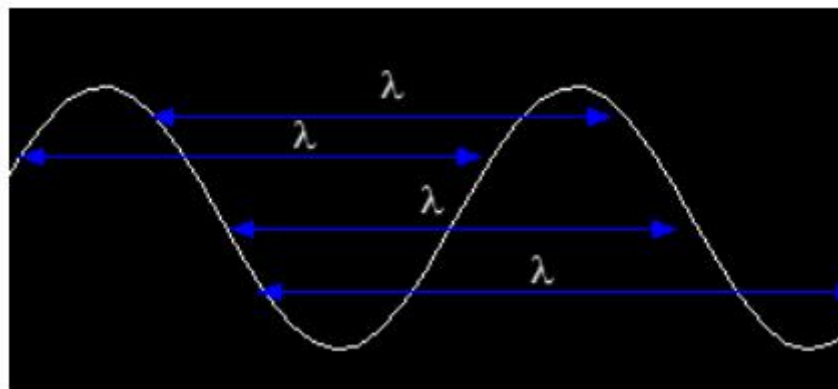
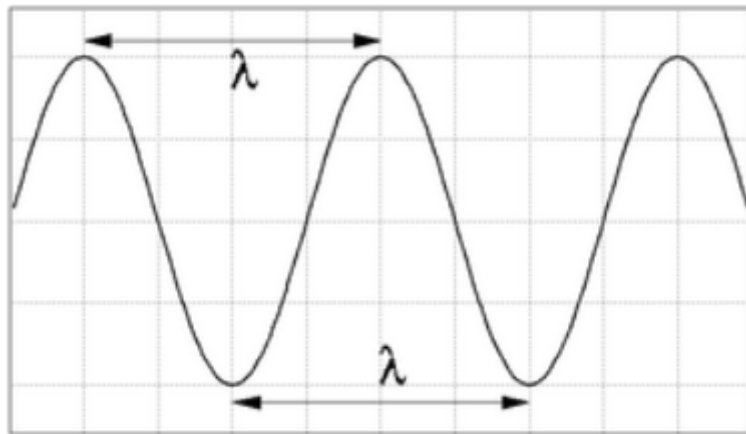


Figura 7.2 Longitud de onda

**Número de onda ( $k$ )**

Es el número de longitudes de onda contenidos en  $2\pi$  unidades de longitud. Por tanto:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad [7.3]$$

Se mide en  $\text{rad/m} = \text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$  en el SI de unidades.

**Velocidad de propagación o velocidad de fase ( $v_p$ )**

Es la rapidez con que avanza la onda, y por tanto, la rapidez con la que la energía se transmite de unos puntos a otros del medio.

$$v_p = \frac{\text{espacio recorrido por la onda}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad [7.4]$$

No hay que confundir la velocidad de propagación o velocidad de fase de una onda con la velocidad de vibración.

La velocidad de propagación de la onda también se puede expresar del siguiente modo:

$$v_p = \frac{\text{espacio recorrido por la onda}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{k} \quad [7.5]$$

Para las oem en el vacío esta velocidad se representa por la letra  $c$  y vale  $3 \cdot 10^8$  m/s

$$v_p \text{ de la luz en el vacío} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Para el resto de los medios, esta velocidad depende exclusivamente de las características del medio: elasticidad y rigidez. En medios homogéneos e isótropos, su valor es el mismo en todas las direcciones.

Como ejemplo damos la expresión de la velocidad de propagación de una onda a lo largo de una cuerda tensa:

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\eta}} \quad [7.6]$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda en N y  $\eta$  su densidad lineal en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 3. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE UNA ONDA ARMÓNICA: ECUACIÓN DE ONDA

Las **ondas armónicas** son aquellas que consisten en la propagación a lo largo de un medio de un movimiento oscilatorio armónico simple producido en un determinado punto llamado **foco**.

#### Ecuación de onda armónica

Vamos a centrar nuestro estudio en las ondas armónicas unidimensionales. Para ello supongamos que la dirección de propagación es el eje OX por lo cual la posición de una partícula vendrá dada por una sola coordenada,  $x$ , con respecto al origen, en el cual suponemos situado el foco de la perturbación. Supongamos también que la onda es transversal de modo que el desplazamiento de las partículas del medio se realiza en dirección OY. Se tratará, por tanto, de deducir la expresión de dicho desplazamiento o **elongación**,  $y$ , en función de la posición  $x$  y del tiempo  $t$ :

$$y = f(x, t)$$

Para deducir la ecuación de este tipo de ondas, partimos de la ecuación del movimiento armónico simple originado en el foco ( $x = 0$ ) en el caso en que en el instante inicial la perturbación valga 0:

$$y(0, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Transcurrido un tiempo  $t'$  la perturbación alcanzará la partícula situada en la posición  $x$ , por lo que el estado del movimiento de ésta será el mismo que el del foco en el instante  $t - t'$ . Así podemos escribir:

$$y(x, t) = A \cdot \sin[\omega \cdot (t - t')]$$

Si  $v_p$  es la velocidad con que se propaga el movimiento ondulatorio, podemos escribir  $t' = \frac{x}{v_p}$  por lo que resulta:

$$y(x, t) = A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_p}\right)\right]$$

Operando paréntesis y utilizando la ecuación [7.5], deducimos:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \quad [7.7]$$

La ecuación [7.7] constituye la ecuación de onda armónica que nos indica el desplazamiento o elongación,  $y$ , de la partícula del medio situada en la posición  $x$  en el instante de tiempo  $t$ .

#### Observaciones a la ecuación de onda armónica

1. La expresión entre paréntesis  $(\omega \cdot t - k \cdot x)$  constituye la fase  $\varphi$  del movimiento ondulatorio e indica el estado de movimiento de la partícula situada en la posición  $x$  en un instante de tiempo  $t$ . A dicha expresión se le añadirá una fase inicial  $\varphi_0$  cuyo valor dependerá de las condiciones iniciales del movimiento; en tal caso la ecuación [7.7] puede escribirse de la siguiente forma:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0) \quad [7.8]$$

2. La ecuación de onda también puede expresarse en función del coseno. La elección de una u otra función trigonométrica dependerá de las condiciones iniciales del movimiento que permitan considerar  $\varphi_0 = 0$ .
3. El signo “-“ de la fase indica que la onda se propaga en sentido positivo del eje OX; si se propagase en sentido contrario basta con cambiar dicho signo por un “+”.
4. Teniendo en cuenta las relaciones entre las magnitudes de una onda, la ecuación de onda armónica también se puede expresar de la forma:

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen} \left[ 2\pi \cdot \left( \frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] \quad [7.8]$$

que también puede expresarse en función del coseno pero, con una fase inicial diferente.

5. La **velocidad de oscilación o de vibración (v)** de una determinada partícula en un determinado instante (velocidad instantánea de una partícula con la que se desplaza en torno a su posición de equilibrio) se determina derivando la ecuación de onda con respecto al tiempo, considerando constante la posición x de la partícula:

$$v = \frac{dy}{dt}$$

#### 4. DOBLE PERIODICIDAD DE LA FUNCIÓN DE ONDA

La ecuación de una onda armónica o función de onda depende de dos variables, la posición y el tiempo:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

La ecuación de onda armónica es doblemente periódica ya que:

Si en la ecuación de onda fijamos la posición, la ecuación de onda nos describe el estado de vibración de ese punto de la onda. Si se trata de una cuerda, nos describiría el estado de movimiento o MAS de ese punto de la cuerda.

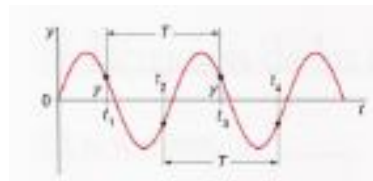


Figura 7.3 Periodicidad temporal de la función de onda

Como se puede observar, el estado de movimiento de una partícula del medio se repite cada vez que transcurra un intervalo de tiempo que sea igual a un múltiplo entero del periodo,  $n \cdot T$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Este hecho se conoce como **periodicidad temporal**. Matemáticamente:

$$y(x, t + nT) = y(x, t)$$

De igual modo, si fijamos el tiempo, la ecuación de onda nos describe el estado de vibración de todos los puntos de la onda en ese instante. Si se trata de una cuerda, nos describiría el valor de la elongación de todos los puntos de la cuerda en ese instante.

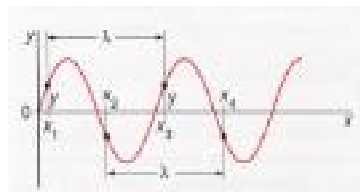


Figura 7.4 Periodicidad espacial de la función de onda

Como se puede observar, el estado de movimiento de dos partículas separadas por una distancia igual a un múltiplo entero de longitudes de onda,  $n \cdot \lambda$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), es el mismo. Este hecho se conoce como **periodicidad espacial**. Matemáticamente:

$$y(x + n\lambda, t) = y(x, t)$$

## 5. VELOCIDAD DE VIBRACIÓN Y ACELERACIÓN DE VIBRACIÓN EN UNA ONDA

Consideremos una onda armónica monodimensional que se propaga por el eje x en sentido positivo:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

**La velocidad de vibración instantánea de cualquier punto de la onda es la derivada de la ecuación de la onda respecto al tiempo:**

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)] = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0) \quad [7.9]$$

**La aceleración de vibración instantánea de cualquier punto de la onda es la derivada de la velocidad de vibración de la onda respecto al tiempo:**

$$a(x, t) = \frac{dv(x, t)}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)] = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0) \quad [7.10]$$

### Ejemplo 1º

La ecuación de una onda armónica sinusoidal que se propaga por el eje x y en sentido positivo viene dada por la siguiente expresión en unidades del SI:

$$y(x, t) = 0,4 \cdot \sin(10\pi t - 2\pi x)$$

Calcula:

- frecuencia, periodo, longitud de onda y velocidad de fase o propagación de dicha onda.
- El estado de vibración instantáneo de un punto de la onda situado a 25 cm del foco. Representa la gráfica y – t.
- El estado de vibración de cualquier punto de la onda a los 0,2 s. Representa la gráfica y – x.
- La velocidad de vibración de la onda en cualquier punto y en cualquier instante.
- La velocidad de vibración instantánea del punto de la onda situado a 50 cm del foco.
- La velocidad de vibración de cualquier punto de la onda a los 4 s.
- La velocidad de vibración del punto situado a 50 cm del foco a los 2s.
- La aceleración de vibración instantánea de cualquier punto de la onda.
- La aceleración de vibración instantánea de un punto de la onda situado a 2 m del foco.
- La aceleración de vibración de cualquier punto de la onda a los 3 s.
- La aceleración de vibración del punto de la onda situado 1 m del foco a los 0,5 s.

### Ejemplo 2º

En el centro de una piscina circular de 10 m de radio dejamos caer una piedra que da origen a una onda armónica de la superficie del agua. La longitud de onda de este movimiento es de 0,75 m y la onda tarda 10 s en llegar a la orilla. Calcular:

- La velocidad de propagación o velocidad de fase.
- El periodo y la frecuencia.
- El nº de ondas y la frecuencia angular.
- La amplitud de la onda, sabiendo que al cabo de 0,25 s de producirse la perturbación, la elongación en el centro de la piscina es de 4 cm.
- La ecuación de onda.
- La elongación de un punto situado a 6 cm del foco emisor al cabo de 12 s.
- La velocidad de vibración de ese punto en ese instante.

**Ejemplo 3º**

La ecuación de una onda armónica transversal en una cuerda es:  $y(x, t) = 1,5 \cdot \cos(0,5\pi x - 30\pi t)$ , donde  $x$  e  $y$  se miden en m, y  $t$  en s. Calcula:

- La frecuencia angular y el nº de ondas.
- La longitud de onda, el periodo, la frecuencia y la velocidad de propagación o velocidad de fase.
- La velocidad de vibración instantánea de cualquier punto de la cuerda.
- La velocidad de vibración que tiene el punto de la cuerda situado a 5 m del foco a los 10 s.

**Ejemplo 4º**

Una onda transversal de 3m de amplitud se propaga de derecha a izquierda a una velocidad de 100 m/s. Si la longitud de onda es de 10 m, calcula:

- La ecuación de onda.
- La velocidad transversal máxima de un punto del medio.
- La aceleración transversal máxima de un punto del medio.

**6. DIFERENCIA DE FASE ESPACIAL Y DIFERENCIA DE FASE TEMPORAL**

En una onda armónica se llama fase al ángulo de la función seno o coseno:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{\text{FASE DE LA ONDA: } (\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)}$$

**A) Diferencia de fase espacial**

Es la diferencia de fase entre dos puntos distintos de la onda en el mismo instante y vale

$$\text{diferencia de fase espacial} = (\omega \cdot t - k \cdot x_1 + \varphi_0) - (\omega \cdot t - k \cdot x_2 + \varphi_0) = k(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{\text{diferencia de fase espacial} = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d} \quad [7.11]$$

siendo d la distancia que separa a los dos puntos de la onda.

**A) Diferencia de fase temporal**

Es la diferencia de fase de un mismo punto de la cuerda en dos instantes de tiempo diferentes y vale

$$\text{diferencia de fase temporal} = (\omega \cdot t_2 - k \cdot x + \varphi_0) - (\omega \cdot t_1 - k \cdot x + \varphi_0) = \omega(t_2 - t_1)$$

$$\boxed{\text{diferencia de fase temporal} = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad [7.12]$$

siendo t el tiempo transcurrido entre los dos instantes de tiempo.

**Ejemplo 5º**

El periodo de un movimiento ondulatorio que se propaga por el eje x en sentido positivo es  $3 \cdot 10^{-3}$  s.

La distancia entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase es de  $\pi/2$  rad es de 30 cm. Calcula:

- La longitud de onda.
- La velocidad de propagación.
- La distancia entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase es de  $3\pi/2$  rad.

**Ejemplo 6º**

La ecuación de una onda plana es:  $y(x, t) = 3 \cdot \sin\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{10}\right)\right]$  en unidades del SI. Calcula:

- El periodo y la longitud de onda.
- La velocidad de propagación o velocidad de fase.
- La diferencia de fase entre dos puntos que distan entre sí 40 m.

**Ejemplo 7º**

Una onda de 500 ciclos/s tiene una velocidad de fase de 350 m/s.

- ¿Qué diferencia de fase hay entre dos puntos que tienen una diferencia de fase de  $60^\circ$ ?
- ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos que ocurren en un cierto punto con un intervalo de  $10^{-3}$  s?

## 7. ENERGÍA E INTENSIDAD DE UNA ONDA: ATENUACIÓN Y ABSORCIÓN DE ONDAS

Recordemos que una onda o movimiento ondulatorio consiste en la propagación de una perturbación de unos puntos a otros sin transporte neto de materia pero sí de energía. En esta pregunta vamos a estudiar los aspectos energéticos de una onda.

Se puede demostrar que la energía de una onda es directamente proporcional al cuadrado de su frecuencia y al cuadrado de su amplitud:

$$E \propto f^2 \cdot A^2$$

Sin embargo, para describir energéticamente a una onda, se suele utilizar una nueva magnitud física denominada **intensidad de onda**. La intensidad de onda en un punto es la energía que atraviesa por unidad de tiempo la unidad de superficie colocada perpendicularmente a la dirección de propagación, es decir, es una medida del flujo de energía que transporta la onda por unidad de tiempo y unidad de superficie. Se representa por la letra  $I$  y se mide en  $J/s.m^2$ . Por definición, la intensidad de una onda también es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia y al cuadrado de la amplitud de la onda.

$$I \propto E \propto f^2 \cdot A^2$$

Es un hecho experimental que la intensidad de una onda se debilita a medida que se propaga. En la mayoría de los casos, esta disminución de intensidad, se debe a una disminución en su amplitud ya que su frecuencia no suele modificarse.

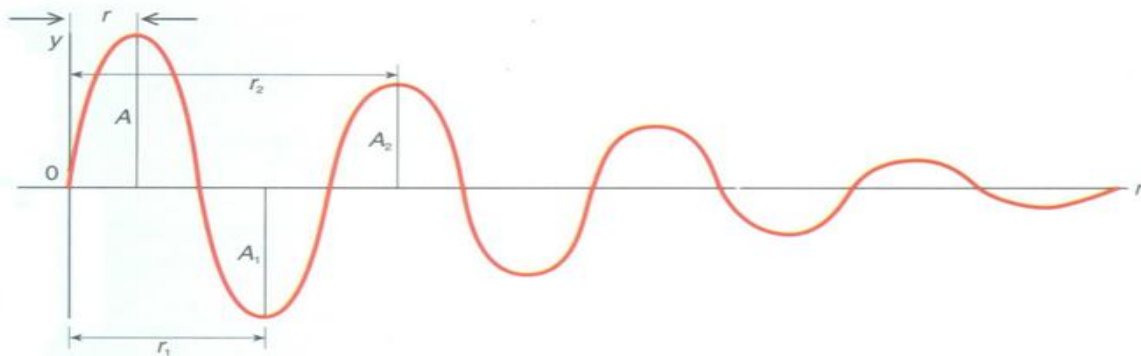


Figura 7.5 Disminución de la intensidad de una onda al propagarse

El debilitamiento o disminución de intensidad puede darse por dos fenómenos diferentes: la atenuación y la absorción.

### A) ATENUACIÓN

La atenuación de una onda consiste en la disminución de su intensidad a medida que se propaga pero, no por pérdidas energéticas, sino porque la energía que transporta la onda se reparte cada vez entre mas puntos del medio a medida que se propaga.

Piensa, por ejemplo, en una onda circular o en una onda esférica. A medida que la onda se propaga, su frente de onda se va agrandando y la energía emitida por el foco tiene que ser repartida cada vez entre un mayor nº de puntos del medio (véase la figura)

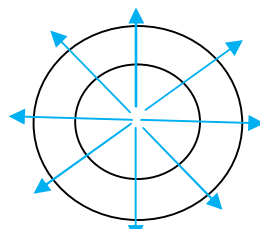


Figura 7.6 Atenuación de una onda circular y esférica

## B) ABSORCIÓN

La absorción de una onda consiste en la disminución de intensidad que experimenta una onda a medida que avanza, debido a las pérdidas energéticas por las fricciones de unas partículas del medio con otras, es decir, parte de la energía que transporta la onda se va quedando por el camino a medida que avanza la onda por el medio absorbente.

Puede demostrarse que la disminución de la intensidad de una onda por absorción viene dada por la siguiente ley:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} \quad [7.13]$$

Donde:

$I_0$  es la intensidad inicial de la onda.

$I$  es la intensidad que tiene la onda cuando ha recorrido una distancia  $x$  en el medio absorbente.

$\beta$  es una constante característica de cada medio para cada onda y se denomina **coeficiente de absorción**. Se mide en  $m^{-1}$  en el SI de unidades.

La ley de la absorción de ondas,  $I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$ , es una ley de decrecimiento exponencial que si la representamos gráficamente en función de la distancia recorrida,  $x$ , en el medio absorbente quedaría del siguiente modo:

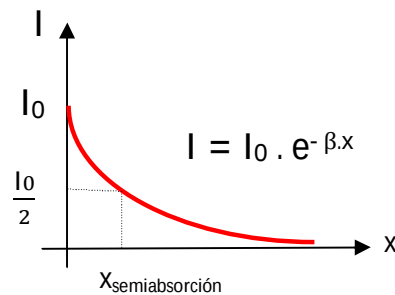


Figura 7.7 Decrecimiento exponencial de la intensidad de una onda por absorción

A la distancia que ha de recorrer la onda en el medio absorbente para que su intensidad disminuya a la mitad, es decir, para que disminuya un 50%, se denomina **espesor de semiabsorción**, y se calcula del siguiente modo:

$$\begin{aligned} I &= I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} \Rightarrow \frac{I_0}{2} = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x_{\text{sem}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\beta \cdot x_{\text{sem}}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-\beta \cdot x_{\text{sem}}}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\beta \cdot x_{\text{sem}} \cdot \ln(e) \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\beta \cdot x_{\text{sem}} \Rightarrow -\ln 2 = -\beta \cdot x_{\text{sem}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x_{\text{sem.}} = \frac{\ln 2}{\beta} \quad [7.14]$$

**OBSERVACIÓN**

Generalmente las ondas sufren ambos fenómenos, es decir, la disminución de su intensidad, mientras se propaga, se debe tanto a la atenuación como a la absorción. Sin embargo:

- las ondas planas no sufren atenuación ya que su energía se reparte entre el mismo número de puntos a medida que avanza su frente de onda.
- Las oem no sufren absorción cuando viajan por el vacío puesto que no habrá pérdidas energéticas por rozamientos.

**Ejemplo 8º**

Una onda está representada por la ecuación:  $y(x, t) = 2 \cdot \cos \left[ 2\pi \cdot \left( \frac{t}{4} + \frac{x}{160} \right) \right]$  donde x e y vienen dados en cm y t en s.

- a) Indica las características de la onda descrita por la ecuación anterior.
- b) Las magnitudes características de la onda.
- c) La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula del medio cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 s.
- d) La diferencia de fase de dos puntos de la onda separados 120 cm.

**Ejemplo 9º**

La intensidad de una onda plana se reduce en un 25% al atravesar 5 cm de un material absorbente. Calcula:

- a) El coeficiente de absorción del medio.
- b) La distancia que ha de recorrer la onda en dicho medio para que su intensidad se reduzca a la mitad.

**Ejemplo 10º**

Un movimiento ondulatorio que se propaga por un medio absorbente reduce su intensidad a la mitad después de recorrer una distancia de 6,93 cm.

- a) ¿Qué distancia debería recorrer para reducir su intensidad a un 10% de su valor inicial?
- b) ¿Qué distancia debería recorrer para reducir su intensidad un 10% de su valor inicial?

## 8. PRINCIPIO DE HUYGENS

Es un método geométrico que el científico holandés C. Huygens propuso en 1678 para explicar la naturaleza ondulatoria de la luz. Esta construcción es válida para cualquier tipo de ondas y permite, además, explicar cómo se propaga la energía a través del medio.

Antes de pasar a explicar este principio, debemos tener claros dos conceptos:

**Frente de onda:** lugar geométrico del espacio formado por puntos en fase. En medios homogéneos e isótropos, los frentes de onda son esféricos. En dichos medios, serán planos cuando los puntos se encuentren muy alejados del foco; en este último caso hablamos de ondas planas.

**Rayo:** segmento orientado que indica la dirección y el sentido de propagación de la onda. Los rayos son perpendiculares a los frentes de onda en cada uno de sus puntos.

El principio de Huygens afirma:

*“Todo punto de un frente de onda es centro emisor de nuevas ondas elementales cuya envolvente es el nuevo frente de onda”*

En la figura 7.8, los puntos del frente de onda en  $t_0 = 0$  son centros emisores de ondas elementales cuya envolvente forma el frente de onda en  $t$ .

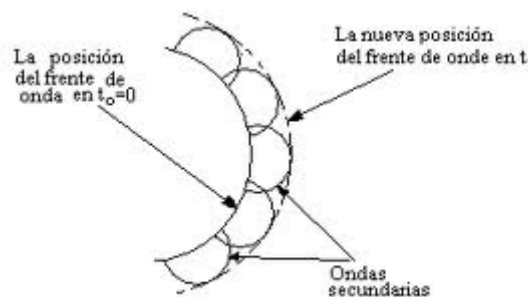


Figura 7.8

Este principio permite explicar fenómenos ondulatorios como la reflexión, la refracción, la difracción y las interferencias.

## 9. INTERFERENCIAS DE ONDAS

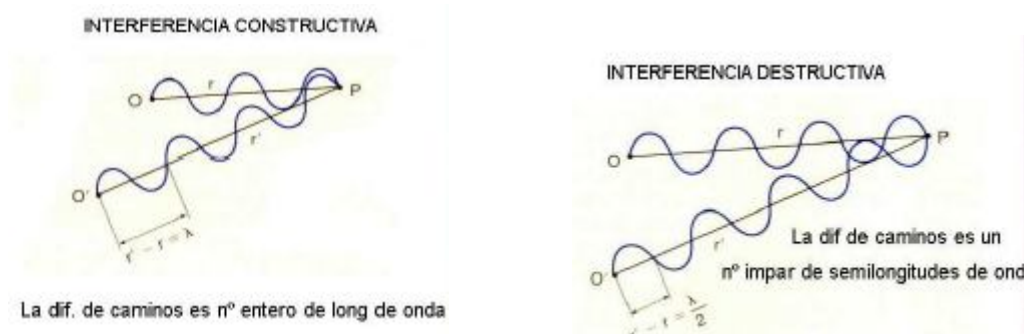
Se denomina interferencias de ondas al fenómeno que tiene lugar cuando dos o mas ondas coinciden en un punto, es decir, las interferencias son fenómenos producidos por el encuentro de dos o más movimientos ondulatorios que, partiendo del mismo foco o de focos distintos, llegan simultáneamente a un mismo punto del medio en que se propagan.

Este fenómeno es característico de las ondas, como lo demuestra el hecho de que después del encuentro, es decir, rebasados los puntos de interferencia, la amplitud, la frecuencia y la velocidad de propagación de cada onda son las mismas que tendrían si no se hubieran encontrado, es decir, cada onda continúa su camino como si nada hubiese ocurrido (démonos cuenta que esto no le ocurre a las partículas después de haber chocado).

El hecho de que las ondas actúen independientemente una de otra significa que el movimiento de cualquier partícula del medio, en un momento dado, es simplemente la suma o **superposición** de los movimientos que le darían las ondas individuales tomadas por separado. Este hecho constituye el **principio de superposición para ondas** según el cual:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

En general cuando dos ondas interfieran en un punto la **interferencia será constructiva** cuando la perturbación resultante sea mayor que las perturbaciones iniciales, y será **destructiva** cuando la onda resultante sea menor que las iniciales.



