TEMA 2: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

2.1 Interacción gravitatoria; ley de gravitación universal
2.2 Campo y potencial gravitatorios; energía potencial gravitatoria.
2.3 Teorema de Gauss. Aplicación al cálculo de campos gravitatorios.
2.4 Campo gravitatorio terrestre; satélites

2.1 INTERACCIÓN GRAVITATORIA; LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Introducción histórica:

La interacción gravitatoria es, de las cuatro interacciones fundamentales, la única conocida desde la antigüedad, si bien no fue explicada hasta finales del s. XVII. El hecho de que los cuerpos caen a la Tierra era considerado como algo natural, aunque no se creía que el movimiento de la Luna o los Planetas tuviera alguna relación con la gravedad.

Las ideas sobre la gravitación y la estructura del universo han ido evolucionando a lo largo de la historia. Hacemos aquí un breve resumen de las ideas principales.

Antigüedad: El conocimiento sobre el universo está ligado a creencias y mitología. Se plantea una distinción clara entere el Cielo (perfecto, la morada de los dioses) y la Tierra (imperfecta, morada de los hombres). Se cree que las Tierra es plana e inmóvil y que el universo no alcanza más allá de unos pocos km sobre la superficie.

Grecia Clásica: Teoría Geocéntrica: Tierra esférica, inmóvil en el centro del universo. El Sol y los planetas giran alrededor.

Aristóteles (s. IV a.C): Consolida la teoría geocéntrica. Los Planetas siguen órbitas circulares.

Aristarco de Samos (s. III a.C): Propone que la Tierra gira alrededor del Sol. Es poco tenido en cuenta.

Ptolomeo (s. II d.C): Amplía el sistema. Geocéntrico para explicar nuevas observaciones. Idea los epiciclos. Este sistema prevalecerá durante 1300 años.

Edad Media: Se mantiene la teoría geocéntrica. El sistema de Tolomeo se complica cada vez más para poder explicar las observaciones.

Los Matemáticos árabes mejoran la medida de la posición de estrellas y planetas.

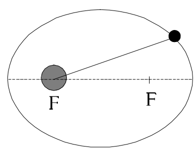
Ed. Moderna: *Copérnico* (1543): Critica el geocentrismo. Propone la Teoría Heliocéntrica. Los planetas (incluida la Tierra) giran alrededor del Sol siguiendo órbitas circulares

Galileo Galilei (s.XVII): Desarrolla el telescopio. Descubre los satélites de Júpiter

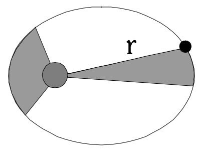
Apoya la teoría heliocéntrica de Copérnico. Es perseguido por sus ideas.

Kepler (s. XVII): Basándose en observaciones de estudiosos anteriores, calcula las órbitas de los planetas, llegando a describirlas en tres leyes (conocidas como *Leyes de Kepler*):

1ª: *Los planetas, incluida la Tierra, giran alrededor del Sol, describiendo órbitas elípticas, en las que el Sol ocupa uno de los focos.*



2ª: *El vector de posición del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*



3ª: *El cociente entre el cuadrado del periodo de revolución y el cubo del radio medio de la órbita es una constante para todos los planetas.*

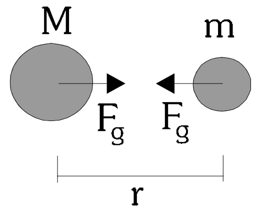
$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = cte}$$

<u>Newton</u> (1684): Explica y describe la interacción gravitatoria, unificando la gravedad terrestre (caída de cuerpos, movimientos parabólicos) y gravedad celeste (movimiento de los planetas y satélites). La explicación de esto queda recogida en la *Ley de gravitación universal*:

"*Entre dos cuerpos cualesquiera, de masas M y m, existe una atracción gravitatoria mutua, que es directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa*."
Esta ley queda recogida en las siguientes expresiones

En módulo $F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$

$$\boxed{\vec{F_g} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u_r}}$$



La constante G, denominada constante de gravitación universal, fue calculada por Cavendish en 1798. Tiene el valor de