El caso más importante de interferencias consiste en la coincidencia en un mismo punto de ondas **coherentes**, es decir, ondas con las mismas características (amplitud, frecuencia y longitud de onda). En estos casos, se pueden presentar dos situaciones extremas:

- **Interferencia totalmente constructiva**

Se produce cuando las ondas llegan en fase al punto de interferencia con lo que la amplitud de la onda resultante,  $A_r$ , es el doble de la que tienen las ondas individuales,  $A$ , es decir:  $A_r = 2A$ . Este caso se dará siempre que la diferencia entre las distancias a los respectivos focos sea un múltiplo entero de longitudes de onda:

$$x_2 - x_1 = n \cdot \lambda$$

- **Interferencia totalmente destructiva**

Se produce cuando las ondas llegan en oposición de fase al punto de interferencia con lo que la amplitud de la onda resultante,  $A_r$ , es nula, es decir,  $A_r = 0$ , produciéndose una anulación del movimiento ondulatorio. Este caso se dará siempre que la diferencia entre las distancias a los respectivos focos sea un múltiplo impar de semilongitudes de onda:

$$x_2 - x_1 = (2n - 1) \cdot \lambda / 2$$

En el aula se están produciendo interferencias tanto luminosas como sonoras. Sin embargo ni nuestros ojos ni nuestros oídos son capaces de detectar dichas interferencias, es decir, no detectamos puntos donde se intensifique más la luz o el sonido (interferencias constructivas), y otras zonas donde disminuya la intensidad luminosa o sonora (interferencias destructivas). En efecto en cualquier punto del aula coinciden ondas luminosas (interferencias luminosas) y ondas sonoras (interferencias sonoras), pero la diferencia de fase de las ondas que interfieren en un punto dado no es constante, varía con el tiempo y varía tan rápidamente que las interferencias no son estables y, ni nuestro ojo ni nuestro oído son capaces de detectar dichas fluctuaciones.

#### CONDICIONES DE INTERFERENCIA

Para que las interferencias sean estables, detectables y utilizables es necesario que los focos que emiten las ondas sean **coherentes**, es decir, que las ondas emitidas por ellos mantengan una diferencia de fase constante y esto se consigue cuando las ondas que interfieren tienen igual frecuencia e igual longitud de onda (es lo que se llama ondas monocromáticas en el caso de las ondas luminosas).

Si además tienen igual amplitud pueden producirse puntos de interferencia totalmente constructiva y otros de interferencia totalmente destructiva.

Un procedimiento para obtener interferencias luminosas es el que llevó a cabo el físico inglés T. Young en 1801, llamado **experimento de la doble rendija** con el que se consiguen dos haces luminosos coherentes cuyas interferencias se producen en una pantalla F, apreciándose en ella una franja central brillante y otras oscuras y brillantes paralelas a la primera.

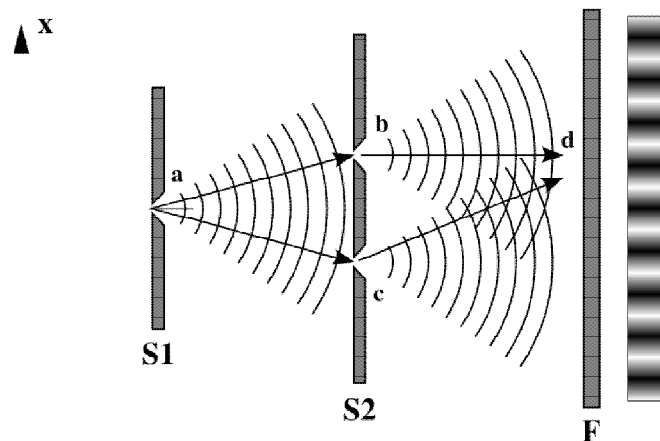


Figura 7.9 Interferencias de Young

## 10. ONDAS ESTACIONARIAS

### 10.1. Definición de onda estacionaria

Una **onda estacionaria** es un caso particular de interferencias y es el resultado de la interferencia de dos ondas idénticas que se propagan en la misma dirección y sentidos opuestos dentro de un medio limitado.

Una forma sencilla de conseguir una onda estacionaria consiste en someter a un MAS al extremo libre de una cuerda que está sujeta a un punto fijo por el otro extremo. La agitación producida en el extremo libre se propagará como una onda a lo largo de la cuerda de modo que cuando llegue al extremo libre de la cuerda se reflejará produciéndose una onda de las mismas características que la incidente pero que viaja en sentido contrario a la incidente e interfiriendo con ella.

También es el caso de cuerda de una guitarra: las ondas que se forman en dicha cuerda al pulsarla se reflejan en los extremos fijos de tal manera que en todo momento existen ondas moviéndose en ambos sentidos dando lugar a una onda estacionaria.

En general una onda estacionaria puede conseguirse cuando dos o más ondas se confinan en una región del espacio mediante fronteras, estas ondas se reflejan hacia delante y hacia atrás en dichas fronteras, como por ejemplo la cuerda de una guitarra que está sujeta por ambos extremos, o un tubo sonoro.

Estas ondas se llaman estacionarias porque el perfil de la onda no se desplaza debido a la existencia de puntos fijos para los cuales la amplitud es nula, como demostraremos a continuación.

## 10.2. Resultados experimentales

Cuando se realiza experimentalmente la onda estacionaria agitando el extremo libre de una cuerda que está sujeta por el otro extremo, se observa lo siguiente:

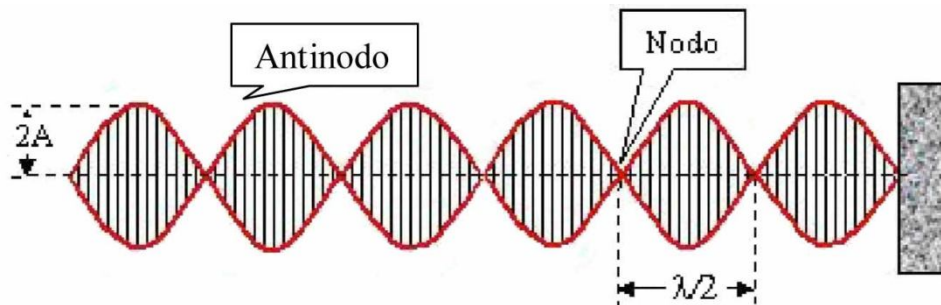


Figura 7.10 Onda estacionaria

1º.- Existen puntos de la cuerda que no vibran. A estos puntos se les denomina **NODOS**. En estos puntos las ondas interfieren en oposición de fase y producen una interferencia totalmente destructiva.

2º.- El resto de los puntos de la cuerda vibran todos con un MAS de igual frecuencia pero de igual amplitud.

3º.- Entre cada dos nodos hay un punto que vibra con máxima amplitud. A estos puntos se les llama **VIENTRES O ANTINODOS**. En estos puntos las ondas han interferido en fase y producen una onda totalmente constructiva, siendo la amplitud de vibración el doble de la amplitud de las ondas que interfieren.

4º.- Todos los puntos de cuerda alcanzan la posición de equilibrio simultáneamente.

5º.- La separación entre dos nodos o dos vientres consecutivos es de media longitud de onda.

6º.- La separación entre un nodo y un vientre consecutivo es de un cuarto de longitud de onda.

7º.- El nº de nodos y de vientres depende de la frecuencia de agitación, aumentando con esta. Además la onda estacionaria sólo se consigue para determinadas frecuencias.

### 10.3. Descripción matemática de una onda estacionaria

Estudiemos el fenómeno cuantitativamente:

Sea  $y_1(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$  la onda que se propaga en una cuerda. Al llegar a uno de los extremos fijos de la misma, la onda se refleja dando lugar a otra de ecuación:

$$y_2(x, t) = -A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

La onda resultante en cualquier punto de su interferencia la calculamos aplicando el principio de superposición de ondas:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + A \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

Aplicando la relación trigonométrica de la suma de los senos de dos ángulos:

$$\sin A + \sin B = 2 \cos \frac{A - B}{2} \sin \frac{A + B}{2}$$

resulta la ecuación de onda estacionaria:

$$y(x, t) = 2 A \cos(k \cdot x) \sin(\omega \cdot t) \quad [7.15]$$

La perturbación resultante corresponde a la de un MAS de frecuencia  $\omega$  y de amplitud variable ya que la amplitud de cada punto de la cuerda depende de su distancia al foco y vale:

$$A_r = 2 A \cos(k \cdot x) \quad [7.16]$$

Podemos escribir por tanto:

$$y(x, t) = A_r \sin(\omega \cdot t) \quad [7.17]$$

Habrán por tanto puntos de amplitud máxima ( $A_r = 2 A$ ) llamados **vientres** o **antinodos** y puntos de amplitud nula ( $A_r = 0$ ) llamados **nodos**. Si analizamos la expresión de la amplitud resultante, podemos localizar a los vientres y a los nodos:

- Posición de los vientres

$$A_r = \pm 2 A \Rightarrow \cos(k \cdot x) = \pm 1 \Rightarrow k \cdot x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \text{rad} \Rightarrow k \cdot x = n \cdot \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

La distancia entre dos vientres consecutivos es media longitud de onda.

- Posición de los nodos

$$A_r = 0 \Rightarrow \cos(k \cdot x) = 0 \Rightarrow k \cdot x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \text{rad} \Rightarrow k \cdot x = (2n + 1) \cdot \pi/2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = (2n + 1) \cdot \pi/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

La distancia entre dos nodos consecutivos es media longitud de onda.

#### 10.4. Estudio de las ondas estacionarias en una cuerda fija por los dos extremos

Supongamos que la cuerda está dispuesta horizontalmente a lo largo del eje OX. Podemos tomar el origen  $x = 0$  en uno de los extremos de la cuerda por lo que, si  $L$  es la longitud de ésta, el otro extremo estará en la posición  $x = L$ . Puesto que ambos extremos de la cuerda están fijos, las condiciones de frontera o de contorno nos llevan a decir que ambos puntos serán nodos. Así pues, la longitud de la cuerda será múltiplo entero de media longitud de onda:

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

Sabiendo que  $v_p = \lambda \cdot f$ , resulta:

$$L = n \frac{v_p}{2f} \Rightarrow f = n \frac{v_p}{2L}$$

La expresión anterior nos indica que las posibles frecuencias o modos de vibración de los puntos de la cuerda es múltiplo entero de un determinado valor llamado **frecuencia fundamental**,  $f_1$ :

$$f_1 = \frac{v_p}{2L}$$

El resto de frecuencias posibles reciben el nombre de **armónicos**.

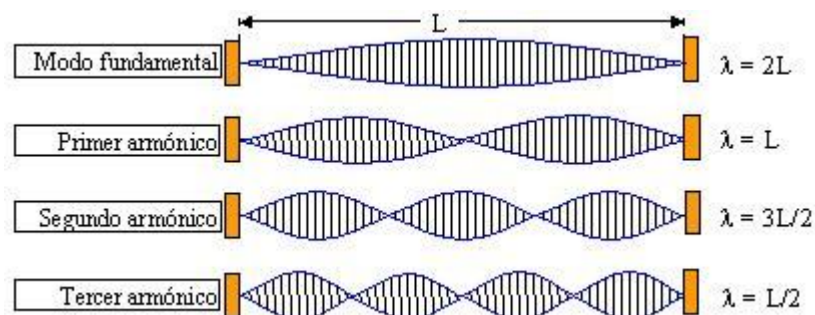


Figura 7.11 Primeros armónicos en la onda estacionaria de una cuerda sujeta por ambos extremos

El número de nodos dependerá del armónico en que esté vibrando la cuerda y éste, a su vez, dependerá de la velocidad de propagación que, para una cuerda dada, dependerá de la tensión a la que se someta: a mayor tensión, mayor frecuencia. Por esta razón, las cuerdas de una guitarra se afinan variando la tensión de las mismas.

**10.5. Diferencias entre ondas estacionarias y ondas viajeras**

- Las ondas estacionarias no son ondas propiamente dichas ya que en ellas no se transmite energía de unos puntos a otros del medio ya que lo impiden los nodos que están continuamente en reposo.
- La amplitud de las oscilaciones de los puntos del medio en una onda estacionaria depende de la posición de aquéllos mientras que en una onda viajera que se propaga sin perder energía, la amplitud de las oscilaciones es la misma para todos los puntos del medio.
- En una onda viajera todos los puntos por los que pasa estarán siempre oscilando, mientras que en una onda estacionaria hay puntos (nodos) que no oscilan una vez formada la misma.

**Ejemplo 11º**

La ecuación de una onda en una cuerda viene dada por la siguiente expresión:

$$y(x, t) = 3 \cos(0,5\pi x) \sin(50\pi t)$$

donde  $x$  e  $y$  se miden en cm y  $t$  en s.

- a) Características de la onda descrita por la expresión anterior.
- b) Determina la amplitud y la velocidad de las ondas cuya interferencia da lugar a la onda anterior.
- c) Velocidad de vibración instantánea de los puntos de la cuerda.
- d) Calcula la velocidad con la que se mueve un punto de la cuerda situado a 3 cm. Comenta el resultado.
- e) Calcula la velocidad con la que se mueve un punto de la cuerda situado a 4 cm en el instante 2 s. Comenta el resultado.

**Ejemplo 12º**

La ecuación de una onda en una cuerda de longitud  $L$  sujeta por ambos extremos viene dada, en unidades SI, por la siguiente expresión:

$$y(x, t) = 0,05 \sin(2\pi x) \cos(50\pi t)$$

- a) Característica de la onda descrita por dicha expresión.
- b) Velocidad de vibración instantánea de los puntos de la cuerda.
- c) Si la ecuación anterior corresponde a la frecuencia fundamental, ¿cuál es la longitud de la cuerda?

## 11. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN. LEYES DE LA REFLEXIÓN Y DE LA REFRACCIÓN

Cuando una onda se propaga por un medio y encuentra en su camino otro medio de distinta naturaleza, generalmente lo que ocurre es que una parte de la onda cambia de dirección de propagación en el primer, y la otra parte de la onda atraviesa al segundo medio, propagándose por él. Al primer fenómeno se le llama reflexión y al segundo refracción.

### 11.1 REFLEXIÓN

Se define como el cambio de dirección dentro del mismo medio que experimentan las ondas al incidir sobre la superficie de separación (interfase) entre dos medios.

Se explica por medio del principio de Huygens según el cual los puntos de la interfase son centros emisores de ondas elementales que se propagan por el mismo medio cambiando de dirección. Por tanto, la onda reflejada tendrá la misma velocidad de propagación, frecuencia, periodo y longitud de onda que la onda incidente.

#### Leyes de Snell de la reflexión

1. Los rayos incidente y reflejado, así como la normal, están en el mismo plano.
2. El ángulo de incidencia ( $i$ ) y el ángulo de reflexión ( $r$ ) son iguales.

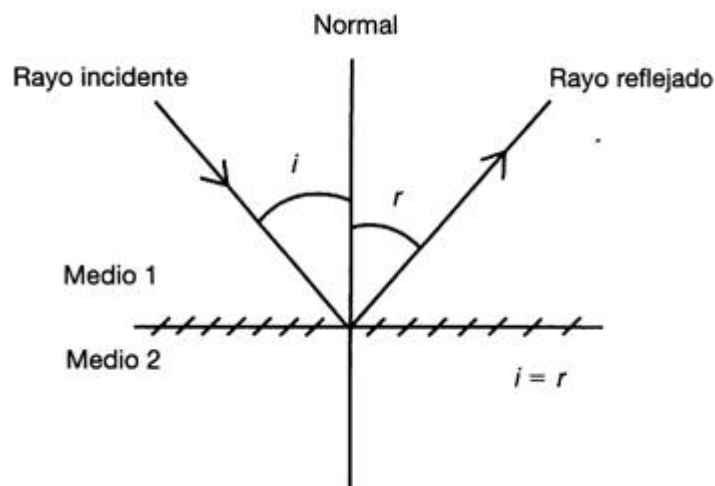


Figura 7.12 Ley de Snell de la reflexión

*Observa que si la onda incide perpendicularmente a la superficie de separación ( $i = 0^\circ$ ), la onda reflejada tendrá la misma dirección que la incidente pero de sentido contrario ( $r = 0^\circ$ ).*

## 11.2 REFRACCIÓN

Consiste en el cambio de dirección de propagación de una onda cuando llega a la superficie de separación entre dos medios distintos para seguir propagándose por el segundo medio.

Se explica con el principio de Huygens según el cual los puntos de la interfase son centros emisores de ondas elementales que continúan propagándose por el segundo medio, cambiando de dirección y de velocidad de propagación, ya que las características de éste son diferentes a las del primer medio.

La frecuencia de la onda refractada es la misma que la de la onda incidente ya que los puntos de la interfase emiten ondas elementales con la misma frecuencia con la que el foco emitió la onda incidente (la frecuencia es una invariante).

Dado que  $v_p = \lambda \cdot f$ , al cambiar la velocidad de propagación y mantenerse invariante la frecuencia, la longitud de onda de la onda refractada cambiará con respecto a la de la onda incidente según lo haga la velocidad de propagación.

### Leyes de Snell de la refracción

1. Los rayos incidente y refractado, así como la normal, están en el mismo plano.
2. El cociente entre los senos de los ángulos de incidencia (i) y de refracción (t) es igual al cociente entre las velocidades de propagación en los respectivos medios 1 y 2.

$$\frac{\sin i}{\sin t} = \frac{v_1}{v_2}$$

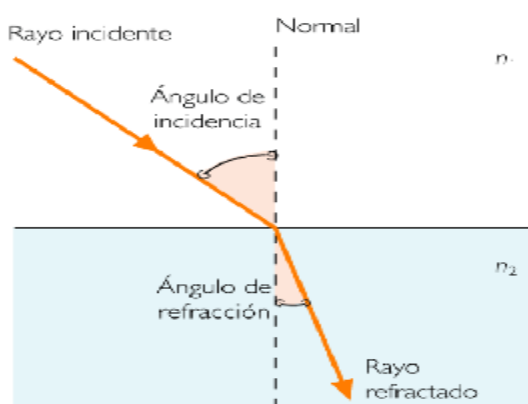


Figura 7.13 Ley de Snell de la refracción

Si se trata de una oem como es la luz, la Ley de Snell de la refracción se puede poner en función de una nueva magnitud física llamada índice de refracción.

### Índice de refracción

Para la luz, cada medio está caracterizado por un parámetro llamado **índice de refracción absoluto  $n$** , que se define como la razón entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío  $c$  y la velocidad  $v$  de propagación en dicho medio:

$$n = \frac{c}{v}$$

De la definición de índice de refracción de la luz en un medio se deducen las siguientes consecuencias:

- o Es una magnitud adimensional ya que es el cociente de dos velocidades.
- o En el vacío el índice de refracción vale 1 ( $n_0 = 1$ ).
- o En cualquier otro medio el índice de refracción de la luz es mayor que 1 ( $n > 1$ ), ya que la velocidad de propagación de la luz es máxima en el vacío, y por tanto, el denominador siempre será menor que el numerador.
- o Podemos expresar el índice de refracción de la luz en un medio en función de la longitud de onda:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 \cdot f}{\lambda \cdot f} \Rightarrow n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda de la luz en el vacío y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz en un determinado medio.

Se dice que un medio es más **refringente** que otro cuando posee mayor índice de refracción.

En función del índice de refracción la Ley de Snell de la refracción puede expresarse del modo siguiente:

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin t} = \frac{v_1}{v_2}} \Rightarrow \frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin t}{v_2} \Rightarrow \frac{c \cdot \sin i}{v_1} = \frac{c \cdot \sin t}{v_2} \Rightarrow \boxed{n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin t}$$

De la Ley de Snell de la refracción puede deducirse lo siguiente:

- o Si una onda pasa de un medio a otro de menor velocidad (en el caso de la luz, de un medio a otro mas refringente), entonces el ángulo de refracción es menor que el de incidencia, es decir, el rayo refractado se acerca a la normal:

$$\text{Si } v_1 > v_2 \text{ (} n_1 < n_2 \text{)} \Rightarrow \sin i > \sin t \Rightarrow i > t \Rightarrow \text{la onda refractada se acerca a la normal.}$$

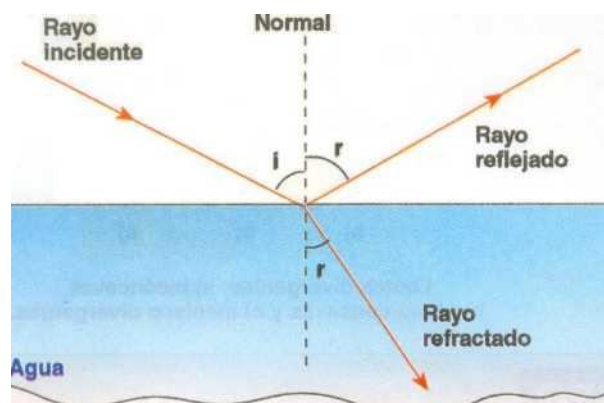


Figura 7.14 Refracción de la luz de un medio (aire) a otro mas refringente (agua)

- o Si una onda pasa de un medio a otro de mayor velocidad (en el caso de la luz, de un medio a otro menos refringente), entonces el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia, es decir, el rayo refractado se aleja de la normal, acercándose a la superficie de separación :

Si  $v_1 < v_2$  ( $n_1 > n_2$ )  $\Rightarrow \sin i < \sin t \Rightarrow i < t \Rightarrow$  la onda refractada se aleja de la normal.

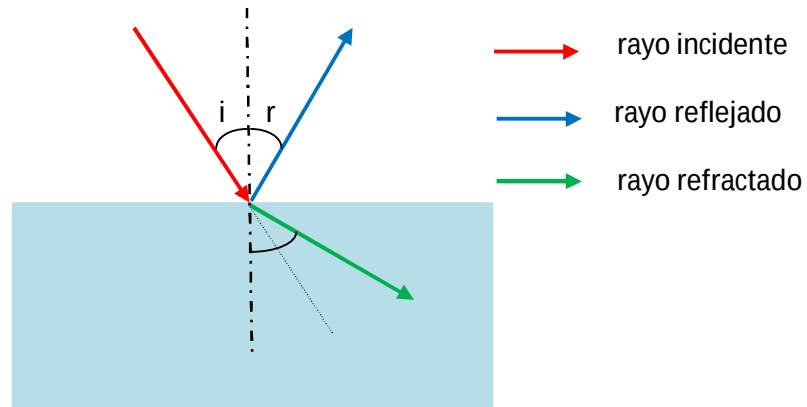


Figura 7.15 Refracción de la luz de un medio a otro menos refringente

Observa que, independientemente del valor del índice de refracción entre los dos medios, si la onda incide perpendicularmente a la superficie de separación ( $i = 0^\circ$ ), la onda refractada tendrá la misma dirección y sentido que la incidente ( $t = 0^\circ$ ):

$$n_1 \sin i = n_2 \sin t \Rightarrow n_1 \sin 0^\circ = n_2 \sin t \Rightarrow n_1 \cdot 0 = n_2 \sin t \Rightarrow 0 = n_2 \sin t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0^\circ$$

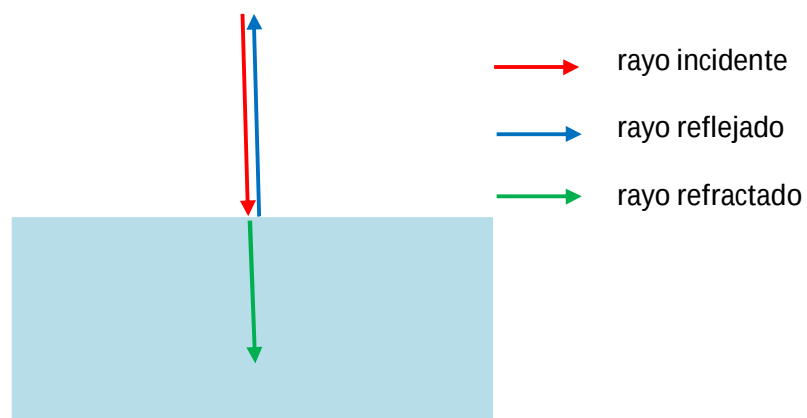


Figura 7.16 Reflexión y refracción con ángulo de incidencia de  $0^\circ$

## 12. REFLEXIÓN TOTAL Y ÁNGULO LÍMITE. APLICACIONES

En el segundo de los casos anteriores ( $v_1 < v_2$  o  $n_1 > n_2$  si se trata de una oem), a medida que aumentamos el ángulo de incidencia, también aumentará el de refracción, siendo el valor de este último mayor. Para un cierto ángulo de incidencia, llamado **ángulo límite o crítico**  $i_L$ , el ángulo de refracción  $t$  vale  $90^\circ$ , dándose en este caso la llamada **refracción rasante**.

Para ángulos de incidencia  $i$  mayores que el ángulo límite ( $i > i_L$ ), la luz se refleja totalmente, fenómeno que se conoce como **reflexión total**.

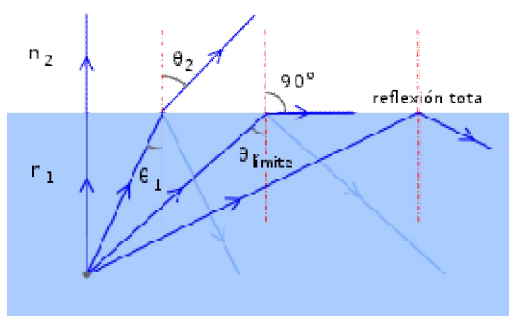


Figura 7.17 Reflexión total y ángulo límite

La determinación del ángulo límite se hace con la segunda ley de la refracción haciendo  $t = 90^\circ$ :

$$n_1 \cdot \sin i_L = n_2 \cdot \sin 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \sin i_L = \frac{n_2}{n_1} \quad \Leftrightarrow \quad i_L = \arcsen \frac{n_2}{n_1}$$

Démosnos cuenta que para ángulos inferiores al ángulo límite se produce reflexión y refracción y esto supone que la energía de la onda incidente se reparte entre la onda reflejada y la onda refractada. Pero cuando se incide con un ángulo superior al ángulo límite sólo se produce reflexión y, por tanto, la luz reflejada tiene prácticamente la misma energía que la incidente.

Una aplicación actual de la reflexión total son las fibras ópticas, que se utilizan para la transmisión de ondas electromagnéticas a largas distancias.. La fibra es un cable flexible de material transparente y elevado índice de refracción en el que la luz incide siempre en sus caras internas con un ángulo mayor que el ángulo límite. De esta forma la luz va experimentando sucesivas reflexiones internas y puede dirigirse y transmitirse a largas distancias sin apenas pérdidas energéticas (ver figura).

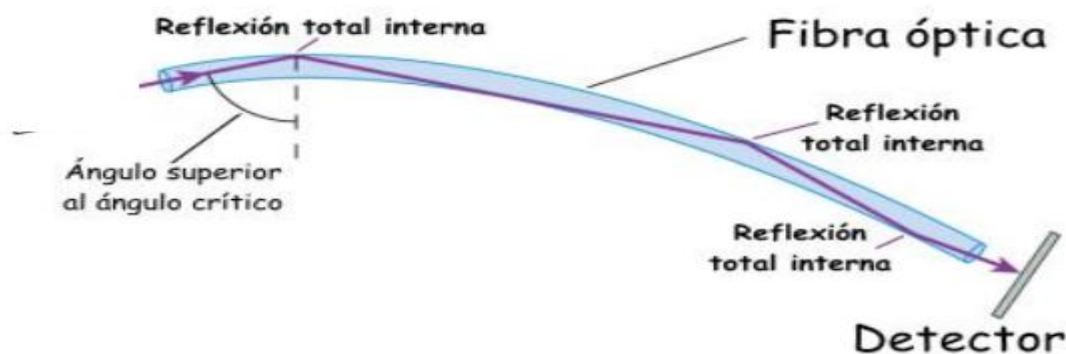


Figura 7.18 Múltiples reflexiones totales en las caras internas de una fibra óptica

**Ejemplo 13º**

Un rayo luminoso incide sobre una de las caras de una lámina de vidrio de caras plano-paralelas con un ángulo de  $30^\circ$ . Sabiendo que el índice de refracción de la luz en el aire es 1 y en la lámina de vidrio es 1,5:

- Traza la trayectoria del rayo luminoso desde que incide en la primera del prisma t hasta que sale por la otra.
- Calcula el ángulo con el que emerge la luz por la segunda cara del prisma. Comenta el resultado.
- Calcula el tiempo que tarda el rayo luminoso en atravesar la lámina de vidrio.

**Ejemplo 14º**

Un espejo se encuentra en el fondo de una piscina de 2m de profundidad que está llena de agua ( $n = 1,33$ ). Un rayo luminoso incide con un ángulo de  $30^\circ$  sobre la superficie del agua de la piscina.

- Traza la trayectoria que sigue el rayo luminoso desde que incide en la superficie del agua y hasta que emerge de nuevo al aire.
- Calcula el ángulo con el que emerge del agua al aire.
- Calcula cuanto tiempo tarda el rayo en salir del agua.

**Ejemplo 15º**

- Calcula el ángulo límite para un rayo luminoso que pasa del vidrio ( $n = 1,5$ ) al aire ( $n = 1$ ).
- Analiza que pasa con ángulos mayores o menores que el ángulo límite.
- Calcula el ángulo de refracción de un rayo luminoso que pasa del vidrio al aire con un ángulo de incidencia de  $60^\circ$ .

**Ejemplo 16º**

Un rayo luminoso incide sobre del aire al agua. Determina cuál tiene que ser el ángulo de incidencia para que el rayo reflejado y refractado formen entre sí un ángulo de  $90^\circ$ .

**Ejemplo 17º**

No sé si eres consciente de que la profundidad real de una piscina siempre es mayor que la profundidad aparente. ¿Podrías explicar este fenómeno con la ayuda de un esquema de trayectoria de rayos luminosos y basándote en la Ley de Snell de la refracción?

### 13. DIFRACCIÓN

La difracción es el fenómeno que se produce cuando la onda se encuentra en su camino con un obstáculo u orificio cuyas dimensiones sean del orden de su longitud de onda. Este fenómeno es exclusivo de las ondas y consiste en que su frente de ondas sufre una distorsión de modo que la onda bordea el orificio o el obstáculo y llega a puntos donde parecía imposible que pudiera llegar.

En el siguiente esquema se representa lo que le ocurre al frente de ondas de una onda plana que se encuentra una abertura en su camino:

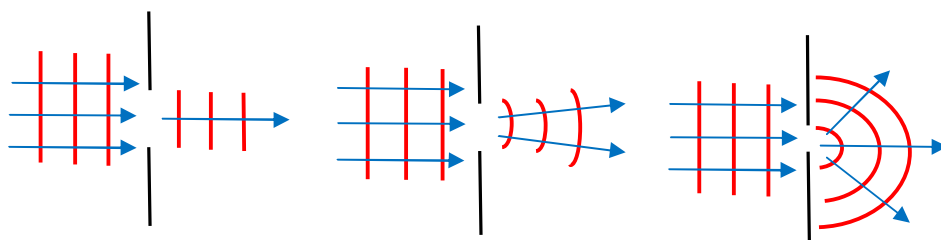


Figura 7.19 Difracción de una onda plana en una rendija

Cuando la abertura es suficientemente grande con respecto a la longitud de onda, las ondas que alcanzan la rendija no se distorsionan y continúan su trayectoria rectilínea. Al reducir el tamaño de la abertura, el frente de ondas comienza a distorsionarse y a propagarse en otras direcciones. Cuando la rendija se hace de un tamaño semejante al de la longitud de onda, el frente de onda se distorsiona totalmente y la onda bordea las esquinas del orificio propagándose en todas direcciones.

En las dos imágenes siguientes se quiere poner de manifiesto como, después de la abertura, la onda se propaga en otras direcciones diferentes a la inicial.

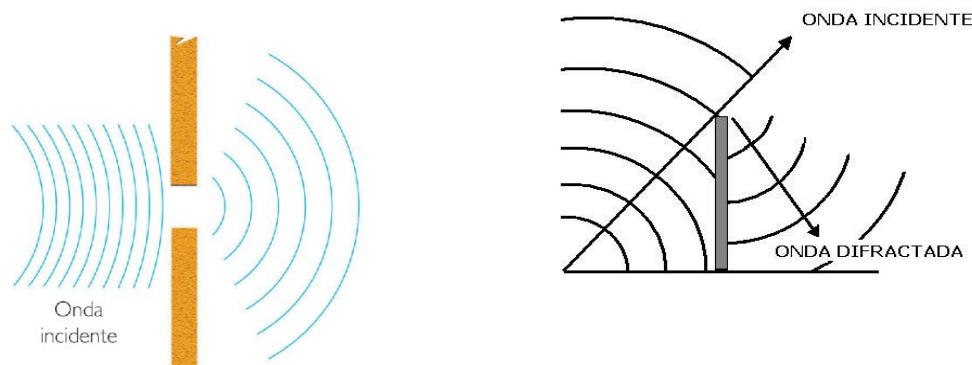


Figura 7.20 Explicación de la difracción mediante el principio de Huygens

El fenómeno se puede explicar con el principio de Huygens según el cual los puntos del obstáculo u orificio se convierten en centros emisores de nuevos frentes de ondas, logrando que la onda bordee el obstáculo o siga propagándose por detrás del orificio.

Este es un fenómeno típicamente ondulatorio que ha servido históricamente para demostrar si un determinado fenómeno tiene carácter ondulatorio o no. Por ejemplo, sirvió para demostrar el carácter ondulatorio de la luz y, posteriormente, también de los electrones.

Además, sirve para determinar el orden de longitud de la longitud de onda de una onda, pues es del mismo orden que el tamaño del orificio u obstáculo que le produce la difracción.

Este fenómeno es el que el sonido pueda bordear los obstáculos, es decir, explica que podamos oír los sonidos aunque el foco sonoro emisor está detrás de una esquina. Esto es así porque el sonido tiene longitudes de onda comprendidas entre unos cm y varios metros, que son las dimensiones de los obstáculos. Sin embargo el sonido no puede salvar obstáculos como un edificio o una montaña, ya que estos obstáculos tienen dimensiones que exceden el rango de sus longitudes de onda.

Podríamos preguntarnos porqué no vemos a los objetos detrás de las esquinas. La razón estriba en que la longitud de onda de la luz visible es muy pequeña comparada con las dimensiones de los obstáculos.

## 14. DISPERSIÓN

La dispersión de la luz es el fenómeno que se produce cuando un haz de luz blanca incide sobre una de las caras de un prisma óptico y consiste en que la luz blanca, al atravesar el prisma óptico, se descompone en los distintos colores que la forman.

La formación del arcoíris se debe a la dispersión de la luz solar cuando incide sobre las gotas de agua de la lluvia suspendidas en el aire que actúan como un prisma óptico.

Para explicar el fenómeno de la dispersión de la luz debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Por lo general, el índice de refracción de un medio transparente es función de la longitud de onda de la luz que se propaga por él; concretamente disminuye con la longitud de onda. Este tipo de medios se llaman **dispersivos**.
- Como consecuencia de lo anterior, si un haz de rayos de luz de distintas longitudes de onda incide sobre un material refractante, cada radiación monocromática, según la Ley de Snell de la refracción, se desviará con un ángulo diferente.
- Como la luz blanca está formada por una mezcla de radiaciones de diferentes longitudes de onda, al hacer incidir dicha luz en una de las caras de un prisma óptico (sistema formado por dos superficies planas refractantes, las caras del prisma, que forman un ángulo diedro llamado ángulo refringente del prisma), se descompone en las distintas radiaciones monocromáticas ya que cada una de éstas se refracta con ángulos diferentes, emergiendo separadas por la otra cara del prisma. Si recogemos dichas radiaciones en una pantalla, observaremos una sucesión continua de colores llamada **espectro de la luz blanca**.

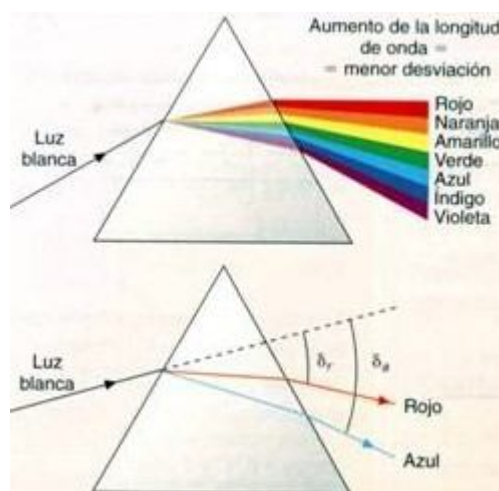


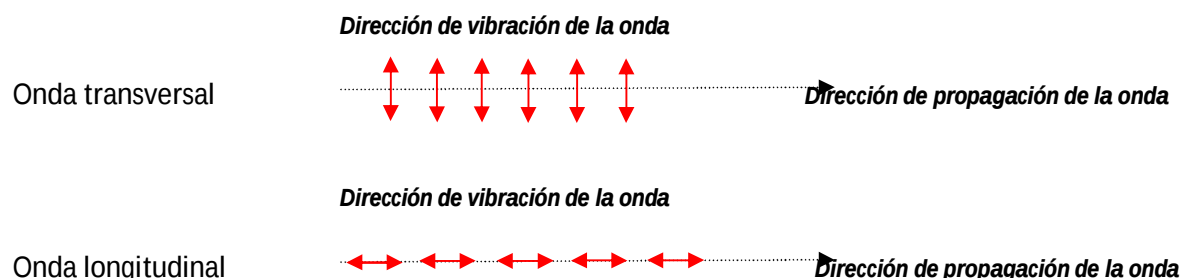
Figura 7.21 Dispersión de la luz en un prisma óptico

El prisma óptico origina un ángulo de desviación  $\delta$  distinto para cada radiación monocromática, siendo la luz roja la que sufre la menor desviación y la luz violeta la que sufre la mayor desviación.

El color de cada radiación monocromática depende de su frecuencia y debido a que ésta no cambia en la refracción, el color tampoco lo hará cuando incida sobre un medio refractante.

## 15. POLARIZACIÓN

Recuerda que una de las posibles clasificaciones de las ondas era atendiendo a como eran entre sí las direcciones de propagación y de vibración de la onda: si ambas direcciones coincidían, las ondas son longitudinales, pero, si ambas direcciones son perpendiculares, las ondas son transversales.



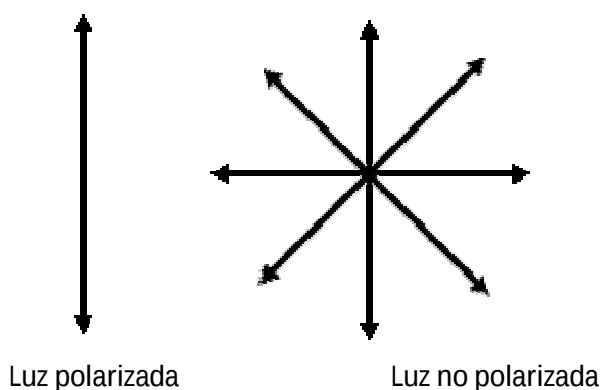
En las longitudinales sólo hay una dirección de vibración, que es la de propagación de la onda. Sin embargo en las ondas transversales hay infinitas posibles direcciones de vibración: todas las que están contenidas en el plano perpendicular a la dirección de propagación.

Cuando la onda transversal se propaga vibrando en todas las posibles direcciones de vibración, se dice que **la onda transversal no está polarizada**. Pero, si por algún mecanismo, conseguimos seleccionar una sola dirección de vibración de todas las posibles, decimos que **la onda transversal está polarizada**.

Una onda longitudinal no se puede polarizar porque ya lo está, ya que sólo vibra en una única dirección, la dirección de propagación. Por tanto el sonido no se puede polarizar puesto que ya lo está al ser una onda longitudinal.

El fenómeno de la polarización tiene especial importancia en la oem y, de hecho, la polarización de la luz sirvió para demostrar que se trata de ondas transversales, es decir, las oscilaciones de los campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación.

La luz natural no está polarizada, es decir, los campos eléctrico y magnético vibran aleatoriamente en todas las direcciones permitidas. Pero, existen diversos mecanismos para polarizar la luz. De entre ellos destacamos los dos siguientes: Polarización por absorción y polarización por reflexión.



### Polarización por absorción:

Existen diversas sustancias denominadas polaroides que tienen la particularidad de actuar como filtro ya que absorben la luz que vibra en todas las direcciones excepto la que vibra en una dirección determinada (dirección de polarización o eje de transmisión), tal y como se representa en la figura.

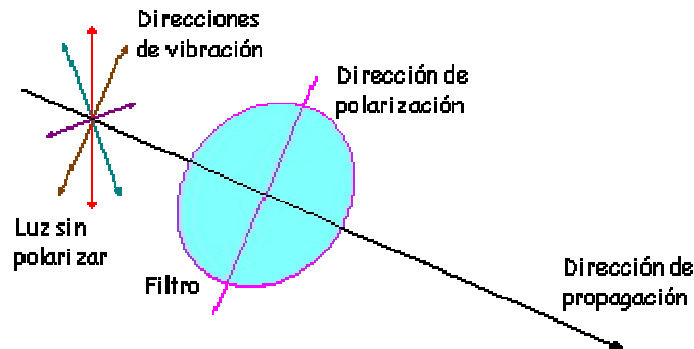


Figura 7.22 Polarización de luz natural por absorción

Démonos cuenta que si colocamos a continuación otro polarizador con su eje de transmisión perpendicular al que le precede, absorberá toda la luz que le llegue y, detrás de él no habrá luz.

### Polarización por reflexión:

Sabemos que cuando una onda luminosa incide sobre la superficie de separación de dos medios, una parte de la onda se refleja y otra parte se refracta. Pues bien, la luz reflejada está parcialmente polarizada.

Ocurre que cuando el rayo reflejado y el refractado forman un ángulo de  $90^\circ$ , la luz reflejada está totalmente polarizada.

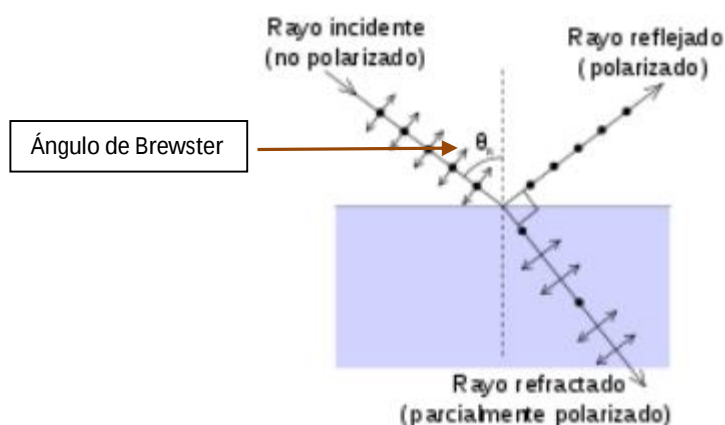


Figura 7.23 Polarización de luz natural por reflexión

El ángulo de incidencia para el cual los rayos reflejado y refractado forman  $90^\circ$  y por tanto la luz reflejada está totalmente polarizada, se denomina **ángulo de Brewster**.

## 16. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ondas electromagnéticas (oem) son ondas transversales en las que la perturbación que se propaga está formada por dos campos de fuerzas simultáneos y variables: un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{B}$ , perpendiculares entre sí en fase.

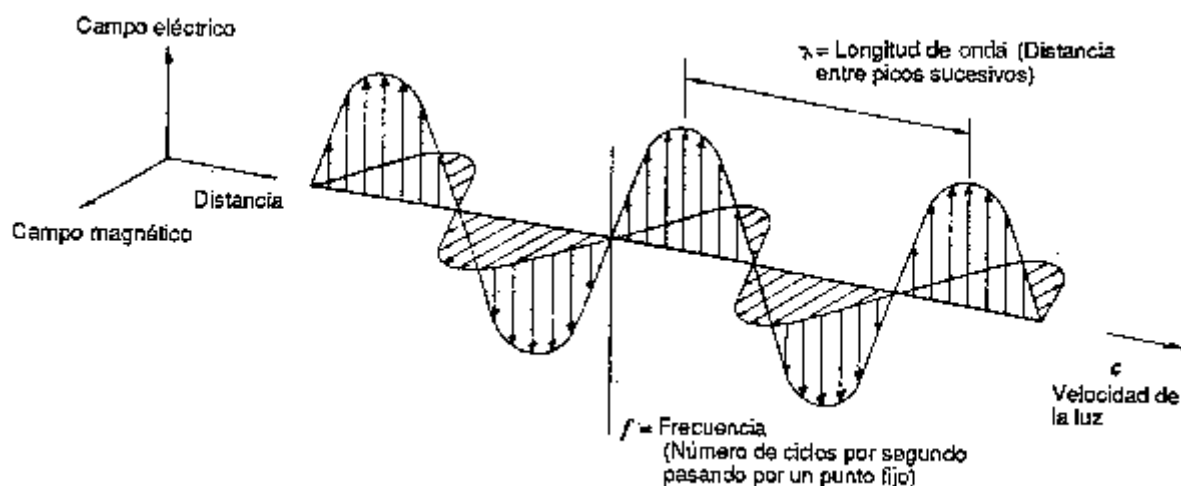


Figura 7.24 Onda electromagnética

### Características de las ondas electromagnéticas

- Son originadas por cargas eléctricas aceleradas.
- Consisten en una variación periódica del estado electromagnético del espacio: un campo eléctrico variable produce un campo magnético variable, éste a su vez origina un campo eléctrico y así, sucesivamente, ambos se propagan en el espacio.
- Los campos se propagan en fase, es decir, alcanza sus valores máximos, mínimos y nulos simultáneamente
- No necesitan soporte material para propagarse ya que los campos eléctrico y magnético pueden existir en el vacío.
- En estas ondas, los vectores de los campos eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$  varían periódicamente con el tiempo y la posición en planos perpendiculares entre sí. La dirección de propagación es la recta intersección de ambos planos y el sentido viene determinado por el producto vectorial  $\vec{E} \times \vec{B}$ . Si no hay atenuación, los módulos de ambos campos serán funciones sinusoidales de la posición y del tiempo, como la función de onda armónica. Además, las amplitudes de ambos campos cumplen la siguiente relación:

$$\frac{E_0}{B_0} = v$$

donde  $v$  es la velocidad de la luz en el medio de propagación.

- La relación entre los campos eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$  de una oem permite describir a dicha onda mediante una sola ecuación de onda, o bien la del campo eléctrico  $\vec{E}$  o la del campo magnético  $\vec{B}$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0) \quad \text{o bien} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0)$$

- La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas depende del medio de propagación según la expresión:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

donde  $\epsilon$  es la constante dieléctrica del medio y  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio. En el caso particular del vacío, la velocidad de la luz es  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  y es su valor máximo posible.

- Las ondas electromagnéticas también cumplen las relaciones entre velocidad, longitud de onda y frecuencia estudiadas en el tema de ondas.

### Espectro electromagnético

Existen distintos tipos de oem y al conjunto de todas ellas se le denomina espectro electromagnético. El espectro electromagnético es el conjunto de todas las ondas electromagnéticas conocidas, ordenadas según su longitud de onda o su frecuencia.

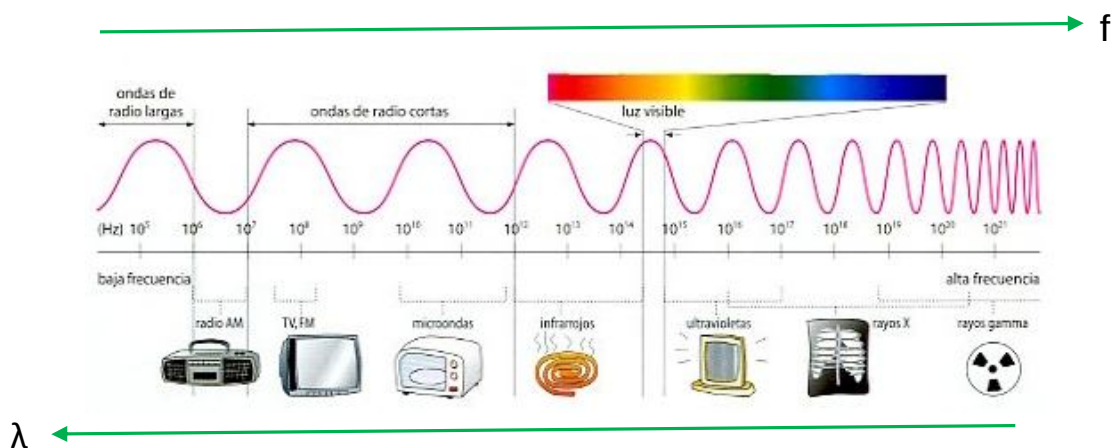


Figura 7.25 Espectro electromagnético

Todas las ondas electromagnéticas tienen en común su naturaleza. No obstante, cada grupo de ondas, caracterizado por un intervalo determinado de longitudes de onda y de frecuencias, tiene su propia forma de producción, y también unas aplicaciones prácticas específicas.

#### Ondas de radio y TV

Son las oem de menor frecuencia y por tanto de menor energía.

- o Origen: circuitos eléctricos oscilantes
- o Aplicaciones: radio, televisión, telecomunicaciones, ...

#### Microondas

- o Origen: circuitos oscilantes de alta frecuencia
- o Aplicaciones: telefonía, radar, radioastronomía, hornos, ...

Infrarrojos

También se denominan ondas térmicas ya que son producidas por los cuerpos incandescentes.. Son absorbidas con facilidad por la materia y en los seres vivos proporcionan la sensación de calor.

- o Origen: radiación térmica de los cuerpos
- o Aplicaciones: investigación biológica, médica, química e industrial, fotografía, ...

Visible

Es la parte del espectro electromagnético que aprecia el ojo humano y comprende el intervalo de frecuencias entre  $4 \cdot 10^{14}$  Hz y  $8 \cdot 10^{14}$  Hz.

Cada frecuencia produce la correspondiente sensación de color. En orden creciente de frecuencia y por tanto de energía son los siguientes colores:

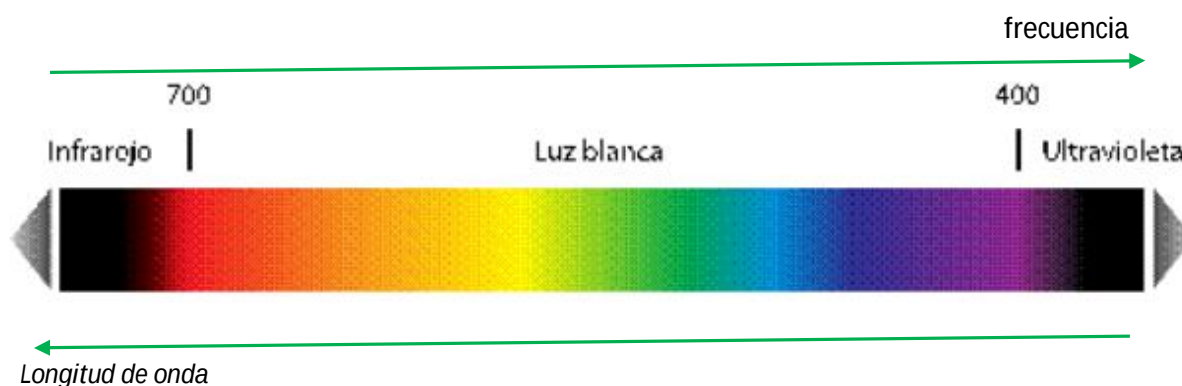


Figura 7.26 Espectro visible en nm

El intervalo de longitudes de onda para el espectro visible en el vacío lo podemos calcular utilizando la relación:

$$c = \lambda \cdot f$$

$$c = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^{14}} = 3,75 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 375 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 375 \text{ nm} = 3750 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3750 \text{ Å} \\ \lambda_2 = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{14}} = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 750 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 750 \text{ nm} = 7500 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 7500 \text{ Å} \end{cases}$$

Destaquemos que el intervalo de longitudes de onda obtenido para la luz visible, es sólo para el vacío. En cualquier medio el intervalo de longitudes de onda sería distinto, ya que, aunque el intervalo de frecuencias es invariante, la velocidad de propagación de la luz es diferente para cada medio y, por tanto, la longitud de onda de cada frecuencia sería diferente para cada medio.