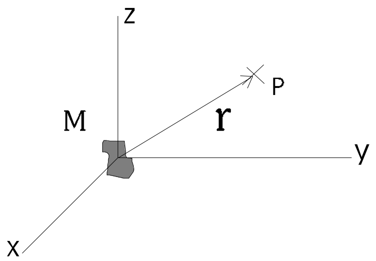
$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

Características de la interacción gravitatoria:

- Es debida a la masa de los cuerpos, por lo que todos los cuerpos materiales sufrirán esta interacción.
- La fuerza originada en esta interacción es siempre atractiva.
- Es una interacción conservativa.
- Es una interacción central.
- Tiene alcance infinito. A cualquier distancia, los dos cuerpos sufrirán la atracción gravitatoria.
- Disminuye con el cuadrado de la distancia

2.2 CAMPO Y POTENCIAL GRAVITATORIOS; ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

2.2.1 Campo gravitatorio



Supongamos que, en una cierta región del espacio, tenemos un cuerpo con una cierta masa M. Debido a esa propiedad, dicho cuerpo interaccionará gravitatoriamente con cualquier otra masa m que coloquemos en cualquier punto del espacio. Es decir, la masa M modifica las propiedades del espacio, crea una nueva propiedad en el espacio, a la que llamaremos *campo gravitatorio*.

Cualquier masa m (masa de prueba) colocada en cualquier punto del espacio sufrirá una fuerza gravitatoria $\mathbf{F_g}$. Esta fuerza dependerá de

Las masas m y M

El punto del espacio en el que coloquemos m

Si calculamos la fuerza que se ejercería por cada unidad de masa (por cada kilogramo) que colocáramos en el punto del espacio que estudiamos; entonces obtendremos una magnitud que no depende de la masa m que coloquemos en el punto, sino que únicamente depende del punto y de la masa que ha creado el campo (M).

Esta magnitud así obtenida se denomina **Intensidad de Campo Gravitatorio** , **Campo Gravitatorio**, o **Gravedad (g)**

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F_g}}{m}} \qquad \boxed{\vec{F_g} = m \cdot \vec{g}}$$

Unidades de **g**: $[g] = N/kg = ms^{-2}$

Además de la fuerza ejercida por cada kg, la gravedad nos indica la aceleración con la que caería el cuerpo si lo soltáramos libremente en ese punto.

2.2.2 Energía potencial gravitatoria (Ep_g) de una partícula de masa m en el interior de un campo gravitatorio:

- Es la energía que almacena un cuerpo de masa m colocado en un punto del interior del campo gravitatorio.

- También puede definirse teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa. La Ep_g será la energía potencial asociada a la fuerza gravitatoria. Es decir

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g \qquad \Delta Ep_g = -\int_A^B \overrightarrow{F_g} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Esta energía potencial, como es evidente, se mide en julios, y depende de la masa m colocada.

2.2.3 Potencial gravitatorio (V) en un punto del espacio:

- Energía por unidad de masa (por cada kg) que almacenaría cualquier cuerpo que colocáramos en dicho punto del espacio.

$$\boxed{V = \frac{Ep_g}{m}} \qquad \boxed{Ep_g = m \cdot V} \qquad [V] = \mathrm{J/kg}$$

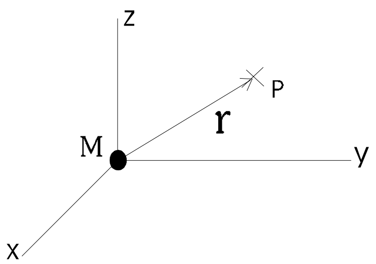
El potencial V es una propiedad del espacio. Es independiente de la masa m que coloquemos en el punto.