- o Origen: transiciones electrónicas en los átomos
- o Aplicaciones: iluminación, láser, ...

Ultravioleta

Son oem cuya frecuencia está por encima del visible y por tanto tienen mas energía que la luz visible. Son las responsables del bronceado de la piel.

- o Origen: descargas eléctricas en gases y el Sol
- o Aplicaciones: medicina, biología, ...

### Rayos X

Son oem de alta frecuencia y por tanto de alta energía. Pueden atravesar los tejidos de los seres vivos y por ello hay que protegerse de ellas.

- o Origen: choques de electrones de alta energía con átomos metálicos provocando su desaceleración
- o Aplicaciones: medicina, metalurgia, cristalografía, ...

### Rayos γ

Son las oem de mayor frecuencia y por tanto las de mayor energía. Son absorbidas por los seres vivos produciendo graves efectos sobre ellos cuando se exponen a dosis altas y tiempos prolongados.

- o Origen: emisiones nucleares radiactivas
- o Aplicaciones: medicina, metalurgia, ...

## **TEMA 8. DUALIDAD ONDA PARTÍCULA**

- 1. Teorías sobre la naturaleza de la luz**
- 2. Radiación del cuerpo negro: hipótesis de Planck (opcional)**
- 3. Efecto fotoeléctrico**
- 4. Espectros atómicos: Postulado de Bohr (opcional)**
- 5. Dualidad onda-partícula: Hipótesis de De Broglie**
- 6. Principio de incertidumbre o de indeterminación de Heisenberg**

## INTRODUCCIÓN

A finales del siglo XIX se pensaba que cualquier fenómeno físico se podía explicar con los tres pilares básicos de lo que, posteriormente, pasaría a llamarse la Física Clásica: la Mecánica Clásica, la Termodinámica y el Electromagnetismo. Sin embargo, el descubrimiento de una serie de fenómenos que no podían explicarse con las ideas de la Física Clásica, supuso el inicio de la crisis de la misma de la que se saldría gracias a la apertura de nuevos apasionantes caminos insospechados hasta entonces. La llamada Física Moderna se desplegó en tres direcciones: la teoría de la Relatividad, la Mecánica Cuántica y la Física Nuclear.

Los principales fenómenos que pusieron en tela de juicio a la Física Clásica fueron la radiación térmica, el efecto fotoeléctrico y los espectros atómicos. Estos tres fenómenos fueron claves para el desarrollo de la denominada revolución cuántica.

Por otro lado, hasta principios del siglo XX, la comunidad científica consideraba el electrón como una partícula y la radiación electromagnética como una onda. Sin embargo, la radiación electromagnética se comporta, al interactuar con la materia, como un conjunto de corpúsculos llamados fotones. Este hecho, junto con otros resultados experimentales obtenidos alrededor de 1900, no estaba de acuerdo con lo establecido hasta entonces por la comunidad científica. Ello llevó a los físicos de la época a desarrollar una nueva teoría, la **mecánica cuántica**. En este tema describiremos dos aspectos característicos de esta teoría: la *dualidad onda-partícula* y el *principio de indeterminación*.

## 1. TEORÍAS SOBRE LA NATURALEZA DE LA LUZ

La determinación de la naturaleza de la luz ha originado una de las controversias más apasionantes de la historia de la Ciencia. Las diversas hipótesis, formuladas en diferentes momentos históricos para justificar los fenómenos conocidos hasta entonces, se iban desechando o modificando a medida que se alcanzaban nuevos conocimientos.

Las primeras hipótesis científicas merecedoras de atención surgieron simultáneamente durante el siglo XVII y fueron propuestas por dos grandes científicos: el inglés Isaac Newton (1642-1727) y el holandés Christian Huygens (1629-1695). Las dos hipótesis, aparentemente contradictorias entre sí, se han denominado, respectivamente, la **teoría corpuscular de Newton** y la **teoría ondulatoria de Huygens**, y han servido de base a todas las opiniones posteriores.

### Teoría corpuscular de Newton

En su obra *Óptica*, publicada en 1705, Newton afirmó que la luz tiene **naturaleza corpuscular**: los focos luminosos emiten minúsculas partículas que se propagan en línea recta en todas las direcciones y, al chocar con nuestros ojos, producen la sensación luminosa.

Los corpúsculos, distintos para cada color, son capaces de atravesar los medios transparentes y son reflejados en los cuerpos opacos.

Esta hipótesis justificaba fenómenos como la propagación rectilínea de la luz y la reflexión, pero no aclaraba otros como la refracción: ¿por qué unos corpúsculos luminosos son reflejados por la superficie de un cuerpo al mismo tiempo que otros penetran en ella refractándose?

Para poder justificarlo, supuso que la luz viajaba a mayor velocidad en los líquidos y en los vidrios que en el aire, lo que posteriormente se comprobó que era falso.

### Teoría ondulatoria de Huygens

Con anterioridad a Newton, Huygens, en su obra *Tratado de la luz*, publicada en 1690, propuso que la luz consiste en la propagación de una perturbación ondulatoria del medio. Huygens creía que se trataba de ondas longitudinales, similares a las ondas sonoras, que necesita para su propagación un medio especial, el *éter*, a la vez rígido y suficientemente elástico, que todo lo ocupa.

Esta hipótesis explicaba fácilmente determinados fenómenos como la reflexión, la refracción y la doble refracción, descubierta por entonces.

Pese a ello, no fue comúnmente aceptada. La mayoría de los científicos se adhirió a la teoría corpuscular de Newton, dado su prestigio. Así mismo, tampoco se terminaba de aceptar la existencia del *éter* y sus especiales propiedades.

Otra dificultad añadida residía en que aún no se habían observado en la luz fenómenos típicamente ondulatorios como la difracción. Hoy sabemos que la longitud de onda de la luz es tan pequeña que estos fenómenos, aunque se producen, no es fácil observarlos.

### Teoría ondulatoria de Fresnel

A principios del siglo XIX diversos avances revalorizaron la hipótesis ondulatoria de la luz. Algunos de ellos fueron: las experiencias, en 1801, del médico y físico inglés T. Young (1773-1829) sobre *interferencias luminosas*; el descubrimiento, en 1808, de la *polarización* de la luz o las experiencias, en 1815, del físico francés A. J. Fresnel (1788-1827) sobre la *difracción*.

Fresnel mostró la insuficiencia de la teoría corpuscular para justificar estos descubrimientos e hizo una nueva propuesta: la luz está constituida por **ondas transversales**.

Más tarde, en 1850, el físico francés J. Foucault (1819-1868) midió la velocidad de la luz en el agua y comprobó que era menor que en el vacío, lo que invalidaba la justificación de Newton para la refracción.

La hipótesis corpuscular, después de 150 años de aceptación, fue prácticamente abandonada.

## Teoría electromagnética de Maxwell

En 1864, el físico y matemático escocés J. C. Maxwell (1831-1879) estableció la **teoría electromagnética** de la luz, que acabaría convirtiéndose en la **teoría clásica** de la luz. Adelantándose a la comprobación experimental de la existencia de las ondas electromagnéticas, efectuada en 1887 por el físico alemán H. Hertz (1857-1894), propuso que la luz no es una onda mecánica que necesite de ningún medio material, incluido el éter, sino una forma de **onda electromagnética** de alta frecuencia. Por tanto, las ondas luminosas consisten en la propagación, sin necesidad de soporte material alguno, de un campo eléctrico y de un campo magnético, perpendiculares entre sí, y a la dirección de propagación.

Esta teoría tuvo aceptación general y, al parecer, podía considerarse como la teoría definitiva acerca de la naturaleza de la luz.

## Naturaleza corpuscular de la luz según Einstein

Sin embargo alrededor de 1900 aparecieron tres fenómenos relacionados con la interacción de la radiación electromagnética con la materia que no pueden ser explicados mediante la teoría ondulatoria, pero sí con la teoría corpuscular. Estos tres fenómenos son: **LA RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO, EL EFECTO FOTOELÉCTRICO y EL EFECTO COMPTON.**

## Naturaleza dual de la luz

Ante esta situación se propone una nueva teoría sobre la naturaleza de la luz y de la radiación electromagnética en general, que engloba a las dos anteriores. Esta nueva teoría, denominada de la dualidad onda-partícula, engloba a las dos teorías anteriores y acepta que la luz tiene una doble naturaleza: **corpuscular** y **ondulatoria**. Así, la luz manifestará su carácter de onda electromagnética en fenómenos típicamente ondulatorios (reflexión, refracción, difracción, interferencias, etc.) o su carácter corpuscular en su interacción con la materia o en ciertos fenómenos de intercambio de energía (efecto fotoeléctrico).

Sin embargo, la luz no manifiesta simultáneamente ambas características, puesto que en un fenómeno concreto se comporta como onda o bien como partícula; son, por tanto, comportamientos complementarios.

## 2. RADIACIÓN DEL CUERPO NEGRO: HIPÓTESIS DE PLANCK (No obligatoria)

Cuando una barra de hierro se calienta, va cambiando de color conforme aumenta su temperatura: al principio sólo emite radiación infrarroja, que no vemos; después comienza a emitir luz roja y, a temperaturas superiores, presenta color blanco, e incluso blanco azulado.

Se llama **radiación térmica** a la energía electromagnética que emite un cuerpo debido a su temperatura.

Esta radiación térmica varía tanto con la temperatura como con la composición del cuerpo. Existe, sin embargo, un conjunto de cuerpos cuya radiación térmica sólo depende de su temperatura. Se denominan **cuerpos negros** y son considerados tanto emisores como absorbentes ideales de luz. Su radiación presenta las siguientes características:

- La potencia total  $P$  emitida a la temperatura  $T$  por una superficie  $S$  cumple la **ley de Stefan-Boltzmann**:

$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot S$$

donde  $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  es la constante de Boltzmann.

- La longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}}$  para la que se produce mayor emisión de energía es inversamente proporcional a la temperatura  $T$ , según la **ley de desplazamiento de Wien**:

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = 2,897755 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

### Hipótesis de Planck

A principios del año 1900 dos físicos ingleses, Rayleigh y Jeans, utilizaron los principios del electromagnetismo y la termodinámica clásicos para describir la radiación del cuerpo negro. Obtuvieron una expresión matemática (ley de Rayleigh-Jeans) en la que la energía de la radiación disminuye al aumentar la longitud de onda, pero aumenta indefinidamente al disminuir ésta.

En cambio, según los resultados experimentales, la energía tiende a cero para longitudes de onda muy pequeñas, como las correspondientes al ultravioleta, que era la zona de mayor energía del espectro electromagnético conocida en ese momento. Este fracaso de la teoría clásica fue tan importante que se denominó *catástrofe ultravioleta*.

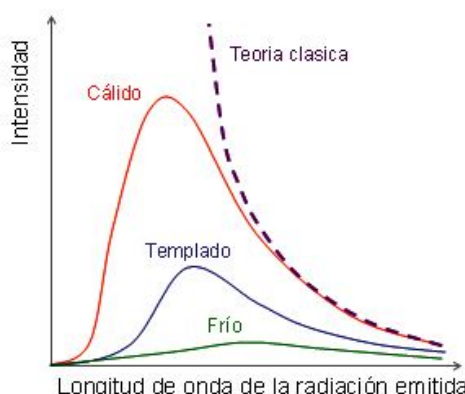


Fig. 8.1

A finales de ese mismo año, el físico alemán Max Planck (1858-1947) formuló las siguientes **hipótesis** como punto de partida para explicar la radiación del cuerpo negro:

- Los átomos que emiten la radiación se comportan como osciladores armónicos.
- Cada oscilador absorbe o emite energía de la radiación en una cantidad proporcional a su frecuencia de oscilación  $f$ :

$$E_0 = h \cdot f$$

donde  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  J·s es la constante de Planck.

Así, la energía total emitida o absorbida por cada oscilador atómico sólo puede tener un número entero  $n$  de porciones de energía  $E_0$ :

$$E = n \cdot E_0 = n \cdot h \cdot f \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Los paquetes de energía  $h \cdot f$  se llamaron **cuantos**, de manera que se dice que la energía de los osciladores está *cuantizada* y  $n$  es un *número cuántico*.

Al desarrollar esta hipótesis cuántica, Planck obtuvo una expresión que le permitió reproducir la distribución de energías observada experimentalmente (fig. 8.1).

### 3. EFECTO FOTOELÉCTRICO: TEORÍA DE EINSTEIN

#### 3.1 Definición y resultados experimentales

Se denomina efecto fotoeléctrico a la emisión de electrones por parte de un metal cuando sobre él incide una radiación electromagnética correspondiente al espectro visible.

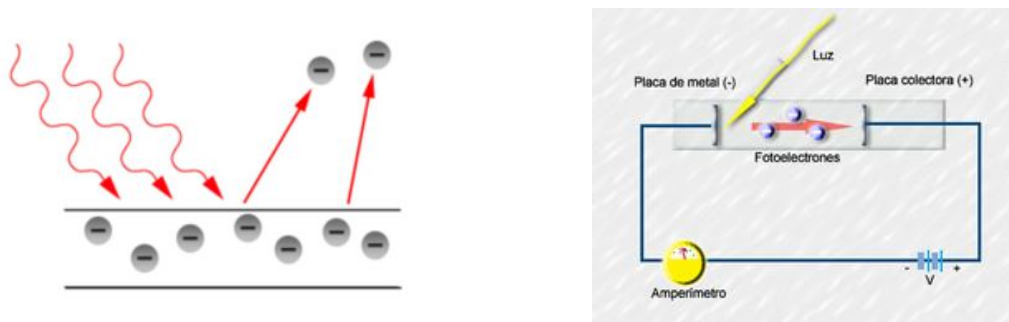


Figura 8.2

Este fenómeno fue descubierto por el físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894). En 1887, Hertz descubrió que al someter a la acción de la luz (visible o ultravioleta) determinadas superficies metálicas, éstas desprendían electrones (llamados fotoelectrones). Este fenómeno se denomina **efecto fotoeléctrico**.

Experimentalmente se observan los siguientes resultados para el efecto fotoeléctrico:

- 1º. El efecto fotoeléctrico en un metal no se produce para cualquier radiación incidente.
- 2º. El efecto fotoeléctrico en un metal solo se produce si la radiación incidente tiene una frecuencia igual o superior a un cierto valor denominado **FRECUENCIA UMBRAL O FRECUENCIA PROPIA DEL METAL,  $f_0$** .
- 3º. La frecuencia umbral es diferente para cada metal.
- 4º. Por debajo de la frecuencia umbral el metal no emite electrones por mucho que aumentemos la intensidad de la radiación incidente, pero, si la radiación incidente tiene una frecuencia igual o superior a la frecuencia umbral,  $f_0$ , el número de fotoelectrones emitidos aumenta al aumentar la intensidad de la radiación incidente.
- 5º. Nunca se ha podido medir un tiempo de retraso entre la iluminación del metal y la emisión de fotoelectrones.

#### 3.2 Fracaso de la teoría ondulatoria

La teoría ondulatoria de la luz no puede explicar este fenómeno por tres razones fundamentales:

- 1ª. Para el modelo ondulatorio no debería existir la frecuencia umbral, es decir, cualquier frecuencia debería de servir para arrancar electrones a un metal, para ello bastaría con aumentar la intensidad de la radiación incidente suficientemente.

2ª. Si la frecuencia  $f$  de la luz incidente es mayor que la frecuencia umbral  $f_0$ , el número de electrones emitidos es proporcional a la intensidad de la radiación incidente. Sin embargo, su energía cinética máxima es independiente de la intensidad de la luz, lo cual no tiene explicación en la teoría clásica.

3ª. Según la teoría clásica, si la intensidad de la luz es muy débil, debe existir un tiempo de retraso entre el instante en que la luz incide sobre la superficie metálica y la emisión de fotoelectrones.

### 3.3 Teoría cuántica de Einstein

En 1905, el físico alemán Albert Einstein (1879-1955) dio una explicación satisfactoria al efecto fotoeléctrico utilizando el modelo corpuscular de la luz, basado en los cuantos de Planck.

Así, para explicar el efecto fotoeléctrico, Einstein propuso que:

1º. La luz está formada por unas partículas denominadas **fotones**.

2º. La cantidad de energía de cada fotón solo depende de la frecuencia  $f$  de la radiación electromagnética a la que pertenece mediante la expresión:

$$E = h \cdot f \quad [8.1]$$

Siendo  $h$  la denominada **CONSTANTE DE PLANCK** que vale  $6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s  
(Como vemos Einstein considera a la luz formada por cuantos o paquetes de energía)

3º. Cuando la radiación incide sobre un determinado metal, la energía de cada fotón  $E = h \cdot f$  es absorbida completamente por un electrón del metal.

De esta manera, la teoría cuántica de Einstein da respuesta a los aspectos del efecto fotoeléctrico que no tiene explicación bajo el punto de vista ondulatorio:

1ª. Cuando un fotón es absorbido por un electrón del metal, el primero transmite toda su energía  $h \cdot f$  al segundo y, si esta energía es igual o superior a la energía de ionización del metal (también llamada trabajo de extracción o función trabajo), el electrón podrá abandonar el metal, pero si la energía del fotón incidente es menor el electrón no podrá abandonar el metal y no se producirá el efecto fotoeléctrico.

2ª. La frecuencia umbral  $f_0$ , es la frecuencia de aquella radiación cuyos fotones tienen una energía  $E = h \cdot f_0$ , igual a la energía de ionización del metal o trabajo de extracción  $W_{\text{ext.}}$ , es decir, es la frecuencia mínima con la que hay que irradiar al metal para que se emitan fotoelectrones.

$$h \cdot f_0 = W_{\text{ext.}} \quad [8.2]$$

3ª. Si la radiación incidente tiene una frecuencia  $f$  inferior a la umbral  $f_0$ ,  $f < f_0$ , la energía de los fotones de dicha radiación es inferior al trabajo de extracción del metal,  $h \cdot f < W_{\text{ext.}} = hf_0$ , y

por tanto, los fotones no pueden comunicar suficiente energía a los electrones del metal para que lo abandonen, ni siquiera aunque aumente la intensidad de la radiación incidente. Si aumenta la intensidad de la radiación incidente, lo que aumenta es el número de fotones incidentes, pero no su energía, y por eso no se produce el efecto fotoeléctrico.

4ª. Si se ilumina al metal con una radiación de frecuencia superior a la umbral,  $f > f_0$ , los fotones de dicha radiación si producirán el efecto fotoeléctrico ya que sus fotones tienen una energía superior al trabajo de extracción del metal,  $h \cdot f > W_{\text{ext}} = hf_0$ . Al aumentar la intensidad de la luz incidente, no aumenta la energía de sus fotones,  $E = h \cdot f$ , sino que aumenta proporcionalmente el número de fotones incidentes y, por tanto, el número de fotoelectrones emitidos por el metal pero no la energía cinética de ellos.

5ª. Debido a que la energía necesaria para extraer un electrón se suministra en paquetes concentrados (fotones), no tiene sentido la existencia de un tiempo de retraso.

6ª. Cuando un fotón de la radiación incidente es absorbido íntegramente por un electrón del metal, el balance de energía es el siguiente:

*Energía del fotón incidente = Trabajo de extracción + Energía cinética del  $e^-$*

$$h \cdot f = h \cdot f_0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v_e^2 \quad [8.3]$$

La ecuación anterior se denomina **ECUACIÓN DE EINSTEIN DEL EFECTO FOTOELÉCTRICO**

*Cuando Einstein publicó su teoría en 1905, no existían datos experimentales para confirmarla. Hubo que esperar a los trabajos del físico norteamericano Robert Millikan (1868-1953), efectuados entre 1914 y 1916, para disponer de datos suficientes. En este momento quedó demostrada la ecuación fotoeléctrica de Einstein [8.3]*

### **Ejemplo 1º**

La frecuencia umbral para el Na es  $4,39 \cdot 10^{14}$  Hz.

- ¿Qué significa este valor?
- Calcula la longitud de onda umbral del Na e interpreta el resultado.
- Calcula el trabajo de extracción del sodio.
- Se ilumina el sodio con una radiación de  $5,5 \cdot 10^{14}$  Hz, ¿se producirá efecto fotoeléctrico? ¿por qué?
- Si la respuesta del apartado anterior ha sido afirmativa, calcula la energía cinética y la velocidad de los fotoelectrones emitidos.
- Sabiendo que se llama **potencial de frenado** a la diferencia de potencial eléctrico que hay que aplicar para frenar y detener a los fotoelectrones que son arrancados del metal, calcula el potencial de frenado del Na.

### **Ejemplo 2º**

La frecuencia umbral para un determinado metal se encuentra dentro del espectro del verde. Explica razonadamente si:

- ¿Se producirá el efecto fotoeléctrico en el metal si lo iluminamos con luz azul?
- ¿Y si lo iluminamos con luz amarilla?

#### 4. ESPECTROS ATÓMICOS: POSTULADOS DE BOHR (No obligatorio)

A finales del siglo XIX se disponía de muchos datos sobre la luz emitida por los átomos de un gas excitados por una descarga eléctrica. El análisis espectroscópico de esta radiación mostraba el aspecto de un conjunto discreto de líneas de diferentes longitudes de onda (figura 8.4). El conjunto discreto de frecuencias de radiación electromagnética que emiten los átomos de un gas se llama **espectro de emisión** y es característico de cada elemento.

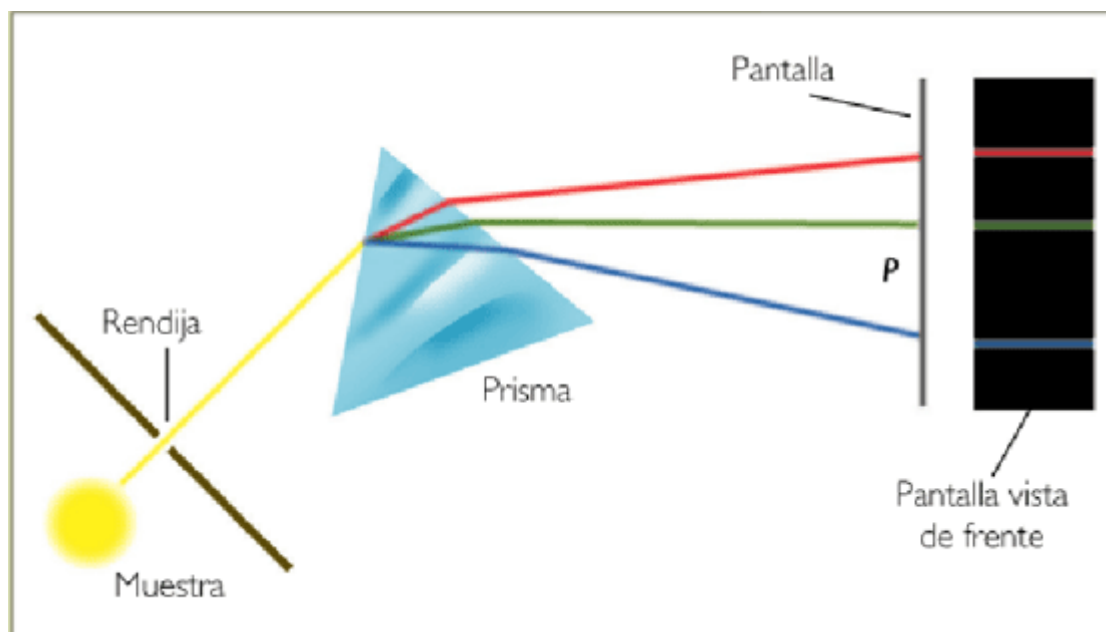


Figura 8.3

Del mismo modo, los átomos absorben algunas frecuencias específicas al ser iluminados con radiación electromagnética. En este caso, se obtiene un espectro continuo en el que aparecen rayas oscuras en las mismas posiciones en que aparecen las rayas del espectro de emisión; se obtiene de esta forma el correspondiente **espectro de absorción**.

#### Modelo atómico de Bohr

Una de las aplicaciones más destacables de la cuantización de la energía fue llevada a cabo por el físico danés Niels Bohr (1885-1962). Estudió detenidamente el espectro atómico del hidrógeno, comprobando que no podía interpretarlo desde el punto de vista de la teoría clásica, por lo que optó por aplicar la teoría cuántica. Así, propuso un nuevo modelo atómico que tenía en cuenta los espectros atómicos. Según este modelo:

- El electrón se mueve, sin emitir ni absorber radiación, en **órbitas circulares estacionarias** que sólo pueden tener ciertas energías y ciertos radios.
- El electrón sólo puede cambiar de órbita emitiendo o absorbiendo un fotón con energía y frecuencia determinadas. La energía de estos fotones es igual a la diferencia de energías entre las órbitas de transición o niveles de energía (figura 8.4):

$$\Delta E = h \cdot f$$

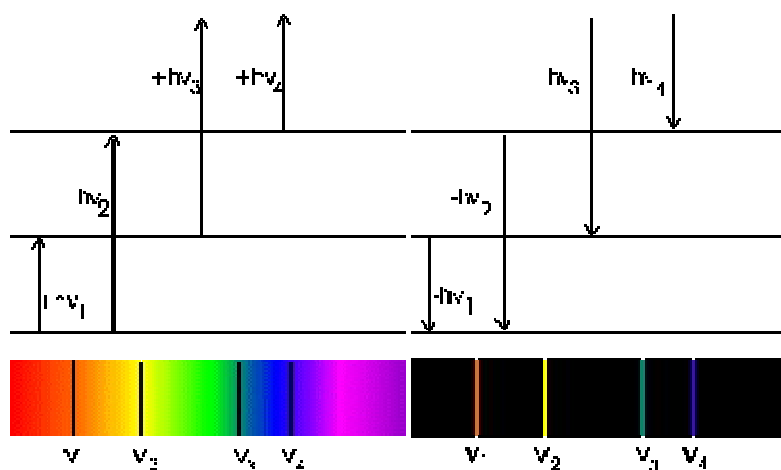
Esta cuantificación de la energía justifica que las líneas espectrales estén separadas, es decir, que el espectro sea discreto.



Transiciones energéticas de los electrones entre los distintos niveles de energía  
Figura 8.4

En el átomo de Bohr, el número natural,  $n$ , o número cuántico principal, identifica los estados estacionarios del electrón. En el átomo de hidrógeno, el estado con energía más baja ( $n = 1$ ) se conoce como *estado fundamental*, mientras que los demás ( $n > 1$ ) son *estados excitados*.

El electrón puede emitir un fotón, pasando de un nivel de energía a otro más bajo o bien puede absorber el mismo fotón para volver a pasar al nivel de mayor energía. Éste es el motivo por el que los espectros de absorción y emisión contienen las mismas frecuencias discretas (figura 8.5).



Espectros de emisión y absorción en las transiciones electrónicas de los distintos niveles de energía  
Figura 8.5

## 5. DUALIDAD ONDA-PARTÍCULA: HIPÓTESIS DE DE BROGLIE

Como ya sabemos existe una serie de fenómenos relacionados con la luz (la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton) que solo pueden ser explicados mediante la teoría corpuscular. Sin embargo existen otros fenómenos (polarización, difracción, interferencias, etc.) que han de ser explicados mediante la teoría ondulatoria.

Ante esta situación se plantea la pregunta de si la luz es un conjunto de ondas o un conjunto de partículas. La respuesta a esta pregunta es que la luz, y en general el resto de la radiación electromagnética, tiene un doble comportamiento: como onda y como partícula (dualidad onda-partícula de la luz), es decir, el modelo ondulatorio y el modelo corpuscular han de considerarse como aspectos complementarios que explican el comportamiento real de la luz y del resto de radiación electromagnética.

¿Podría extenderse esta dualidad onda-corpúsculo a la materia?

La respuesta la dio, en 1924, el físico francés Luis de Broglie (1892-1987). En su tesis doctoral, sugirió que los electrones podían tener características ondulatorias. Su hipótesis, conocida como **hipótesis o postulado de De Broglie**, consistió en ampliar el comportamiento dual de la radiación a la materia, y dice lo siguiente:

*Cuando un electrón se mueve con velocidad  $v$ , tiene asociado una onda cuya longitud de onda es igual a la constante de Planck dividida por la cantidad de movimiento o momento lineal del electrón:*

$$\lambda = \frac{h}{p_e} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{m_e v_e} \quad [8.4]$$

Como vemos en el postulado de De Broglie quedan relacionadas dos magnitudes físicas del electrón, siendo una de ellas característica de un comportamiento ondulatorio (la longitud de onda  $\lambda$ ), mientras que la otra es característica de un comportamiento corpuscular (la cantidad de movimiento o momento lineal  $p$ ).

La hipótesis de De Broglie sobre la dualidad onda-partícula en los electrones fue propuesta de forma puramente teórica por la ausencia de evidencias experimentales. Sin embargo, en 1927, los físicos norteamericanos C. Davisson (1881-1958) y L. A. Germer (1896-1971) la comprobaron experimentalmente después de haber observado la difracción de electrones de forma casual.

El postulado de De Broglie se hace extensivo a toda la materia, y por tanto, se puede afirmar lo siguiente:

*Cuando una partícula de masa  $m$ , se mueve con velocidad  $v$ , tiene asociado una onda cuya longitud de onda es igual a la constante de Planck dividida por la cantidad de movimiento o momento lineal de dicha partícula:*

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{m \cdot v} \quad [8.5]$$

En la práctica, las ondas asociadas a partículas muy grandes tienen una longitud de onda muy pequeña, debido al pequeño valor de la constante de Planck,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s, y la onda asociada de De Broglie a estas partículas es despreciable y no ha de ser tomada en cuenta.

Sin embargo, para las partículas subatómicas, aunque se mueven a altas velocidades, tienen una masa muy pequeña y la longitud de onda asociada de De Broglie que se obtiene de la ecuación 8.5 tiene un valor que está dentro del espectro electromagnético, y por tanto las ondas asociadas a las partículas subatómicas sí ha de ser tomada en cuenta.

### INFORMACIÓN ADICIONAL:

Una aplicación práctica de la dualidad onda-partícula es el microscopio electrónico el cual utiliza las características ondulatorias de los electrones con una longitud de onda asociada de hasta 3 Å, muy inferiores a los 400 nm mínimos de los microscopios ópticos que utilizan luz visible, consiguiendo con ello aumentar el poder de resolución y logrando un número de aumentos suficiente para poder observar estructuras muy pequeñas.

La longitud de onda de los electrones se controla fijando su velocidad; para ello se les impulsa mediante una diferencia de potencial  $V$  determinada tal que la energía cinética  $E_c$  que adquieren viene dada por:

$$E_c = e \cdot V$$

Como  $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$  y  $\lambda = \frac{h}{p}$  entonces:

$$\frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \lambda^2} = e \cdot V \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V}}$$

Por tanto, al aumentar la diferencia de potencial  $V$  se logra disminuir la longitud de onda  $\lambda$  de los electrones y lograr con ello un mayor número de aumentos.

### Ejemplo 3º

Un electrón, inicialmente en reposo, se acelera mediante una diferencia de potencial de  $10^4$  V.

- Haz un análisis energético del movimiento del electrón mientras es acelerado.
- Calcula la energía cinética y la velocidad adquirida por el electrón.
- Calcula la longitud de onda asociada de De Broglie del electrón.
- Repite todos los apartados anteriores en el supuesto de que la partícula que se acelera sea un protón

### Ejemplo 4º

Calcula la longitud de onda asociada de De Broglie de un balón de 500 g que en un momento dado se mueve a 90 Km/h.



## 6. PRINCIPIO DE INDETERMINACIÓN O INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG: DETERMINISMO Y PROBABILIDAD

El postulado de De Broglie sobre la dualidad onda-partícula es el comienzo de una nueva teoría física llamada Mecánica Cuántica o Mecánica Ondulatoria. Una de las consecuencias fundamentales de esta nueva teoría es el Principio de Indeterminación o Incertidumbre de Heisenberg.

Según la física clásica, el error en una medida se debe a la imprecisión del aparato de medida. Por tanto, un aparato clásico ideal podría determinar exactamente, por ejemplo, la posición y la velocidad de un electrón. Ahora bien, la cuestión planteada era: ¿hasta qué punto es posible determinar simultáneamente la posición y el momento lineal de un objeto cuántico, materia, como un electrón, o radiación, como un fotón?

En 1927, el físico alemán Werner Heisenberg (1901-1976) dio la respuesta enunciando su **Principio de Indeterminación** o **Principio de Incertidumbre**, el cual nos proporciona unos límites para la información que podemos conocer de un objeto cuántico. Este principio tiene dos partes:

- No es posible determinar simultáneamente el valor exacto de la posición  $x$  y del momento lineal  $p$  de un objeto cuántico. Los valores de las correspondientes indeterminaciones cumplen:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

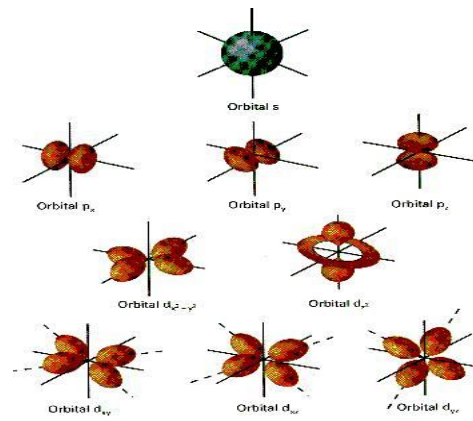
De esta relación vemos que un alto grado de precisión en el valor de la posición equivale a una gran indeterminación en la medida del momento lineal (y, por tanto, en la velocidad) del objeto.

- No es posible determinar simultáneamente el valor medido de la energía  $E$  de un objeto cuántico y el tiempo  $t$  en que tiene dicha energía. Los valores de las correspondientes indeterminaciones cumplen:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

Este principio tiene dos principales consecuencias:

1º. Hace evidente la necesidad de que los sistemas cuánticos se expresen en términos de probabilidad. La Mecánica Cuántica es una teoría probabilística (la Mecánica Clásica es determinista). Por ejemplo, una partícula tiene infinitas trayectorias posibles, más o menos probables, siendo la trayectoria clásica únicamente la trayectoria de mayor probabilidad. Del mismo modo, no se puede hablar de órbitas exactas como las de Bohr, sino únicamente de zonas del espacio donde es más probable hallar al electrón llamadas *orbitales*.



2º. Induce el *principio de complementariedad* según el cual un objeto cuántico, como un electrón o un fotón, actúa como onda o como partícula pero nunca mostrará los dos aspectos simultáneamente: son aspectos complementarios.

## TEMA 9. FÍSICA NUCLEAR

1. El núcleo atómico:  $n^\circ$  atómico,  $n^\circ$  másico e isótopos
2. Defecto de masa nuclear, energía de enlace nuclear, interacción nuclear fuerte, energía de enlace nuclear por nucleón y estabilidad nuclear.
3. Radiactividad: descripción de los procesos alfa, beta y gamma
4. Ley de desintegración radiactiva: periodo de semidesintegración radiactiva, vida media y actividad
5. Reacciones nucleares
6. Fisión y fusión nucleares
7. Principales interacciones en la naturaleza

## 1. EL NÚCLEO ATÓMICO: N° ATÓMICO, N° MÁSICO E ISÓTOPOS

El descubrimiento del núcleo atómico se produjo en 1911 a partir de las experiencias realizadas por Ernest Rutherford y sus colaboradores. A partir de este hecho, Rutherford propuso un modelo atómico, conocido como *modelo nuclear*. Según este modelo el átomo consta de dos partes: una parte central, denominada *núcleo*, y la zona periférica denominada *corteza*.

El tamaño del núcleo es muy pequeño comparado con el tamaño del átomo. El radio del núcleo es del orden de  $10^{-15}$  m = 1 fermi (fm), mientras que el radio del núcleo es del orden de  $10^{-10}$  m = 1 Angstrom (Å). Si comparamos el radio del átomo con el radio del núcleo, obtenemos que el radio del átomo es aproximadamente  $10^5$  (cien mil veces) superior al radio del núcleo.

En la corteza se encuentran los electrones girando alrededor del núcleo en distintas órbitas o niveles de energía. El núcleo está formado por protones y neutrones, partículas que denominamos **nucleones**.

La carga de los electrones y de los protones coincide en valor absoluto ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  C). Por esta razón, si el átomo está en estado neutro, el n° de electrones de la corteza coincide con el n° de protones de su núcleo. Pero, si el átomo no está en estado neutro, es porque en su corteza hay un exceso o un defecto de electrones con respecto al n° de protones de su núcleo, y el átomo sería un ión cargado negativamente (anión) o cargado positivamente (catión)

La masa de los protones y neutrones es muy parecida, aunque la de los neutrones es ligeramente superior. La masa de los electrones es mucho más pequeña. En la siguiente tabla aparecen la masa y carga de las partículas subatómicas:

| PARTÍCULA                  | CARGA                   | MASA                                  |
|----------------------------|-------------------------|---------------------------------------|
| Electrón (e <sup>-</sup> ) | $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C | $9,11 \cdot 10^{-31}$ Kg = 0,00055 u  |
| Protón (p <sup>+</sup> )   | $1,6 \cdot 10^{-19}$ C  | $1,6726 \cdot 10^{-27}$ Kg = 1,0073 u |
| Neutrón (n)                | -                       | $1,6749 \cdot 10^{-27}$ Kg = 1,0087 u |

Si comparamos la masa del protón con la masa del electrón, obtenemos que el protón tiene aproximadamente 1836 veces más masa que el electrón. Por esta razón, en el núcleo se concentra la mayor parte de la masa (más del 99 %) y toda la carga positiva del átomo. En cambio, el volumen del núcleo es una parte muy pequeña del volumen atómico. Por consiguiente, el núcleo posee una elevadísima densidad (del orden de  $10^{18}$  kg/m<sup>3</sup>).

Para medir la masa de los átomos se utiliza la unidad de masa atómica (u), llamada también uma, que es la doceava parte de la masa de un átomo de carbono-12. La equivalencia en Kg es:

$$1 \text{ u} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$$

Todos los átomos de un mismo elemento químico tienen en su núcleo el mismo número de protones. A este n° se le denomina **número atómico**, y se representa por la letra **Z**. El número atómico identifica a cada elemento químico y en la tabla periódica los elementos están ordenados en orden creciente de número atómico: Z(H) = 1; Z(He) = 2; Z(Li) = 3; Z(Be) = 4; ...

El n° de neutrones del núcleo puede variar de unos átomos a otros para un mismo elemento químico. Por tanto, todos los átomos de un mismo elemento químico no son iguales porque, aunque tengan el mismo n° de protones (Z), pueden tener distinto n° de neutrones.

A los diferentes tipos de átomos de un elemento químico se les denomina **isótopos del elemento**. Por tanto, los isótopos de un elemento químico se caracterizan por tener distinta masa, ya que, en su núcleo tienen distinto nº de partículas (**o nucleones**). En efecto los isótopos de un elemento químico, aunque tienen la misma cantidad de protones en el núcleo (igual nº atómico Z), tienen diferente nº de neutrones.

Al número de partículas (o nucleones) que tienen en el núcleo los átomos de un determinado isótopo de un elemento químico se le denomina **número másico**, y se representa por la letra **A**. Por tanto, el nº másico A de un isótopo es la suma de los protones y neutrones que tienen los átomos de dicho isótopo en su núcleo:

$$n^{\circ} \text{ másico} = n^{\circ} \text{ de protones} + n^{\circ} \text{ de neutrones}$$

$$A = Z + N$$

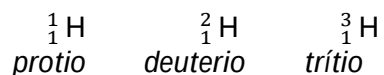
Los isótopos de un elemento químico se representan por el símbolo del elemento precedido de un subíndice y un superíndice. El subíndice representa al nº atómico y el superíndice al nº másico:

$$\begin{matrix} n^{\circ} \text{ másico (A)} \\ n^{\circ} \text{ atómico (Z)} \end{matrix} \text{ Símbolo del elemento} \quad {}^A_ZX$$

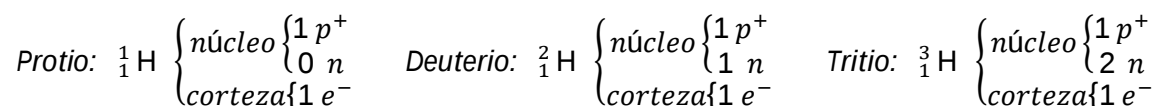
También se puede representar mediante el símbolo del elemento seguido de un guión y el nº másico:

$$\text{Símbolo del elemento-A}$$

Por ejemplo, el hidrógeno tiene tres isótopos, es decir, hay tres tipos de átomos de hidrógeno y son:



La composición de un átomo de cada uno de estos isótopos es:



Hay que recordar que la masa atómica de un elemento químico no es la masa de un átomo de ese elemento químico, sino que es la masa media ponderada de las masas de sus distintos isótopos. Ponderada significa que en la media hay que tener en cuenta la abundancia relativa de sus distintos isótopos.

Llamamos **núclido** a un conjunto de átomos todos iguales entre sí, es decir, a un conjunto de átomos del mismo isótopo.

### OBSERVACIÓN:

No confundir núclido con núcleo o con nucleón.

Un núclido se representa por  ${}^A_ZX$ , donde X es el símbolo del elemento químico al que pertenece. Cada núclido pertenece a un *isótopo* del correspondiente elemento. Los isótopos de un mismo elemento difieren sólo en el valor de A.

## 2. DEFECTO DE MASA NUCLEAR, ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR, INTERACCIÓN NUCLEAR FUERTE, ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR POR NUCLEÓN Y ESTABILIDAD NUCLEAR.

### 2.1 Defecto de masa nuclear

Es un hecho comprobado experimentalmente que cuando se mide con precisión la masa del núcleo de un átomo cualquiera, esta resulta ser siempre inferior a la suma de las masas de las partículas que lo constituyen (nucleones). Es decir, cuando los protones y neutrones se unen para formar el núcleo se produce una pérdida de masa.

A esta disminución de masa se le denomina defecto de masa nuclear, y se calcula:

Defecto de masa nuclear = masa de los nucleones – masa del núcleo > 0

Defecto de masa nuclear = (masa de los protones + masa de los neutrones) – masa del núcleo > 0

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M_N > 0 \quad [9.1]$$

### 2.2 ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR

Esta masa que se pierde al formarse el núcleo es la masa que se convierte en energía y que se libera al formarse el núcleo. Esta energía la podemos calcular mediante la ecuación de Einstein de la equivalencia entre la masa y la energía, y que es:

$$E = m \cdot c^2$$

Según la ecuación anterior, la energía que se libera al formarse un núcleo es:

$$E = \Delta m \cdot c^2 \quad [9.2]$$

Esta energía representa también a la mínima energía que habría que suministrar al núcleo para descomponerlo en sus nucleones y por tanto, a esta energía se le denomina **energía de enlace nuclear o energía de enlace del núcleo**.

### 2.3 FUERZA NUCLEAR FUERTE

¿Cómo puede explicarse la estabilidad del núcleo? La estabilidad del núcleo no puede explicarse, ni mediante fuerzas gravitatorias, ni mediante fuerzas eléctricas. En efecto, la fuerte repulsión eléctrica entre los protones frente a la débil atracción gravitatoria produciría una desintegración del núcleo.

El hecho de que en el núcleo convivan protones y neutrones sugiere que debe de existir entre ellos otro tipo de interacción, que es de atracción y mucho más intensa que la de repulsión eléctrica entre los protones. A esta fuerza se le denomina **fuerza nuclear fuerte o interacción nuclear fuerte**.

La fuerza nuclear fuerte presenta las siguientes características:

- Es la responsable de la cohesión del núcleo.
- Es una fuerza atractiva que se manifiesta entre los nucleones con independencia de su carga eléctrica.
- Es una fuerza muy intensa ya que debe de vencer a la fuerte repulsión electrostática entre los protones.
- Es de muy corto alcance ya que sólo se manifiesta a distancias inferiores al tamaño del núcleo ( $10^{-15}$  m).
- Aunque es una fuerza de atracción, cuando la separación entre los nucleones es mucho menor a su alcance, se convierte en una fuerza de repulsión para impedir el colapso entre los nucleones.
- Es una fuerza conservativa, y por tanto tiene asociada una energía potencial que es la energía de enlace nuclear.

## 2.4 ENERGÍA DE ENLACE NUCLEAR POR NUCLEÓN Y ESTABILIDAD NUCLEAR

Un núcleo es tanto más estable cuanto más dificultad presente a perder nucleones. Por tanto, una forma cuantitativa de medir la estabilidad de un núcleo es conocer la energía necesaria para extraer un nucleón del mismo, la cual se conoce como **energía de enlace nuclear por nucleón**.

La energía de enlace nuclear por nucleón se define como es el cociente entre la energía de enlace nuclear y el número másico:

$$\text{Energía de enlace nuclear por nucleón} = \frac{\text{Energía de enlace nuclear}}{n^{\circ} \text{ másico}}$$

$$\boxed{\text{Energía de enlace nuclear por nucleón} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A}} \quad [9.3]$$

La energía de enlace nuclear por nucleón representa la energía media liberada por cada nucleón incorporado al núcleo, o lo que lo mismo, la energía media mínima que habría que suministrar al núcleo para extraerle un nucleón.

Experimentalmente se ha comprobado que la energía de enlace por nucleón varía con el número másico según la curva de la figura 9.1.

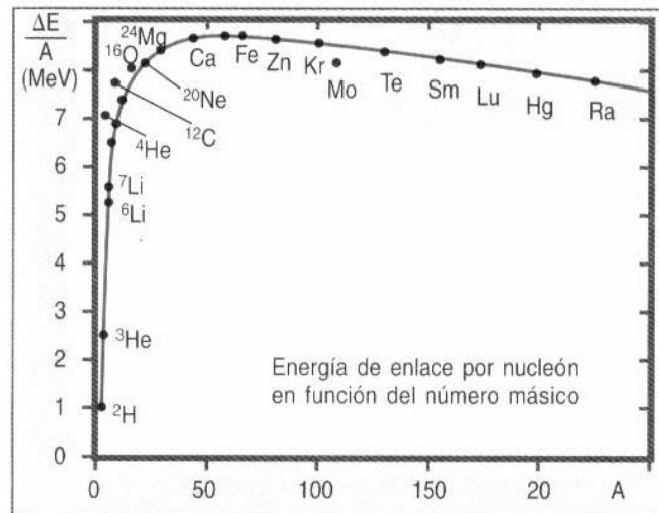


Figura 9.1

Energía de enlace nuclear por nucleón en función del nº másico (en MeV/nucleón)

En la gráfica anterior podemos observar lo siguiente:

1º. La energía de enlace nuclear por nucleón no supera los 9 MeV/nucleón.

2º. La energía de enlace nuclear por nucleón es máxima para aquellos isótopos cuyos números másicos están comprendidos entre 40 y 80 aproximadamente y, por tanto, estos núcleos son los más estables.

3º. Si tomamos dos núcleos ligeros y los unimos para formar un solo núcleo, este, según la gráfica, tendrá mayor energía de enlace por nucleón que los dos iniciales y, por tanto, en el proceso se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fusión nuclear**.

4º. Si tomamos un núcleo pesado y lo dividimos en dos más ligeros, estos dos, según la gráfica, tendrán más energía de enlace por nucleón que el inicial y, por tanto, en el proceso también se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fisión nuclear**.

Otro factor que colabora en estabilizar a un núcleo es el número de neutrones. En los núcleos ligeros se observa que el número de neutrones es aproximadamente igual al número de protones:  $Z = A - Z$  (figura 9.2). Sin embargo, en los núcleos más pesados, el número de neutrones se hace mayor:  $A - Z > Z$  para compensar la mayor repulsión electrostática.

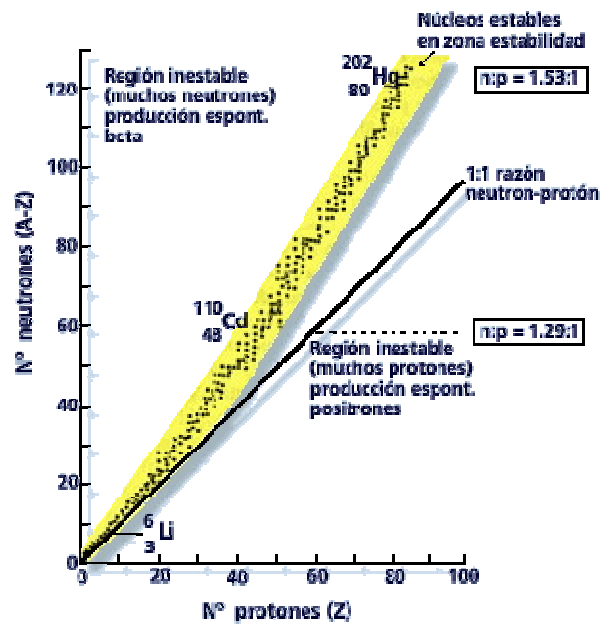


Figura 9.2

**Ejemplo 1º**

Para el isótopo  $^{24}_{12}\text{Mn}$  calcula:

- El defecto de masa nuclear del Mn-24 e interpreta el resultado obtenido.
- La energía de enlace nuclear del Mn-24 e interpreta el resultado.
- La energía de enlace nuclear por nucleón del Mn-24 e interpreta el resultado.
- Calcula la energía mínima que habría que aportar a 10 g de Mn-24 para descomponer a todos sus núcleos.
- ¿Qué núcleo es más estable, el Mn-24 o el Mn-25?

Datos:  $m_{p^+} = 1,0073 \text{ u}$      $m_n = 1,0087 \text{ u}$      $^{24}_{12}\text{Mn} = 23,9850 \text{ u}$      $^{25}_{12}\text{Mn} = 24,9858 \text{ u}$      $1 \text{ u} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

### 3. RADIATIVIDAD: DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS ALFA, BETA Y GAMMA

Una propiedad fundamental de los núcleos atómicos es que algunos son estables, mientras que otros no lo son. Los núcleos inestables se transforman en otros emitiendo espontáneamente partículas y radiaciones características.

**Se denomina radiactividad** a la transformación espontánea de los núcleos de los isótopos inestables en isótopos de otro o de ese mismo elemento acompañada de la emisión de ciertas partículas y/o de energía en forma de radiación. La radiactividad natural es la que tiene lugar en los isótopos inestables existentes en la naturaleza. La radiactividad artificial es la que se produce en los isótopos inestables que aparecen en las reacciones nucleares efectuadas por el hombre.

La radiactividad fue descubierta en 1896 por el físico francés A. H. Becquerel (1852-1908). Becquerel observó que unas placas fotográficas que había guardado en un cajón envueltas en papel oscuro estaban veladas. En el mismo cajón había guardado un trozo de mineral de uranio. Becquerel comprobó que lo sucedido se debía a que el uranio emitía una radiación mucho más penetrante que los rayos X. Acababan de descubrir la *radiactividad*, nombre propuesto por Marie Curie (1867-1934) para dicho fenómeno.

Al poco tiempo de descubrirse la radiactividad del uranio, se descubrieron nuevos elementos radiactivos: torio, polonio, radio y actinio. En la actualidad se conocen más de cuarenta elementos radiactivos.

Rutherford, a principios del siglo XX, sometió a la radiación emitida por los núcleos radiactivos a campos electromagnéticos y comprobó que no todas las radiaciones emitidas eran iguales. Fundamentalmente existen tres tipos de radiaciones: **la radiación alfa, la beta y la gamma**. Como veremos a continuación, las dos primeras radiaciones realmente son partículas, mientras que la tercera es energía en forma de oem (figura 9.3).