- También (con un razonamiento similar al de la energía potencial) podemos definir el potencial como *la función potencial asociada al campo gravitatorio.* $\Delta V = -\int_A^B \vec{g} \cdot \overrightarrow{dr}$

Lo estudiado hasta ahora es general, es válido para cualquier campo que tengamos. A partir de ahora veremos casos particulares. Los resultados que obtendremos sólo se podrán aplicar en un problema si estamos en ese caso particular

CAMPOS CREADOS POR DISTINTAS DISTRIBUCIONES DE MASA:

2.2.4 Campo gravitatorio creado por una partícula de masa M:



Supongamos una partícula de masa M. Crea un campo gravitatorio a su alrededor. Cualquier otra partícula de masa m que coloquemos en un punto del espacio, sufrirá una atracción o fuerza gravitatoria.

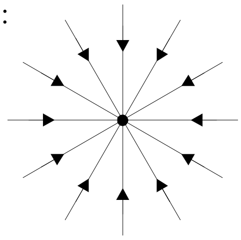
La Fuerza entre ambas partículas vendrá dada por la ley de gravitación Universal de Newton:

$$\overrightarrow{F_g} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r} \qquad \text{Módulo debe ser } > 0 \qquad F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

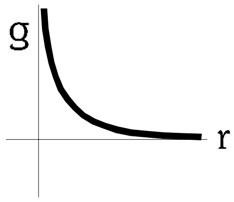
Campo gravitatorio **g**:

$$\vec{g} = \frac{\overrightarrow{F_g}}{m} = \frac{-G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2 \cdot \cancel{m}} \cdot \overrightarrow{u_r} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r} \qquad g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Líneas de campo:



Representación frente a la distancia



<u>Energía potencial gravitatoria</u>: Energía almacenada por una partícula de masa m colocada a una cierta distancia de M, debido a la acción de la fuerza gravitatoria.

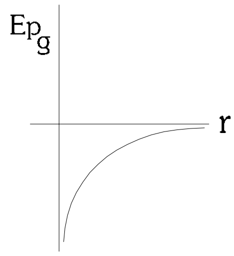
Partimos de la expresión general $\Delta Ep_g = -W_{Fg}$ Así tendremos:

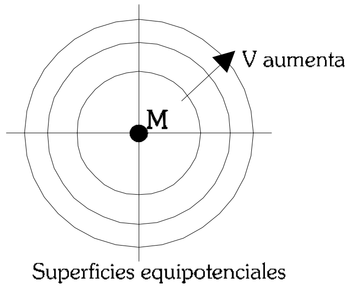
$$\Delta Ep_g = -\int_A^B \overrightarrow{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{-G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r} \cdot dr \cdot \overrightarrow{u_r} = G \cdot M \cdot m \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot m \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{rA}^{rB} =$$

$$= \frac{-G \cdot M \cdot m}{r_B} + \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} = Ep_B - Ep_A$$

Elegimos origen . Para $r_A \rightarrow \infty$, $Ep_A = 0$.

Y la expresión queda $\boxed{Ep_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}}$



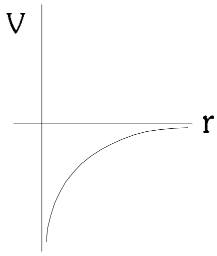


Como vemos, la Ep_g almacenada <u>siempre</u> será negativa.

<u>Potencial gravitatorio en un punto:</u> Ep_g almacenada por unidad de masa Es una propiedad del espacio.

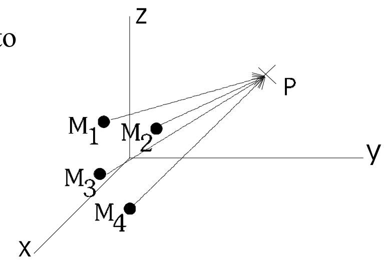
$$V = \frac{Ep_g}{m} = -G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r \cdot \cancel{m}}$$

$$\boxed{V = -G \cdot \frac{M}{r}}$$



2.2.5 Campo gravitatorio creado por varias masas puntuales:

En este caso aplicamos el *principio de superposición* (el efecto producido por un conjunto de partículas puede calcularse sumando los efectos de cada partícula por separado). Así