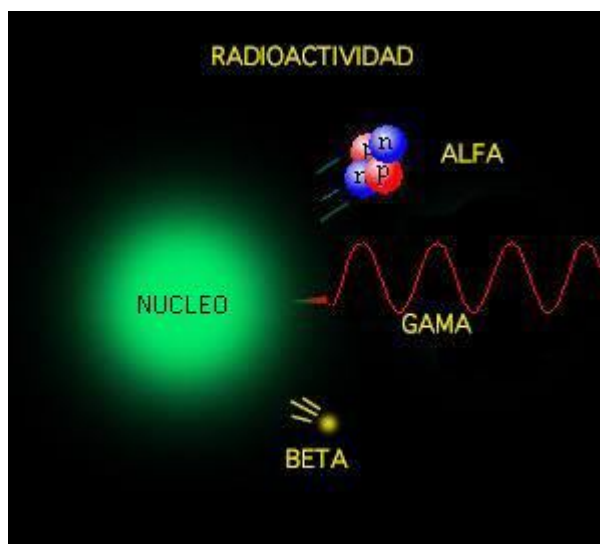


Figura 9.3

## • Radiación alfa

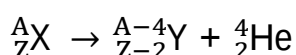
La radiación  $\alpha$  es un proceso en el que un núcleo radiactivo emite un núcleo de He-4, es decir, emite dos protones y dos neutrones.

Las características de una partícula  $\alpha$ , que denotaremos como  ${}^4_2\alpha$ , son:

$$\begin{aligned}\text{Carga eléctrica: } q_\alpha &= +2 \cdot q_{p^+} = 2 \cdot e = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = +3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \text{Masa: } m_\alpha &= 2m_{p^+} = 6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}\end{aligned}$$

Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula alfa, el núcleo resultante disminuye su  $n^\circ$  atómico en dos unidades y su  $n^\circ$  másico en cuatro unidades. A esto se le llama la **ley de Soddy**.

La emisión de una partícula  $\alpha$  por un núcleo radiactivo se puede representar mediante la siguiente expresión:



Como podemos fácilmente apreciar, después de una emisión  $\alpha$ , el núcleo resultante pertenece a un isótopo del elemento que ocupa dos posiciones anteriores en la tabla periódica respecto al núcleo radiactivo inicial.

La emisión de partículas  $\alpha$  es característica de los núcleos pesados y son emitidas con una energía cinética del orden del MeV. Esto supone que las partículas  $\alpha$  tienen un pequeño poder de penetración en la materia y, de hecho, pueden ser detenidas por una lámina de cartón y no pueden atravesar la piel del cuerpo humano. Estas partículas no son perjudiciales.

## Radiación beta

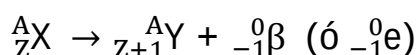
Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula  $\beta$ , en realidad lo que está emitiendo es un electrón rápido. El electrón que emite el núcleo procede de un neutrón ( ${}^1_0n$ ) del núcleo que se desintegra, dando lugar a un protón ( ${}^1_1p$ ) y a un electrón ( ${}^0_{-1}e = {}^0_{-1}\beta$ ), que es el que emite.

Las características de una partícula  $\beta$ , que denotaremos  ${}^0_{-1}\beta$ , son las de un electrón:

$$\begin{aligned}\text{Carga eléctrica: } q &= -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \text{Masa: } m &= 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}\end{aligned}$$

Cuando un núcleo radiactivo emite una partícula  $\beta$ , el núcleo resultante aumenta su  $n^\circ$  atómico en una unidad pero no varía el  $n^\circ$  másico. A esto se conoce con el nombre de **ley de Fajans**.

La emisión de una partícula  $\beta$  por parte de un núcleo radiactivo se puede representar mediante la siguiente expresión:



Como puede apreciarse, el núcleo resultante pertenece a un isótopo del elemento siguiente en la tabla periódica.

Su energía cinética es del orden del MeV, pero como su masa es mucho más pequeña que las de las partículas  $\alpha$ , tienen un mayor poder de penetración en la materia. Pueden atravesar el cuerpo humano, siendo detenidas por chapas metálicas delgadas. No son perjudiciales para la salud.

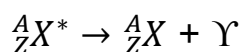
- **Radiación gamma**

Cuando un núcleo radiactivo emite radiación  $\gamma$ , está emitiendo energía en forma de ondas electromagnéticas de mayor frecuencia que los rayos X. Por tanto, carecen tanto de carga eléctrica como de masa.

La explicación de esta emisión se basa en que los núcleos, igual que los átomos, pueden estar en estados energéticos definidos, de modo que si un núcleo está en un estado energético por encima de su estado fundamental (estado excitado), emite la diferencia de energía entre ambos estados en forma de radiación  $\gamma$ .

Como podemos apreciar, cuando un núcleo radiactivo emite radiación  $\gamma$ , el núcleo no se transforma en otro núcleo diferente, sino que sigue siendo el mismo isótopo pero en un estado de energía inferior, es decir, es energéticamente más estable (recordemos que cuando un núcleo radiactivo emite una partícula  $\alpha$  ó  $\beta$ , sí se produce una verdadera transmutación nuclear).

La emisión de radiación  $\gamma$  por parte de un núcleo radiactivo se puede representar mediante la siguiente ecuación:

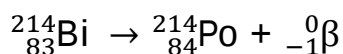
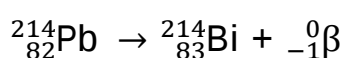
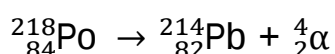
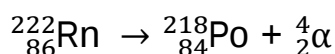
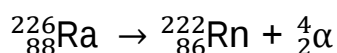


La radiación  $\gamma$  es de alta energía (como dijimos en la última pregunta del tema 7), entre el keV y el MeV, pudiendo atravesar el cuerpo humano y gruesas chapas metálicas, siendo detenidas por una gruesa pared de hormigón. En la naturaleza existe esta radiación a la que nuestro organismo se ha adaptado, pero un aumento de la densidad de esta radiación junto con una exposición prolongada a ella causa graves perjuicios en los seres vivos.

Para finalizar, hay que destacar que generalmente un núcleo radiactivo no emite un solo tipo de radiación, sino que puede emitir sucesivamente varias partículas  $\alpha$  y/o varias partículas  $\beta$  y/o varias radiaciones  $\gamma$ , es decir, tienen lugar varias desintegraciones sucesivas hasta que el núcleo final es estable. El conjunto de todos los isótopos que forman parte del proceso constituye una **serie o familia radiactiva**.

### **Ejemplo 3º**

El radio  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$  emite sucesivamente 3 partículas  $\alpha$  y dos partículas  $\beta$ . Escriben las correspondientes ecuaciones que representan dichas emisiones.



#### 4. LEY DE DESINTEGRACIÓN RADIATIVA: PERIODO DE SEMIDESINTEGRACIÓN RADIATIVA, VIDA MEDIA Y ACTIVIDAD

Cuando un núcleo atómico emite radiación  $\alpha$ ,  $\beta$  ó  $\gamma$ , el núcleo cambia de estado o bien se transforma (transmuta) en otro distinto. En este último caso se dice que ha tenido lugar una **desintegración radiactiva**. Debido al gran nº de núcleos existentes en cualquier muestra radiactiva, la desintegración radiactiva es un **proceso aleatorio** gobernado por leyes estadísticas.

Experimentalmente se sabe que la desintegración radiactiva sigue la siguiente ley de decrecimiento exponencial:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad [9.4]$$

Siendo:

$N_0$  al número de núcleos radiactivos iniciales.

$N$  al nº de núcleos radiactivos que aún no se han desintegrado transcurrido un tiempo  $t$ .

$\lambda$  una constante característica de cada isótopo radiactivo denominada **CONSTANTE DE DESINTEGRACIÓN RADIATIVA** que se mediría en unidades de tiempo elevadas a  $-1$ , es decir, en el SI de unidades se mediría en  $s^{-1}$ .

Como puede observarse, la el ritmo de desintegración de los núcleos radiactivos presentes en la muestra será mayor cuanto más elevado sea el valor de  $\lambda$ .

En la figura 9.4 se muestra la representación gráfica correspondiente a la ley de desintegración radiactiva.

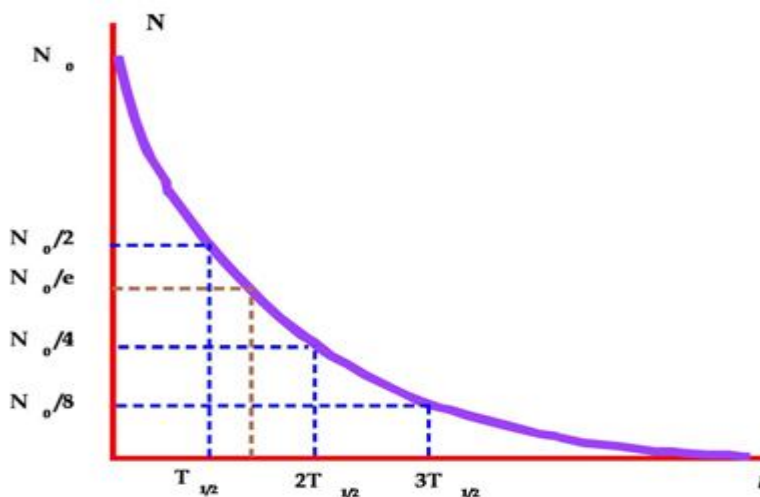


Figura 9.4  
Ley de desintegración radiactiva

Se denomina **periodo de desintegración radiactiva o semivida** al tiempo que ha de transcurrir para que se desintegren la mitad de los núcleos radiactivos iniciales, es decir, para que en la muestra sólo quede el 50% de los núcleos radiactivos iniciales.

El periodo de desintegración radiactiva lo podemos calcular del siguiente modo:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-\lambda \cdot T_{1/2}})$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda \cdot T_{1/2} \cdot \ln(e) \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda \cdot T_{1/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}} \quad [9.5]$$

No hay que confundir el periodo de desintegración radiactiva de un núclido con la vida media de dicho núclido. **La vida media** de un isótopo radiactivo es el tiempo medio que tarda un núcleo al azar en desintegrarse. Su unidad en el S.I. es el segundo (s) y viene dada por la expresión:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}} \quad [9.6]$$

Se llama **actividad (A) o velocidad de desintegración** de una muestra radiactiva a la rapidez con la que dicha muestra radiactiva se desintegra por unidad de tiempo, es decir, al número de emisiones o desintegraciones de una sustancia radiactiva por unidad de tiempo. La actividad de una muestra radiactiva se calcula multiplicando la constante de desintegración radiactiva ( $\lambda$ ) por el nº de núcleos radiactivos (N) presentes en la muestra en cada instante.

$$\boxed{A = \lambda \cdot N} \quad [9.7]$$

Démonos cuenta de que la actividad decrece exponencialmente con el tiempo ya que, el nº de núcleos radiactivos (N) presentes en la muestra, así lo hace.

En el S.I. la actividad se mide desintegraciones dividido por segundo y, a esta unidad, se le da un nombre especial, es el *becquerel* (Bq).

Otra unidad para la actividad es el curie (Ci):

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

### IMPORTANTE:

La ley de desintegración radiactiva descrita en la ecuación 9.4, también puede escribirse en términos de masa:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

siendo  $m_0$  la masa inicial de la muestra radiactiva y  $m$  la masa de los núcleos que aún no se han desintegrado en un cierto tiempo  $t$ .

La actividad sigue también la misma ley de decrecimiento exponencial:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

siendo  $A_0$  la actividad inicial de la muestra radiactiva y  $A$  la actividad al cabo de un cierto tiempo  $t$ .

**Ejemplo 4º**

Disponemos de una muestra radiactiva de 80 mg de  $^{222}\text{Rn}$  que tiene una constante de desintegración radiactiva de  $0,182 \text{ días}^{-1}$ . Calcula:

- a) La masa que quedará sin desintegrar al cabo de una semana.
- b) El periodo de semidesintegración radiactiva. ¿Qué indica este valor?
- c) La vida media del radón.
- d) El tiempo que debe de transcurrir para que queden 5 mg.
- e) La actividad de la muestra al cabo de dos semanas.

**Ejemplo 5º**

En una excavación arqueológica se ha encontrado una herramienta de madera de roble. Sometida a la prueba del C-14 se observa que presenta una actividad de 100 desintegraciones/h, mientras que una muestra de madera de roble actual presenta una actividad de 600 desintegraciones/h. Sabiendo que el periodo de semidesintegración del C-14 es de 5730 años, calcula la antigüedad de la herramienta.

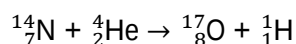
**Ejemplo 6º**

La actividad del isótopo  $^{14}\text{C}$  contenido en la madera de un sarcófago resulta ser el 60% de la que tiene la madera actual. Data la antigüedad del sarcófago-

## 5. REACCIONES NUCLEARES

Las **reacciones nucleares** son procesos en los que intervienen directamente los núcleos atómicos transformándose en otros distintos.

En 1919 Rutherford bombardeó núcleos de nitrógeno con partículas  $\alpha$  y observó cómo estas partículas eran absorbidas por el núcleo y que se transformaba en otro distinto emitiendo un protón. Fue la primera reacción nuclear provocada por el ser humano:



En toda reacción nuclear se cumplen los siguientes principios de conservación:

- **Conservación de la carga eléctrica:** Significa que la suma de los números atómicos es constante, es decir, dicha suma ha de coincidir en reactivos y productos.
- **Conservación del número de nucleones:** Significa que la suma de los números másicos es constante, es decir, dicha suma ha de coincidir en reactivos y productos.
- **Conservación de la energía y de la masa equivalente:** Significa que la energía,  $E$ , puesta en juego en la reacción tiene su origen en la diferencia de masa,  $\Delta m$ , que se produce entre los reactivos y los productos. El valor de dicha energía viene dado por el principio de equivalencia entre la energía y la masa de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

donde:

$$\Delta m = \sum m_{\text{reactivos}} - \sum m_{\text{productos}}$$

representa el defecto de masa de los productos con respecto a los reactivos.

Por tanto:

9.5 Si  $\Delta m > 0$ ,  $E > 0$  y la reacción será exoenergética, es decir, desprende energía (es la situación más común).

9.6 Si  $\Delta m < 0$ ,  $E < 0$  y la reacción será endoenergética, es decir, absorbe energía.

Las reacciones nucleares más comunes son las reacciones de **fisión** y las de **fusión**.

## 6. FISIÓN Y FUSIÓN NUCLEARES

Recordemos que la energía de enlace nuclear por nucleón es un buen indicador para comparar la estabilidad entre los núcleos. Además vimos que la energía de enlace por nucleón varía con el número másico según la curva de la figura 9.1.

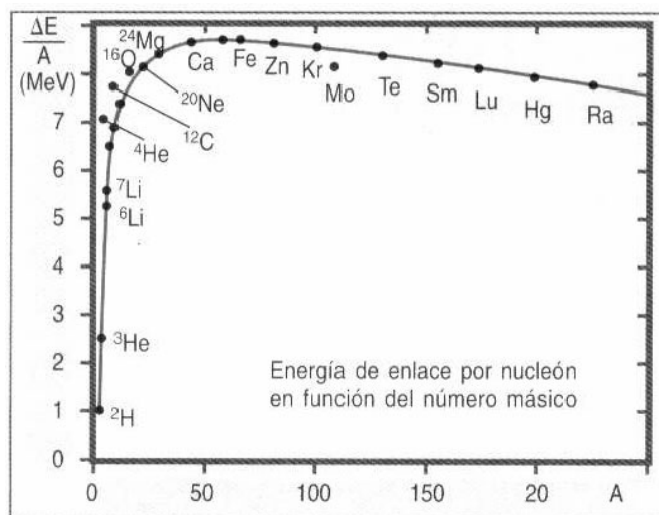


Figura 9.1

Entre otras cosas podía deducirse que:

1º. Si tomamos dos núcleos ligeros y los unimos para formar un solo núcleo, este, según la gráfica, tendrá mayor energía de enlace por nucleón que los dos iniciales y, por tanto, en el proceso se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fusión nuclear**.

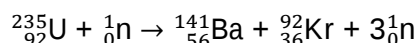
2º. Si tomamos un núcleo pesado y lo dividimos en dos más ligeros, estos dos, según la gráfica, tendrán más energía de enlace por nucleón que el inicial y, por tanto, en el proceso también se habrá liberado energía. A este proceso se le denomina **fisión nuclear**.

### Fisión nuclear

La **fisión nuclear** es una reacción nuclear que consiste en la división de un núcleo pesado en otros dos más ligeros al ser bombardeado con neutrones. En el proceso se liberan más neutrones y gran cantidad de energía.

La fisión nuclear es una reacción exoenergética dado que los productos son núcleos más ligeros y, según la curva de la figura 9.1, energéticamente más estables que el núcleo original; así pues, dicha reacción presenta un defecto de masa positivo. Por otro lado, el uso de neutrones, se debe fundamentalmente, al hecho de que carecen de carga eléctrica, evitándose la posible repulsión electrostática por parte del núcleo a fisionar al acercarse a éste.

En 1938, los físicos alemanes Hahn y Strassmann consiguieron dividir un núcleo de uranio-235 según la reacción:



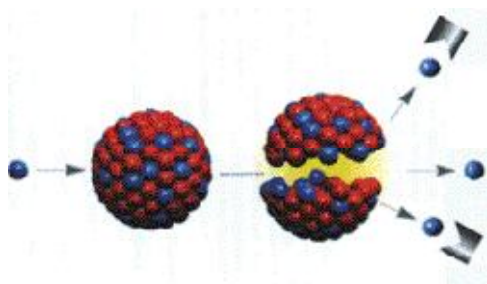


Figura 9.4  
Fisión nuclear

Los productos de esta reacción nuclear presentan un defecto de masa de 0,2154 u por núcleo de uranio fisionado, que corresponde a una energía liberada de unos 200 MeV por núcleo de uranio-235.

A pesar de que el uranio-235 es energéticamente menos estable que sus productos de fisión, no se fisiona de forma espontánea. Es necesaria una **energía de activación** que se obtiene de la captura de un neutrón por el núcleo.

Los núcleos más adecuados para la fisión son los de elevada masa atómica, como son el uranio-235 y el plutonio-239.

Los neutrones liberados por la fisión de un núcleo pueden fisionar otros núcleos dando lugar a una **reacción nuclear en cadena**. La primera de éstas la produjo Fermi en 1942 y pueden ser de dos tipos:

- **Controlada:** si el exceso de neutrones liberados son absorbidos por un material específico (barras de plomo); se produce en centrales nucleares y en generadores auxiliares de submarinos y cohetes.
- **No controlada:** si no existe ningún elemento controlador que absorba los neutrones en exceso, por lo que la reacción tiene lugar de forma explosiva; se produce en las bombas atómicas.

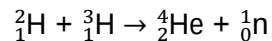
La fisión nuclear tiene un elevado rendimiento energético: con 1 kg de uranio se obtiene la misma cantidad de energía que con 2000 toneladas de petróleo. Sin embargo, presenta el riesgo de contaminación radiactiva y la dificultad de eliminar de forma rápida y segura los residuos.

### Fusión nuclear

La **fusión nuclear** es una reacción nuclear en la que dos núcleos ligeros se unen para formar otro más pesado. En el proceso se libera gran cantidad de energía.

La fusión nuclear es una reacción exoenergética dado que los productos son núcleos más pesados y, según la curva de la figura 9.1, energéticamente más estables que el núcleo original; así pues, dicha reacción presenta un defecto de masa positivo.

Un ejemplo de reacción de fusión lo constituye la unión del deuterio y el tritio (isótopos del hidrógeno) para formar helio-4:



En esta reacción los productos presentan un defecto de masa de 0.0189 u, que corresponde a una energía liberada de 17,6 MeV por átomo de helio-4.

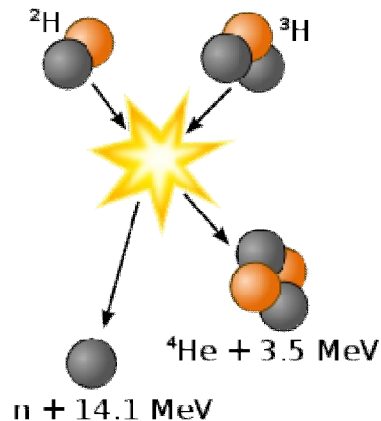


Figura 9.5  
Fusión nuclear

Tal como sucede en la fisión, para iniciar un proceso de fusión nuclear es necesaria una **energía de activación**. En este caso, la energía necesaria para que los núcleos se unan venciendo las repulsiones electrostáticas es proporcionada por una energía térmica muy elevada, correspondiente a temperaturas superiores a  $10^6$  K. A estas temperaturas, los átomos se ionizan y se crea el estado de **plasma**, formado por una “sopa” de núcleos y electrones.

Los núcleos de pequeña masa atómica, como los isótopos del hidrógeno, son los más adecuados para producir la fusión nuclear.

Las reacciones de fusión (también llamadas termonucleares) tienen lugar de forma natural en el Sol y las estrellas, gracias a las altas temperaturas de su interior. De forma artificial, el ser humano ha conseguido la fusión en cadena de forma explosiva, que puede ser:

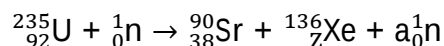
- **Controlada:** aún no se ha conseguido de forma rentable debido a la dificultad técnica que supone confinar y mantener el plasma estable durante el tiempo suficiente; actualmente hay varios proyectos relacionados con la fusión nuclear controlada como el europeo ITER.
- **No controlada:** se produce en la bomba de hidrógeno (bomba H); la energía para inicial la fusión se obtiene de la explosión de una bomba atómica de fisión.

La fusión controlada presenta múltiples ventajas frente a la fisión:

- Existen grandes reservas de combustible ya que los isótopos del hidrógeno se obtiene de los océanos.
- Se obtiene una energía más de tres veces mayor que en la fisión.
- No se producen residuos contaminantes.

**Ejemplo 7º**

En un reactor de fisión nuclear tiene lugar la reacción de nuclear siguiente:



- Descubre el nº atómico del Xe y el nº de neutrones liberados en cada núcleo de uranio-235 fisionado indicando las leyes de conservación que utilizas para ello.
- Comprueba que es una reacción exoenergética.
- ¿Qué energía se libera cuando se fisiona un núcleo de uranio-235?
- Calcula la energía que se liberaría al fisionar 1 g de uranio-235.
- Calcula la masa de uranio-235 que se consumiría por hora en una central nuclear de 800 Mw.

Datos:  $m({}^{235}\text{U}) = 235,043944 \text{ u}$      $m({}^{90}\text{Sr}) = 89,907167 \text{ u}$      $m({}^{136}\text{Xe}) = 135,907294 \text{ u}$

$m_n = 1,008665 \text{ u}$

$1 \text{ u} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

**Ejemplo 8º**

El proyecto europeo ITER (Reactor Termonuclear Experimental Internacional) fue puesto en marcha en 1988 y, aunque el organismo europeo tiene su sede en Barcelona, sus instalaciones experimentales están en Cadarache (Francia), investiga la fusión de deuterio y tritio para dar Helio-4.

- Escribe la reacción nuclear correspondiente
- Comprueba que es una reacción exoenergética.
- Calcula la energía liberada por cada núcleo de helio formado.

Masas nucleares: deuterio = 2,0136 u; tritio = 3,0155 u; helio-4 = 4,0015 u; neutrón = 1,0087 u

## 7. PRINCIPALES INTERACCIONES EN LA NATURALEZA

Todas las fuerzas conocidas hasta ahora en la naturaleza se han podido unificar en cuatro grupos:

- o Interacción gravitatoria
- o Interacción electromagnética
- o Interacción nuclear fuerte
- o Interacción nuclear débil

Las principales características de cada una de estas interacciones son:

### Interacción gravitatoria

La fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas viene dada por la **ley de gravitación universal** que dice:

*“La fuerza con que se atraen dos masa puntuales ( $M$  y  $m$ ) separadas por una distancia  $r$  es directamente proporcional a los valores de dichas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”*

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (\text{vector fuerza}) \qquad F = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \quad (\text{módulo del vector fuerza})$$

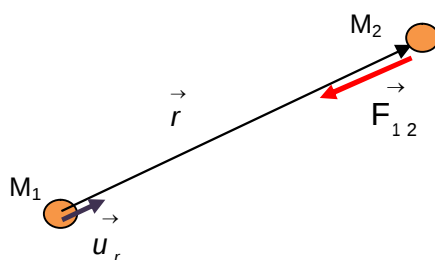
Donde:

**$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$**  es la llamada constante de gravitación universal

**“ $r$ ”** es módulo del vector  $\vec{r}$  (que es la distancia que separa a las dos masas que interaccionan)

El vector  $\vec{r}$  es el vector que va de la masa fuente a la masa testigo

Y  $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector  $\vec{r}$  y por tanto un vector unitario dirigido de la masa fuente a la masa testigo (fig. 1.2).



Las principales características de la fuerza gravitatoria son:

- o Es una fuerza universal ya que se debe a la masa de los cuerpos.
- o Es una fuerza de atracción.
- o Es una fuerza central porque su dirección coincide con la dirección de la recta que une las dos masas que interaccionan.
- o La fuerza gravitatoria es una fuerza de largo alcance porque se manifiesta tanto a cortas distancias como a largas distancias.

- o La atracción gravitatoria entre dos masas también es independiente del medio en el que se encuentren puesto que  $G$  es una constante universal, es decir, su valor no depende del medio en el que se encuentren las masas que interaccionan.
- o Debido al pequeño valor de  $G$  la fuerza de atracción gravitatoria entre dos masas sólo es apreciable en el caso en que al menos una de las dos masas sea de valor elevado.
- o Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las masas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.

### Interacción electromagnética

Es la fuerza de interacción entre cuerpos cargados eléctricamente. Habría que distinguir entre la fuerza electrostática y la fuerza magnética.

La fuerza electrostática se manifiesta tanto si las cargas que interaccionan están en reposo o en movimiento. La fuerza magnética entre cargas sólo se manifiesta si estas están en movimiento.