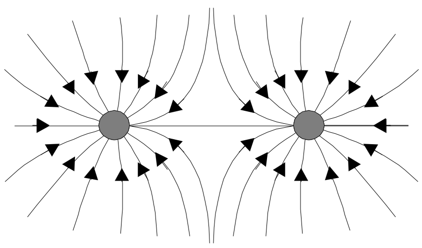


$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...$

$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + ...$

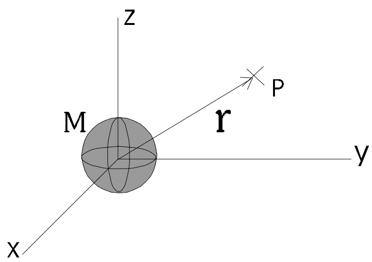
$Ep_g = Ep_1 + Ep_2 + Ep_3 + ...$

$V = V_1 + V_2 + V_3 + ...$



Líneas de campo gravitatorio generado por dos masas puntuales.

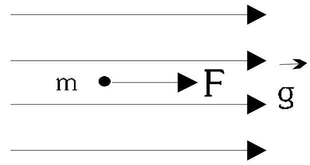
2.2.6 Campo gravitatorio creado por una esfera en su exterior (como la Tierra o cualquier planeta):



Son válidos los resultados obtenidos para masas puntuales.
Lo demostraremos en el apartado siguiente.

M es la masa total de la esfera y r la distancia al centro de la misma

2.2.7 Campo gravitatorio constante (por ejemplo, el peso a nivel de la superficie): $\vec{g} = cte$

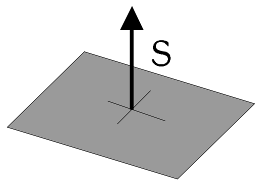


En este caso sólo podemos usar los resultados generales vistos al principio.

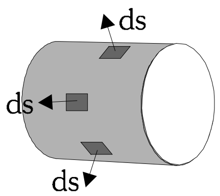
$$\overrightarrow{F_g} = m \cdot \vec{g} \qquad Ep_g = m \cdot V$$

$$W_{Fg} = \int_A^B \overrightarrow{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{F_g} \cdot \overrightarrow{\Delta r} \qquad \Delta V = -\int_A^B \vec{g} \cdot \overrightarrow{dr} = -\vec{g} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$$

2.3 TEOREMA DE GAUSS. APLICACIÓN AL CÁLCULO DE CAMPOS GRAVITATORIOS

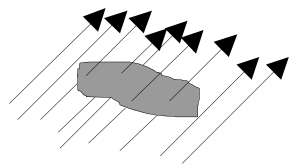


2.3.1 Vector superficie: La forma que tenemos en Física y en geometría de representar las superficies mediante una magnitud es usar el vector superficie ($\vec{s}$). Este vector tiene como características:
Su dirección es perpendicular a la superficie
Su módulo es igual al área.
El sentido puede elegirse. Cuando una superficie es cerrada, normalmente va hacia fuera de la misma.



Cuando una superficie no es plana, vemos que no existe un único vector superficie, ya que este va cambiando de dirección. Se procede entonces a dividir la superficie en trozos infinitamente pequeños, a cada uno de los cuales corresponde un vector superficie $\vec{ds}$.

2.3.2 Flujo del campo gravitatorio (Φ_g):



El concepto de flujo nos da una idea de la concentración de líneas de campo en una zona del espacio. Es otra forma de medir lo intenso que es el campo en ese sitio.

Supongamos una superficie cualquiera dentro del campo gravitatorio. Habrá líneas de campo que la atravesarán, otras no. El flujo nos va a indicar si dicha superficie es atravesada con más o menos intensidad por las líneas de campo.

Esta magnitud dependerá de: La intensidad del campo en la zona (el valor de $\vec{g}$).
El tamaño y forma de la superficie
La orientación entre la superficie y el campo.

Estas tres características quedan recogidas en la expresión que calcula el flujo que atraviesa una determinada superficie. $\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot \vec{ds}$ unidades de flujo gravitatorio $[\Phi_g] = [g] \cdot [S] = m \cdot s^{-2} \cdot m^2 = m^{-1} \cdot s^{-2}$

En el caso de que el campo gravitatorio sea uniforme (que tenga el mismo valor en todos los puntos de la superficie), $\vec{g}$ puede salir fuera de la integral, con lo que el flujo quedará $\Phi_g = \vec{g} \cdot \int_S d\vec{s} = \vec{g} \cdot \vec{S} = g \cdot S \cdot \cos\alpha$

Ejemplo. Cálculo del flujo que atraviesa una superficie esférica (la masa M que crea el campo se encuentra en el centro de dicha superficie).

Sabemos la expresión del campo gravitatorio creado por una masa puntual.

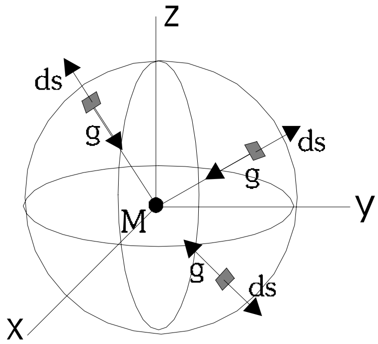
$$\vec{g} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

$\vec{g}$ tiene dirección radial y sentido hacia la partícula *M*. En la figura vemos que forma 180º con el vector superficie $d\vec{s}$. Así, el flujo se calculará:

$$\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_S g \cdot ds \cdot cos\,180^o = -\int_S g \cdot ds$$

Como g se mantiene constante en toda la superficie, podemos sacarlo fuera de la integral

$$\Phi_g = -\int_S g \cdot ds = -g \cdot \int_S ds = -g \cdot S = -\frac{G \cdot M}{r^2} \cdot 4\pi \cdot r^2 = -4\pi \cdot G \cdot M \quad (m^{-1} \cdot s^{-2})$$



2.3.3 Teorema de Gauss:

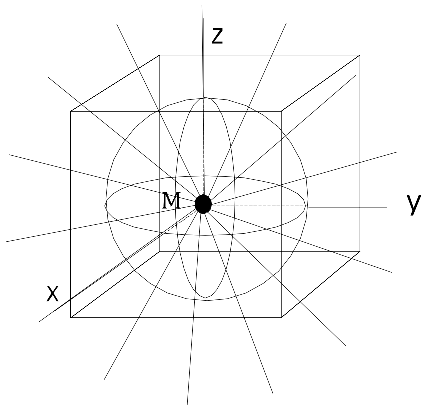
El teorema de Gauss aplicado al campo gravitatorio nos dice los siguiente:

El flujo total que atraviesa una superficie <u>*cerrada*</u> *en el interior de un campo gravitatorio es proporcional a la masa encerrada por dicha superficie.*

$$\Phi_g = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi \cdot G \cdot M$$

Según la expresión, vemos que el flujo no depende de la forma ni el tamaño de la superficie, siempre que sea cerrada y encierre la misma cantidad de masa.

Cuestión: ¿Qué ocurre si la superficie cerrada no contiene en su interior ninguna masa?



El flujo de líneas de campo que atraviesa ambas superficies cerradas es el mismo

APLICACIONES:

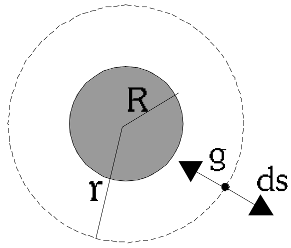
El teorema de Gauss permite calcular la expresión del campo gravitatorio creado por algunas distribuciones de masa. Deben ser cuerpos que posean cierta simetría (esférica, cilíndrica, plana), en los que podamos tener una idea de la dirección que llevarán las líneas de campo en cada punto.