La fuerza electrostática viene dada por **la Ley de Coulomb**, que dice:

*“La fuerza con que se atraen o se repelen dos cuerpos cargados es directamente proporcional al producto de dichas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”.*

$$\vec{F} = K \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{vector fuerza electrostática} \quad F = K \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} \quad \text{módulo del vector}$$

Donde:

$K$  es la llamada constante eléctrica.

“ $r$ ” es módulo del vector  $\vec{r}$  (que es la distancia que separa a las dos cargas que interaccionan)

El vector  $\vec{r}$  es el vector que va de la carga fuente a la carga testigo

Y  $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  es un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector  $\vec{r}$  y por tanto un vector unitario dirigido de la carga fuente a la carga testigo.

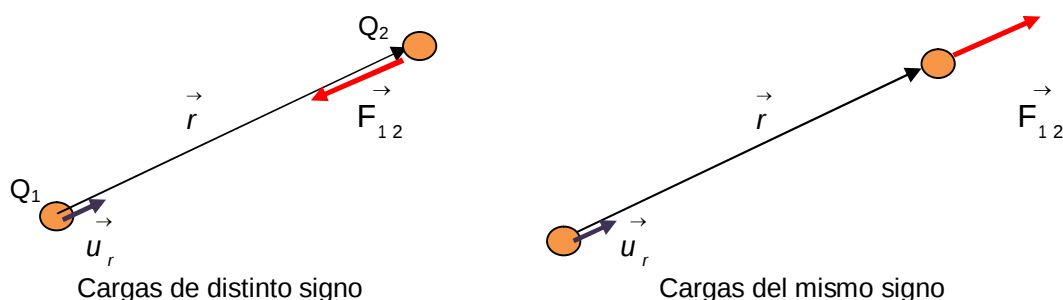


Figura 3.9

La fuerza electrostática tiene las siguientes características:

- o No es una fuerza universal ya que se da sólo entre cuerpos cargados.

- o Es una fuerza de atracción (cargas de distinto signo), o de repulsión (cargas del mismo signo).
- o Es una fuerza central porque.....
- o Es una fuerza de largo alcance.
- o La interacción eléctrica entre dos cargas sí depende del medio en el que se encuentran dichas cargas ya que el valor de la constante eléctrica  $K$  no es una constante universal puesto que su valor depende del medio interpuesto entre las cargas que interaccionan.
- o La constante eléctrica es máxima en el vacío y vale aproximadamente:  

$$K(\text{vacío}) = K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$
 Por tanto la interacción eléctrica entre dos cargas es máxima cuando estas están en el vacío, y disminuye cuando se encuentran en un medio material.
- o Es una fuerza cuyo valor disminuye con el cuadrado de la distancia que separa a las cargas que interaccionan (es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), lo que permite demostrar, junto con su carácter central, que se trata de una fuerza conservativa y, por tanto, tendrá asociada una energía potencial.

Si las cargas que interaccionan están en movimiento aparece entre ellas la interacción magnética que tiene las siguientes características:

- o No es una fuerza universal ya que se da sólo entre cuerpos cargados y en movimiento.
- o Puede ser de atracción o de repulsión.
- o No es una fuerza central.
- o Es una fuerza de largo alcance.
- o La interacción magnética también depende del medio en el que se encuentran las cargas que interaccionan. Esta dependencia se establece a través de la denominada permeabilidad magnética  $\mu$ .
- o La permeabilidad magnética  $\mu$  no es máxima en el vacío que vale aproximadamente:  

$$\mu(\text{vacío}) = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ UI}$$
 Por tanto la interacción magnética no es máxima en el vacío. En los medios paramagnéticos la interacción magnética es menor que en el vacío y en los medios diamagnéticos y ferromagnéticos es mayor.
- o Es una fuerza cuyo valor disminuye con la distancia que separa a las cargas que interaccionan, pero no es una fuerza conservativa.

### Interacción nuclear fuerte

La interacción nuclear fuerte es la responsable de la estabilidad de los núcleos y presenta las siguientes características:

- Es la responsable de la cohesión del núcleo.
- Es una fuerza atractiva que se manifiesta entre los nucleones con independencia de su carga eléctrica.
- Es una fuerza muy intensa ya que debe de vencer a la fuerte repulsión electrostática entre los protones.
- Es de muy corto alcance ya que sólo se manifiesta a distancias inferiores al tamaño del núcleo ( $10^{-15} \text{ m}$ ).
- Aunque es una fuerza de atracción, cuando la separación entre los nucleones es mucho menor a su alcance, se convierte en una fuerza de repulsión para impedir el colapso entre los nucleones.
- Es una fuerza conservativa, y por tanto tiene asociada una energía potencial que es la energía de enlace nuclear.

- Su valor depende de la orientación del espín de los nucleones.

### **Interacción nuclear débil**

Es una fuerza de corto alcance puesto que se manifiesta también a nivel nuclear y explica la existencia de núcleos radiactivos que se desintegran emitiendo radiación  $\beta$ . Es una fuerza de poca intensidad.

Las investigaciones en Física Fundamental van encaminadas a conocer cada vez mejor a cada una de estas fuerzas y a la búsqueda de la “Teoría de la gran unificación”, en la que estas cuatro fuerzas pudieran ser descritas mediante una sola ley.

## **TEMA 10. ÓPTICA GEOMÉTRICA**

- 1. Introducción y conceptos básicos**
- 2. Formación de imágenes en espejos planos**
- 3. Formación de imágenes en espejos esféricos cóncavos**
- 4. Formación de imágenes en espejos esféricos convexos**
- 5. Lentes convergentes y divergentes**
- 6. Formación de imágenes en lentes convergentes**
- 7. Formación de imágenes en lentes divergentes**

## 1. INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS BÁSICOS

Los fenómenos ópticos de la reflexión y la refracción pueden ser interpretados si consideramos únicamente que la luz está constituida por rayos rectilíneos que proceden de un foco emisor. Mediante la aproximación de rayos, estos fenómenos, tratados geoméricamente de una forma simplificada que facilita su interpretación, son objeto de estudio de la **óptica geométrica**.

La **óptica geométrica** es la parte de la óptica que estudia la trayectoria de los rayos luminosos a través de espejos y lentes, y la formación de imágenes en estos sistemas ópticos.

Entre los conceptos básicos de la óptica geométrica destacamos:

- **Sistema óptico:** Es un conjunto de superficies que separan medios transparentes, homogéneos e isótropos de diferente índice de refracción.
- **Imagen real de un punto objeto:** Es la imagen formada por un sistema óptico mediante intersección en un punto de los rayos convergentes procedentes del objeto puntual después de atravesar el sistema óptico.
- **Imagen virtual de un punto objeto:** Es la imagen formada mediante intersección en un punto de las prolongaciones de los rayos divergentes formadas después de atravesar el sistema óptico.
- **Imagen de un objeto extenso:** La imagen de un objeto extenso está formada por las imágenes puntuales de cada uno de los puntos del objeto. Puede ser **real** (para verla debe ser registrada en una pantalla) o **virtual** (puede verse directamente y no se puede registrar en una pantalla).
- **Dioptrio:** Es una superficie que separa dos medios transparentes con distinto índice de refracción.

Junto a los conceptos anteriores, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- o Los rayos luminosos son reversibles, es decir, el camino recorrido por un rayo para ir de un punto  $A_1$  a otro  $A_2$  tras atravesar un sistema óptico es el mismo que recorrería para ir de  $A_2$  al  $A_1$  tras atravesar el mismo sistema.
- o Los rayos se dibujan partiendo del punto objeto como si éste fuese el foco luminoso.

## 2. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS PLANOS

Los **espejos** son superficies lisas y pulidas capaces de reflejar los rayos luminosos. Pueden ser **planos** o **esféricos** según como sea la superficie.

Para construir la imagen de un objeto extenso formada por un espejo plano, elegimos los puntos extremos de éste y desde ellos hacemos partir dos rayos:

- o Un rayo perpendicular a la superficie del espejo que se reflejará sin cambiar de dirección.
- o Un rayo que forme determinado ángulo con la normal al espejo que se reflejará con el mismo ángulo.

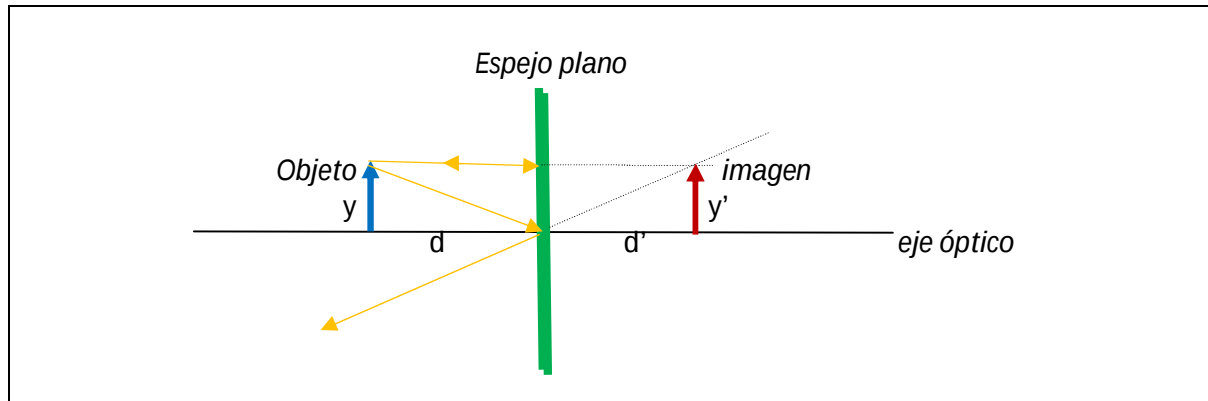


Figura 10.1  
Formación de imágenes en un espejo plano

La imagen que da un espejo plano de un objeto tiene las siguientes características:

- o Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.
- o Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- o La imagen tiene el mismo tamaño que el objeto, es decir,  $y = y'$ .
- o La imagen y el objeto están a la misma distancia del espejo, es decir,  $d = d'$ .

### 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS ESFÉRICOS CÓNCAVOS

Un espejo esférico es **cóncavo**, si la superficie reflectante es la cara interna del espejo.

En los espejos esféricos hemos de tener en cuenta los siguientes elementos:

- **Centro de curvatura, C:** centro de la superficie esférica. Este punto tiene la particularidad de que cualquier rayo que incida sobre el espejo pasando por él, lo hace con un ángulo de incidencia de  $0^\circ$  y por tanto se reflejará en el espejo en la misma dirección pero en sentido contrario.
- **Vértice, O:** vértice de la superficie esférica.
- **Eje óptico:** recta que pasa por el centro de curvatura y por el vértice.
- **Foco, F:** se encuentra en el punto medio entre el centro de curvatura, C, y el vértice, O, es decir, a  $r/2$  del vértice del espejo. La distancia entre O y F se llama **distancia focal f** y su valor es la mitad del radio de curvatura  $r$  del espejo.

La importancia del foco es doble porque:

- 1º. Cualquier rayo que incida sobre el espejo paralelamente al eje óptico, se reflejará pasando por el foco.
- 2º. Cualquier rayo que incida sobre el espejo pasando por el foco, se reflejará paralelamente al eje óptico.

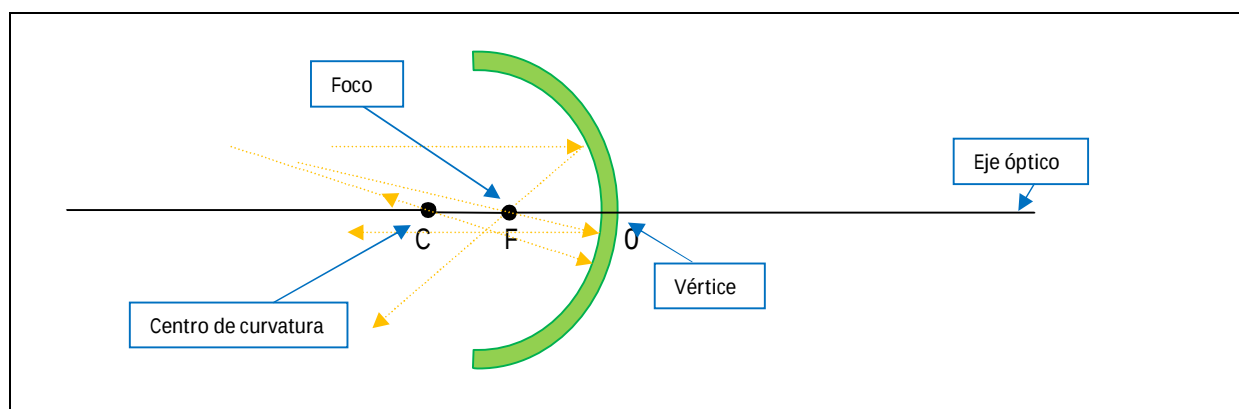


Figura 10.2  
Elementos de un espejo esférico cóncavo

Para construir gráficamente la imagen obtenida en un espejo esférico cóncavo, trazaremos dos de los tres rayos siguientes que parten del extremo superior del objeto:

- o Un rayo que pasa por el centro de curvatura C y que se refleja volviendo por su trayectoria, sin desviarse.
- o Un rayo paralelo al eje y que, por lo tanto, se refleja en la dirección que pasa por el foco F.
- o Un rayo cuya dirección pasa por el foco F y que, por lo tanto, se refleja paralelamente al eje.

Según la posición del objeto con respecto al espejo, se pueden dar cinco casos:

1º. Imagen de un objeto situado a una distancia mayor que el radio de curvatura ( $d > r$ ).

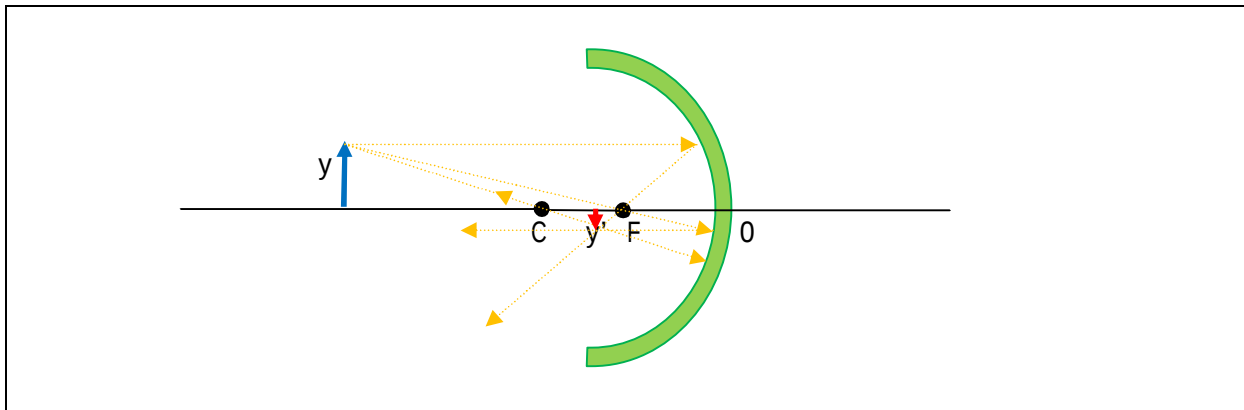


Figura 10.3

Imagen de un objeto situado a una distancia mayor que el radio de curvatura del espejo ( $d > r$ )

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está a una distancia mayor que el radio del espejo tiene las siguientes características:

- o Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos reflejados y no de sus prolongaciones.
- o Es una imagen invertida porque tiene la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- o La imagen tiene menor tamaño que el objeto, es decir,  $y' < y$ .
- o La imagen se forma a menor distancia del espejo de la que está el objeto. es decir,  $d' < d$ .

2º. Imagen de un objeto situado en el centro de curvatura ( $d = r$ ).

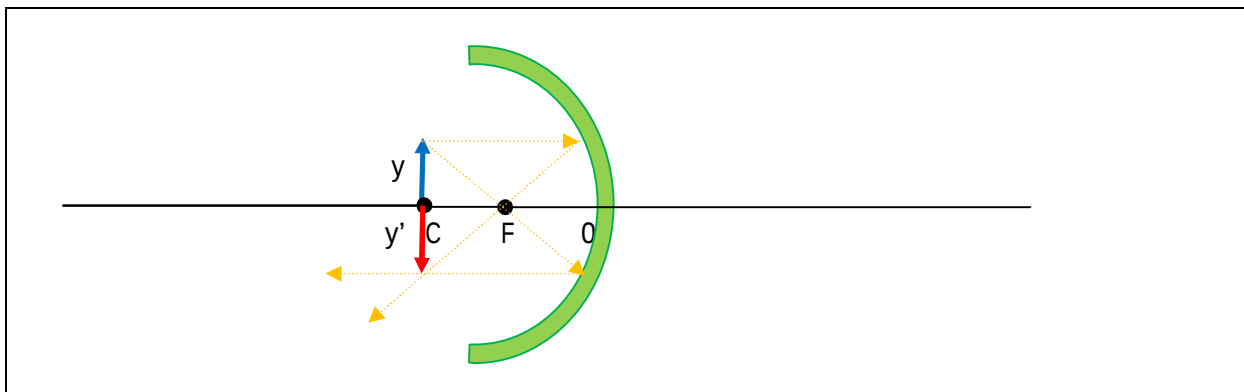


Figura 10.4

Imagen de un objeto situado en el centro de curvatura del espejo ( $d = r$ )

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está a una distancia mayor que el radio del espejo tiene las siguientes características:

- o Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos reflejados y no de sus prolongaciones.
- o Es una imagen invertida porque tiene la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- o La imagen tiene el mismo tamaño que el objeto, es decir,  $y' = y$ .
- o La imagen se forma en el mismo que está el objeto. es decir,  $d' = d$ .

3º. Imagen de un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco ( $f < d < r$ ).

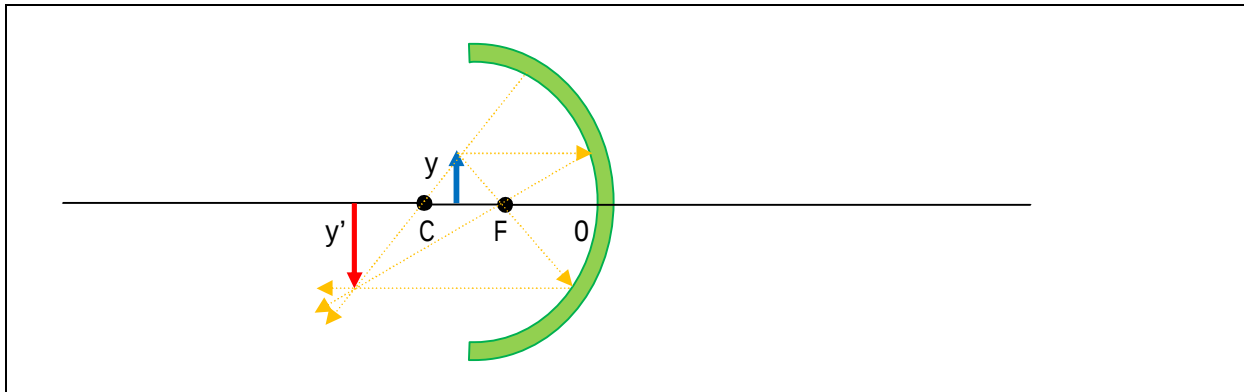


Figura 10.5

Imagen de un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco del espejo ( $f < d < r$ )

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está entre el centro de curvatura y el foco tiene las siguientes características:

- o Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos reflejados y no de sus prolongaciones.
- o Es una imagen invertida porque tiene la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- o La imagen mayor tamaño que el objeto, es decir,  $y' > y$ .
- o La imagen se forma a mayor distancia del espejo de la que está el objeto. es decir,  $d' > d$ .

4º. Imagen de un objeto situado en el foco ( $d = f$ ). **No se forma imagen** o bien se forma a distancia infinita, ya que los rayos reflejados son paralelos y no se cortan.

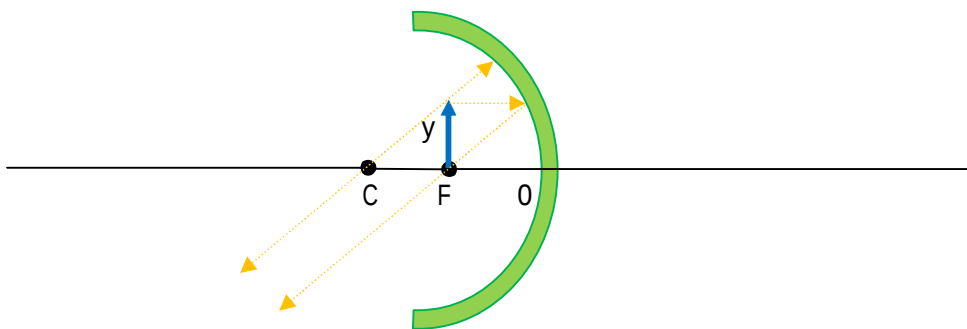


Figura 10.6

Imagen de un objeto situado en el foco del espejo ( $d = f$ )

Si el objeto está en el foco, los rayos reflejados salen paralelos entre sí y no se cortan. No se forma imagen o se dice que la imagen se forma en el infinito.

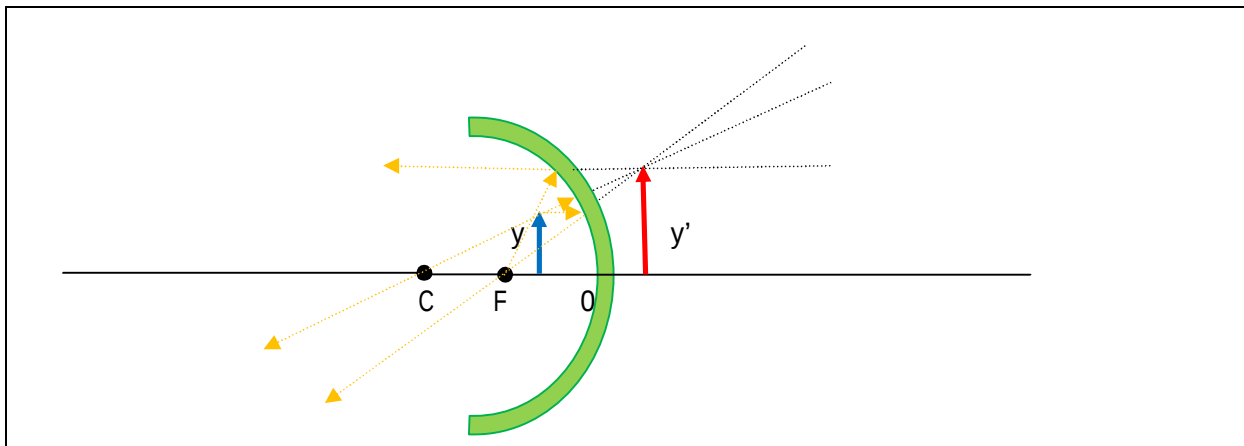
5º. Imagen de un objeto situado entre el foco y el vértice del espejo ( $d < f$ ).

Figura 10.7

Imagen de un objeto situado entre el foco y el vértice del espejo ( $d < f$ )

La imagen que da un espejo esférico cóncavo de un objeto que está situado entre el foco y el vértice del espejo ( $d < f$ ) tiene las siguientes características:

- o Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.
- o Es una imagen derecha porque está orientada en la misma dirección y sentido que el objeto.
- o La imagen tiene mayor tamaño que el objeto, es decir,  $y' > y$ .
- o La imagen se forma a menor distancia del espejo de la que está el objeto. es decir,  $d' < d$ .

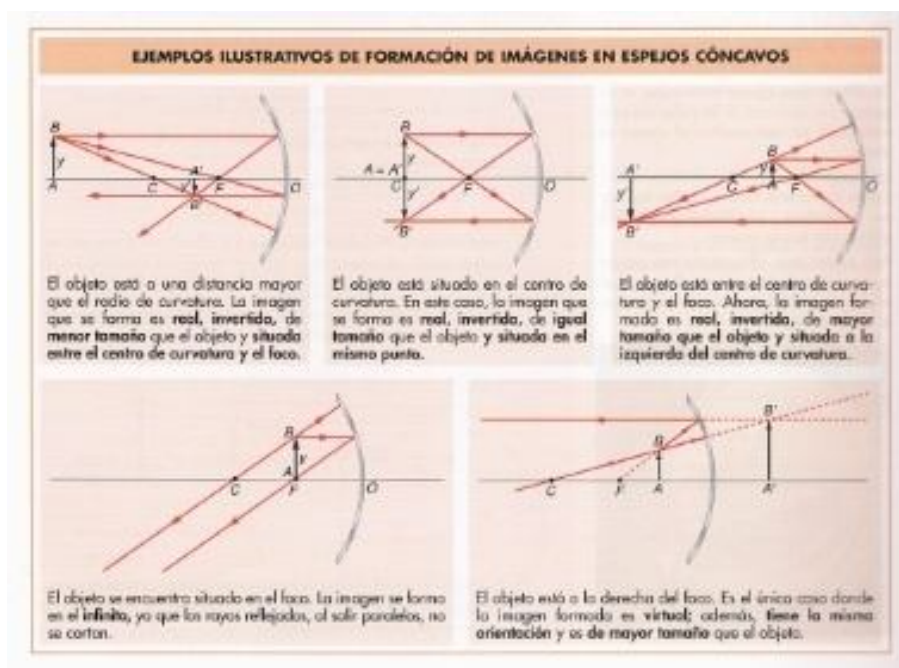


Figura 10.8

Imagen de un objeto situado a diferentes distancias del vértice de un espejo cóncavo

#### 4. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS ESFÉRICOS CONVEXOS

En un espejo convexo el centro de curvatura, C, y el foco, F, están al otro lado de la superficie espejada.