El objetivo que se persigue al aplicar el teorema de Gauss es el de poder despejar *g* de la fórmula $\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi \cdot G \cdot M$. Para ello, para que *g* salga fuera de la integral, es preciso que g tenga un valor constante en toda la superficie y que además sea perpendicular a la misma. Así:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = \oint_S g \cdot ds \cdot cos\,180^o = -g \cdot \oint_S ds = -g \cdot S = -4\pi \cdot G \cdot M \quad \rightarrow \quad g = \frac{4\pi \cdot G \cdot M}{S}$$

Donde S es el valor de la superficie (llamada *superficie gaussiana*) utilizada, y M es la masa que queda encerrada dentro de la superficie gaussiana. Lo veremos en los casos que se exponen a continuación:

2.3.4 Cálculo de g creado por una esfera en su exterior:



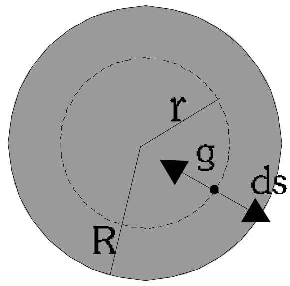
El cuerpo que va a crear el campo tiene simetría esférica. Sabemos que las líneas de campo irán en dirección radial y que el valor del campo dependerá exclusivamente de la distancia al centro de la esfera. La superficie gaussiana que andamos buscando debe ser perpendicular a las líneas de campo y mantener constante el valor de *g* en todos sus puntos: es claramente una esfera de radio *r* cualquiera (siempre mayor que el radio R de la esfera).

Aplicando el teorema de Gauss al campo que atraviesa dicha superficie:

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = \oint_S g\cdot ds\cdot cos180^o = -g\cdot\oint_S ds = -g\cdot S = -g\cdot 4\pi\cdot r^2 = -4\pi\cdot G\cdot M \quad\rightarrow\quad g = \frac{-4\pi\cdot G\cdot M}{-4\pi\cdot r^2} = \frac{G\cdot M}{r^2}$$

de este modo $g = \dfrac{G\cdot M}{r^2}$, que es la expresión que habíamos visto anteriormente.

2.3.5 Cálculo de g creado por una esfera en su interior:



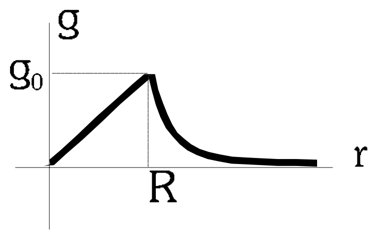
La expresión que vamos a calcular ahora es útil a la hora de estudiar cómo varía el campo gravitatorio en el interior de la Tierra o de un planeta. Vamos a suponer que la distribución de masa dentro de la esfera es uniforme (cosa que no siempre ocurre, en un planeta la densidad es mayor en el centro, debido a la presión).

El cuerpo tiene simetría esférica y las líneas de campo van a llevar, por tanto, dirección radial. Como ocurría anteriormente, la superficie gaussiana que usaremos será una esfera de radio *r* (menor que R, en este caso). Aplicamos el teorema de Gauss a esa esfera:

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{s} = \oint_S g\cdot ds\cdot cos180^o = -g\cdot\oint_S ds = -g\cdot S = -g\cdot 4\pi\cdot r^2 = -4\pi\cdot G\cdot M_{int} \quad\rightarrow\quad g = \frac{-4\pi\cdot G\cdot M_{int}}{-4\pi\cdot r^2} = \frac{G\cdot M_{int}}{r^2}$$

Ahora, la masa encerrada por la esfera gaussiana no es toda la masa del cuerpo, sino sólo una parte. La calculamos:

$$M_{int} = \rho\cdot V_{int} = \frac{M_{tot}}{V_{tot}}\cdot V_{int} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\cdot R^3}\cdot\tfrac{4}{3}\pi\cdot r^3 = \frac{M\cdot r^3}{R^3}$$



Entonces $g = \dfrac{G\cdot M_{int}}{r^2} = \dfrac{G\cdot M\cdot r^3}{r^2\cdot R^3} \quad\Rightarrow\quad g = \dfrac{G\cdot M\cdot r}{R^3}$

Vemos que, en el interior, g disminuye conforme profundizamos, hasta hacerse cero en el centro de la esfera.