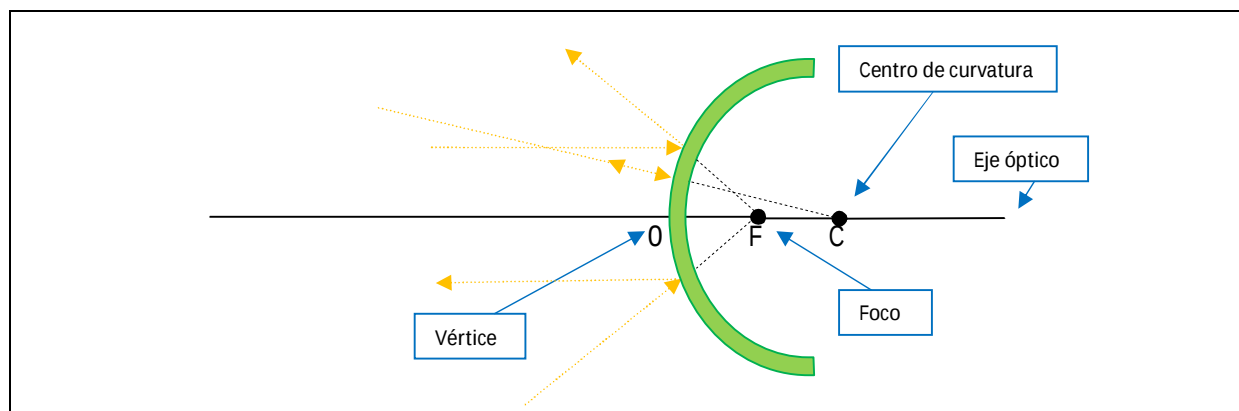


Figura 10.9  
Elementos de un espejo esférico convexo

Para construir gráficamente la imagen obtenida en un espejo esférico convexo de un objeto se sigue el mismo procedimiento que para los espejos cóncavos, es decir, trazaremos dos de los tres rayos siguientes que parten del extremo superior del objeto:

- o Un rayo que pasa por el centro de curvatura C y que se refleja volviendo por su trayectoria, sin desviarse.
- o Un rayo paralelo al eje y que, por lo tanto, se refleja en la dirección que pasa por el foco F.
- o Un rayo cuya dirección pasa por el foco F y que, por lo tanto, se refleja paralelamente al eje.

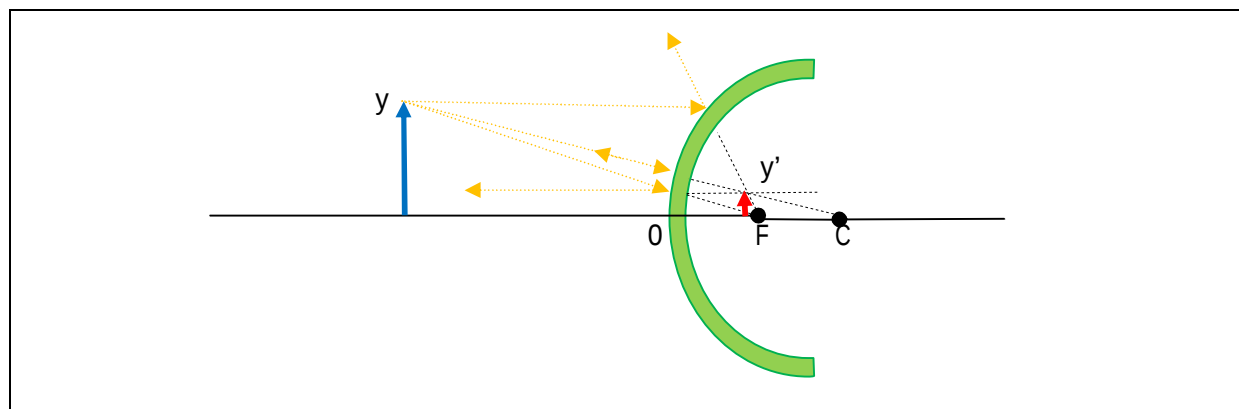


Figura 10.10  
Imagen de un objeto en un espejo esférico convexo

La imagen que da un espejo esférico convexo de un objeto tiene siempre las mismas características, sea cual sea la distancia a la que esté el objeto del espejo, y son las siguientes:

- o Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.
- o Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- o La imagen es de menor tamaño que el objeto, es decir,  $y' < y$ .

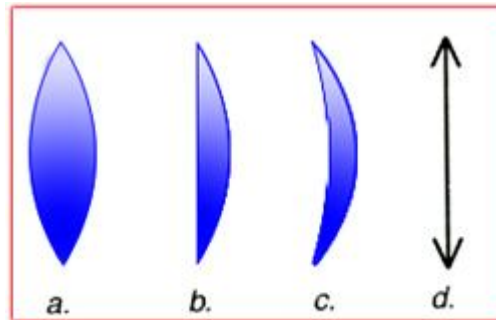
Los espejos convexos suelen utilizarse en los retrovisores de los coches y en cruces o curvas con poca visibilidad debido a su amplio campo visual y al hecho de que siempre ofrecen imágenes virtuales.

## 5. LENTES

Son sistemas ópticos formados por un medio transparente de índice de refracción diferente al del medio exterior y que limita mediante dos superficies o dioptrios, uno de los cuales, al menos, debe ser esférico.

Según la forma de las superficies limitantes, las lentes pueden ser convergentes o divergentes.

- **Lentes convergentes:** son más gruesas en la parte central que en los extremos. Esquemáticamente se representan con una línea acabada en puntas de flecha.



- a. Biconvexa
- b. Planoconvexa
- c. Meniscoconvergente
- d. Representación

Figura 10.11  
Lentes convergentes

- **Lentes divergentes:** son más gruesas en los extremos que en la parte central. Esquemáticamente se representan con una línea recta acabada en puntas de flecha invertidas.



Figura 10.12  
Lentes divergentes

## 6. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LENTES CONVERGENTES DELGADAS

Una lente delgada es aquella en que el grosor es despreciable frente al radio de curvatura de las superficies esféricas que conforman la lente. Sus **elementos característicos** son los siguientes:

- **Centro óptico, O:** punto de la lente que tiene la propiedad de que todo rayo que pase por él atraviesa la lente sin desviarse. Coincide con el centro geométrico de la lente.
- **Eje óptico:** recta perpendicular a la lente que pasa por su centro óptico.
- **Foco objeto, F:** punto del eje óptico que cumple la propiedad de que todos los rayos cuya dirección pase por este punto emergen de la lente paralelamente al eje óptico. La distancia  $f$  desde el centro de la lente O al punto F es la **distancia focal objeto**.
- **Foco imagen, F':** punto del eje óptico en el que concurren las direcciones de todos los rayos refractados que provienen de rayos incidentes paralelos al eje óptico. La distancia  $f'$  desde el centro de la lente O al punto F' se llama **distancia focal imagen**.

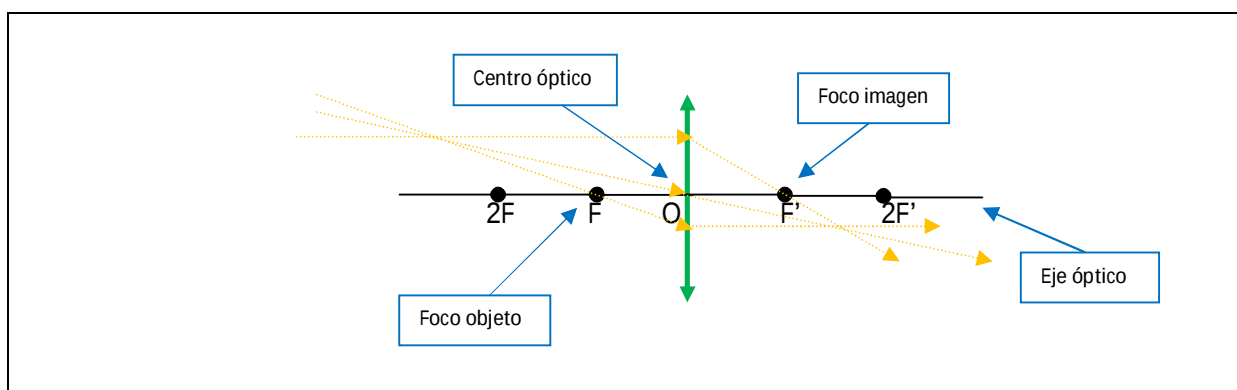


Figura 10.13  
Elementos característicos de una lente convergente

En las lentes delgadas las dos distancias focales son iguales si a ambos lados de la lente está el mismo medio material; así pues,  $f = f' = f$ .

La determinación gráfica de la imagen que da una lente convergente de un objeto lineal y, situado perpendicularmente sobre el eje óptico, se efectúa trazando dos de los tres rayos luminosos siguientes que parten del extremo del objeto:

- 1º. Un rayo que incide sobre la lente paralelamente al eje, la atraviesa y, una vez refractado, el rayo pasa por el foco imagen F'.
- 2º. Un rayo incidente que pasa por el centro óptico O, la atraviesa, y se refracta sin sufrir ninguna desviación.
- 3º. Un rayo incidente que pasa por el foco objeto F y que emerge de la lente paralelamente al eje óptico una vez refractado.

Las características, el tamaño y la naturaleza de la imagen obtenida en una **lente convergente** dependen de la posición del objeto sobre el eje óptico, y pueden darse cinco situaciones diferentes:

a) Imagen de un objeto situado a una distancia mayor que el doble de la distancia focal ( $d > 2f$ )

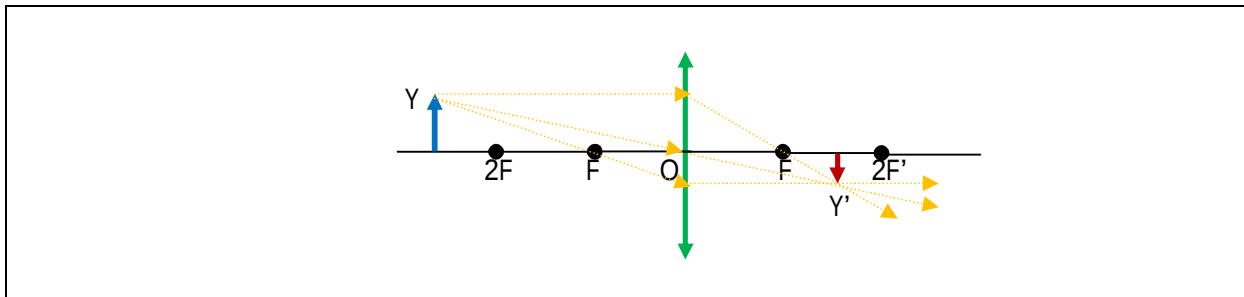


Figura 10.14

Imagen de un objeto situado a mayor distancia del doble de la distancia focal de una lente convergente

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado a una distancia mayor al doble de la distancia focal ( $d > 2f$ ), tiene las siguientes características:

- o Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos refractados.
- o Es una imagen invertida porque está orientada de la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- o La imagen es de menor tamaño que el objeto, es decir,  $y' < y$ .
- o La imagen está de la lente a menor distancia que el objeto, es decir,  $d' < d$ .

b) Imagen de un objeto situado a una distancia igual al doble de la distancia focal ( $d = 2f$ )

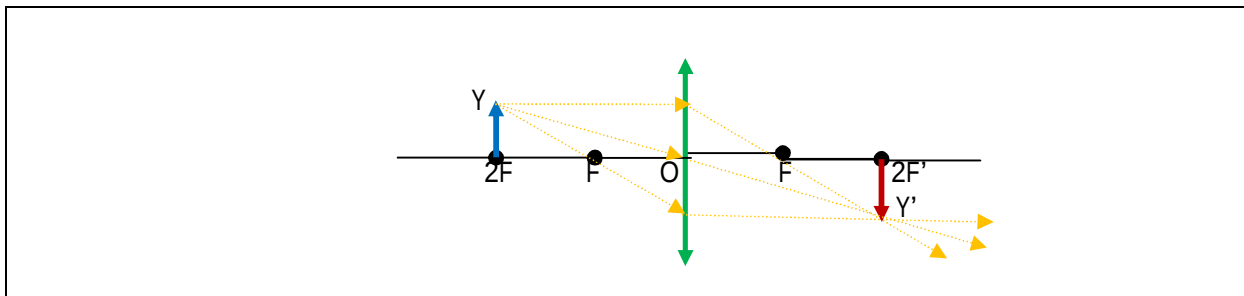


Figura 10.15

Imagen de un objeto situado a igual distancia del doble de la distancia focal de una lente convergente

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado a una distancia igual al doble de la distancia focal ( $d = 2f$ ), tiene las siguientes características:

- o Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos refractados.
- o Es una imagen invertida porque está orientada de la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- o La imagen es de igual tamaño que el objeto, es decir,  $y' = y$ .
- o La imagen está de la lente a igual distancia que el objeto, es decir,  $d' = d$ .

c) Imagen de un objeto situado entre el doble de la distancia focal y el foco ( $f < d < 2f$ )

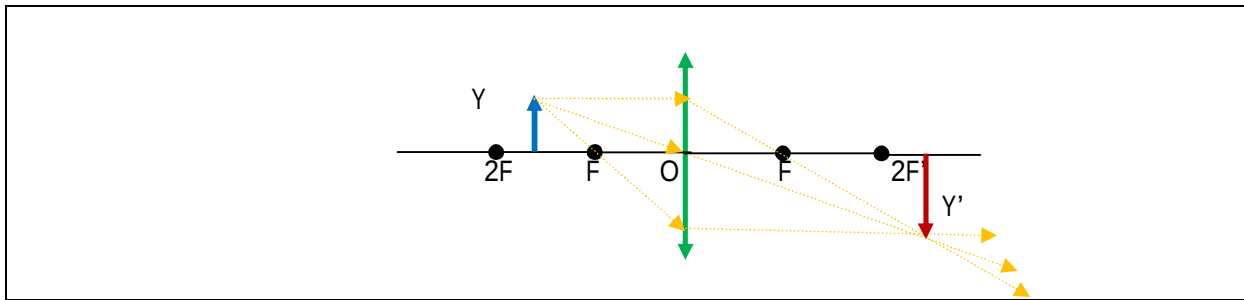


Figura 10.16

Imagen de un objeto situado entre el doble de la distancia focal y el foco de una lente convergente

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado entre el doble de la distancia focal y el foco ( $f < d < 2f$ ), tiene las siguientes características:

- o Es una imagen real porque se forma mediante la intersección de los rayos refractados.
- o Es una imagen invertida porque está orientada de la misma dirección que el objeto pero en sentido contrario.
- o La imagen es de mayor tamaño que el objeto, es decir,  $y' > y$ .
- o La imagen está de la lente a mayor distancia que el objeto, es decir,  $d' > d$ .

d) Imagen de un objeto situado en el foco ( $d = f$ )

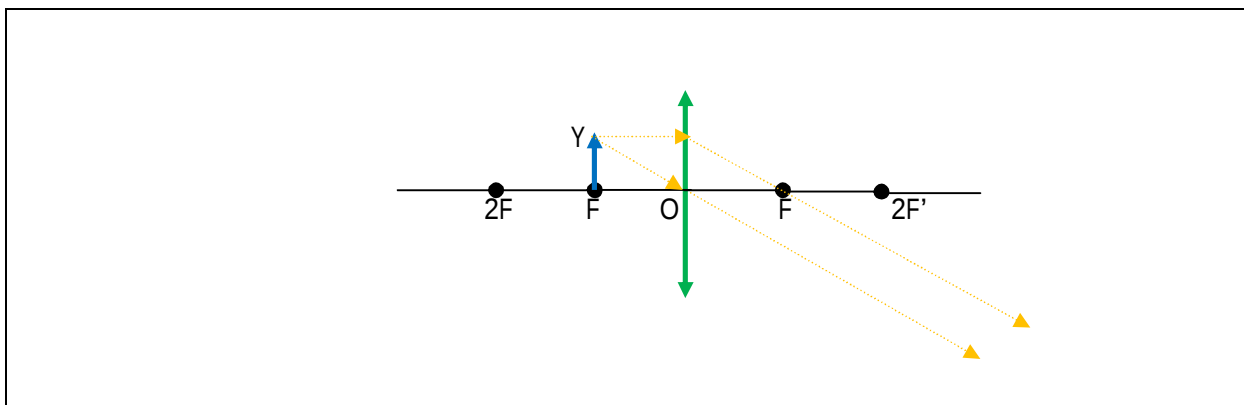


Figura 10.17

Imagen de un objeto situado en el foco de una lente convergente

Si el objeto está en el foco de la lente  $d = f$ , **no se forma imagen** o bien se forma una distancia infinita.

e) Imagen de un objeto situado entre el foco y el centro óptico de la lente ( $d < f$ )

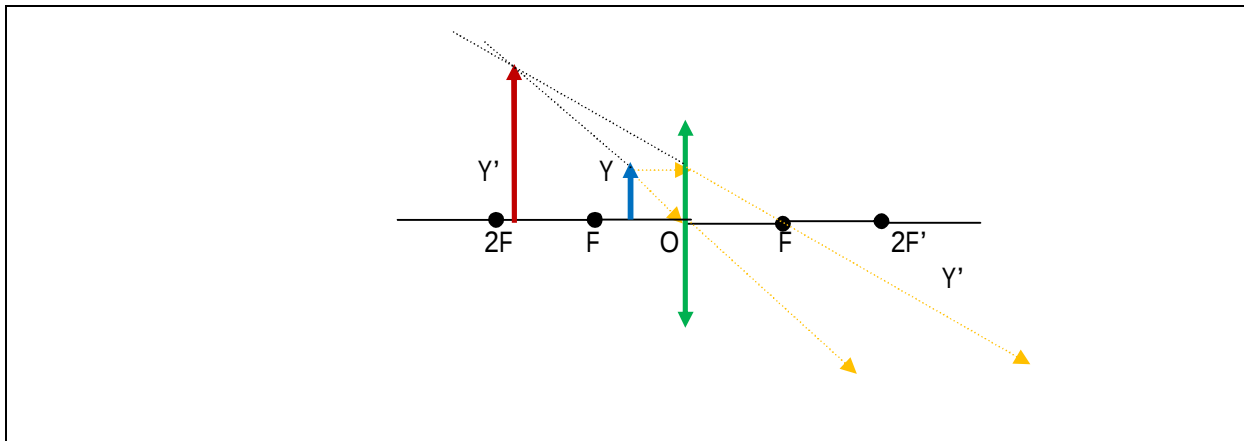


Figura 10.18

*Imagen de un objeto situado entre el foco y el centro de una lente convergente*

La imagen que da una lente convergente de un objeto situado entre el foco y el centro ( $d < f$ ), tiene las siguientes características:

- o Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de la prolongación de los rayos refractados.
- o Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- o La imagen es de mayor tamaño que el objeto, es decir,  $y' > y$ . en este caso, se da el llamado **efecto lupa**.
- o La imagen está de la lente a mayor distancia que el objeto, es decir,  $d' > d$ .

## 7. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LENTES DIVERGENTES DELGADAS

Una lente divergente tiene los mismos elementos que una convergente, pero en las lentes divergentes los focos objeto e imagen están invertidos (véase figura 10.17):

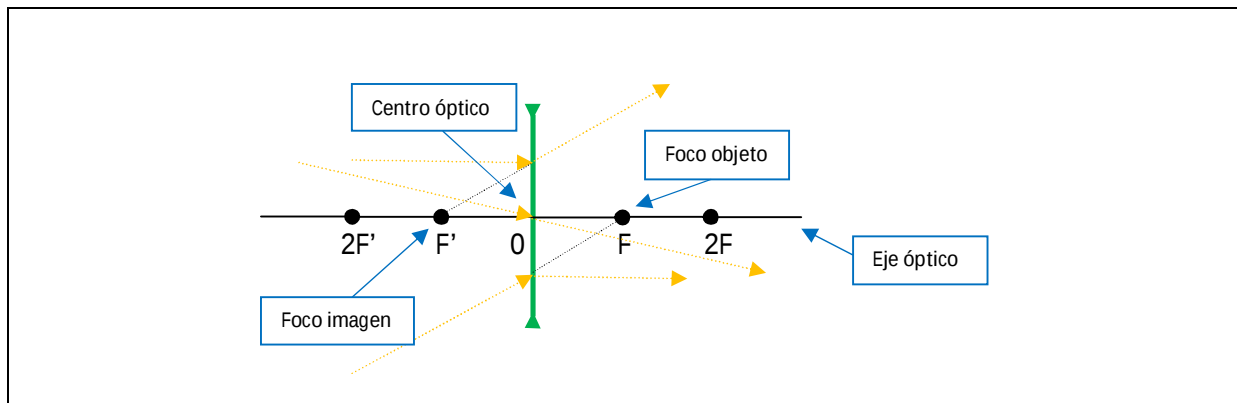


Figura 10.19  
Elementos característicos de una lente divergente

La determinación gráfica de la imagen que da una lente divergente de un objeto lineal y, situado perpendicularmente sobre el eje óptico, se efectúa igual que para una lente convergente, es decir, trazando dos de los tres rayos luminosos siguientes que parten del extremo del objeto:

- 1º. Un rayo que incide sobre la lente paralelamente al eje, la atraviesa y, una vez refractado, el rayo pasa por el foco imagen  $F'$  (en realidad es la prolongación del rayo refractado).
- 2º. Un rayo incidente que pasa por el centro óptico  $O$ , la atraviesa, y se refracta sin sufrir ninguna desviación.
- 3º. Un rayo incidente que pasa por el foco objeto  $F$  (en realidad dirigido hacia el foco objeto) y que emerge de la lente paralelamente al eje óptico una vez refractado.

La imagen que da una lente divergente de un objeto siempre tiene las siguientes características, sea cual sea la distancia a la que esté el objeto de la lente:

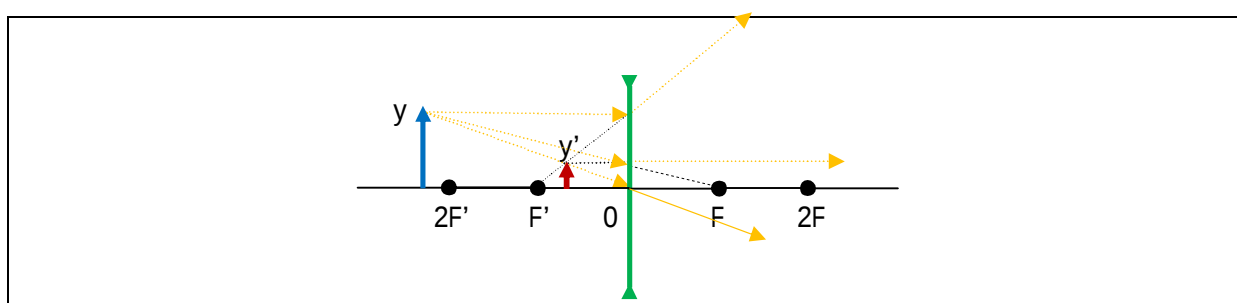


Figura 10.20  
Imagen de un objeto en una lente divergente

- o Es una imagen virtual porque se forma mediante la intersección de las prolongaciones de los refractados.
- o Es una imagen derecha porque está orientada de la misma dirección y sentido que el objeto.
- o La imagen es de menor tamaño que el objeto, es decir,  $y' < y$ .
- o La imagen está de la lente a mayor distancia que el objeto, es decir,  $d' > d$ .

En los siguientes esquemas se muestran los distintos casos descritos anteriormente.

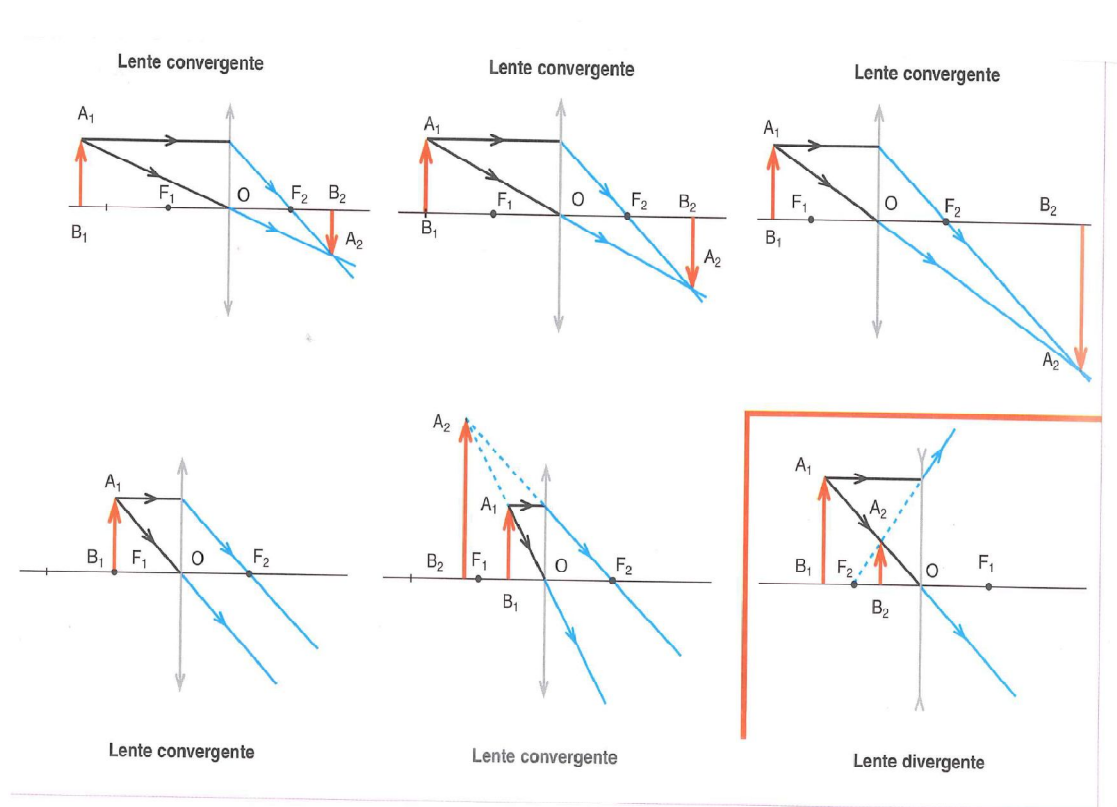


Figura 10.21  
Imagen de un objeto en lentes convergentes y divergentes