2.4 CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE; SATÉLITES.

2.4.1 CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE:

Para estudiar el campo gravitatorio creado por la Tierra (o cualquier planeta) en su exterior, consideraremos al planeta como una esfera perfecta y homogénea, de masa M y radio R. De esta forma podremos aplicar los resultados que ya tenemos sobre distribuciones esféricas de masa (que ya vimos que se comportaban como masas puntuales).

Así, tanto el campo gravitatorio como el potencial gravitatorio en cualquier punto del exterior vendrán dados por

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2} \qquad V = -G \cdot \frac{M}{r} \qquad \text{Para } r > R$$

Para la Tierra: $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg $\quad R = 6370$ km $\sim 6{,}4 \cdot 10^6$ m (radio medio)

Campo gravitatorio en la superficie (gravedad superficial, g_0)

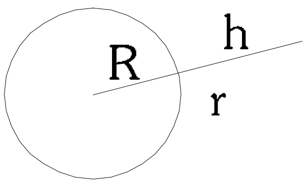
Este valor se obtendrá teniendo en cuenta que, en la superficie del planeta, r = R.

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Para la Tierra, obtenemos el valor de $g_0 = 9{,}8 \sim 10\ ms^{-2}$

Este valor obtenido es, en teoría, la gravedad justo al nivel del suelo, ya que el valor de g disminuye conforme nos alejamos del centro de la Tierra, aunque sea un solo metro.

Vamos a ver cómo varía g respecto a la altura desde el suelo (h). $r = R + h$



Así

$$g = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{G \cdot M \cdot R^2}{R^2 \cdot (R+h)^2} = g_0 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

Vemos que la gravedad disminuye con la altura, pero podemos considerar que g se mantiene aproximadamente constante ($g \sim g_0$) si el valor de h es mucho menor que el radio del planeta ($h \ll R$).

Energía potencial gravitatoria en la superficie terrestre. Relación entre las expresiones de Epg

Hemos visto que la expresión de la energía potencial gravitatoria es $Ep_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$

Sin embargo, en el tema anterior usamos la expresión $Ep_g = m \cdot g \cdot h$

¿Por qué son tan diferentes estas dos expresiones? ¿Son las dos igualmente válidas? La razón de la diferencia está en un hecho muy simple pero que puede pasar desapercibido: para cada una se ha escogido un origen de potencial diferente. En la primera expresión el origen se encuentra en el ∞, y en la segunda expresión, el origen está escogido en la superficie terrestre.

Podemos comprobar que, si en el cálculo de la Ep, en lugar de poner el origen en el infinito, lo colocamos en la superficie, y hacemos una aproximación, obtendremos la segunda expresión.

Habíamos obtenido

$$Ep_{gB} - Ep_{gA} = -\int_A^B \vec{F_g} \cdot \vec{dr} = \frac{-G \cdot M \cdot m}{r_B} + \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A}$$

Escogiendo origen $r_A = R$; $Ep_A = 0$

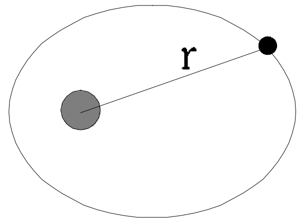
$$Ep_g = -GMm\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] = \ldots = GMm\frac{h}{R \cdot (R+h)}$$

Realizamos la aproximación
h << R ; R+h ~ R

$$Ep_g \sim \frac{G \cdot M \cdot m \cdot h}{R^2} = m \cdot \frac{G \cdot M}{R^2} \cdot h = m \cdot g_0 \cdot h$$

Hay que tener en cuenta que para llegar a la expresión $Ep = m \cdot g_0 \cdot h$, hemos tenido que suponer que la altura a la que nos encontramos es muy pequeña comparada con el radio del planeta (unas 100 veces menor, al menos). Por tanto, la expresión sólo será válida cuando se cumpla esta condición. Para el caso de la Tierra, podemos considerar que la gravedad se mantiene constante hasta una altura de 40 - 50 km.

2.4.2 SATÉLITES:



Por satélite entenderemos cualquier cuerpo (natural o artificial) que describa órbitas alrededor de un cuerpo celeste. Así, la Luna, o el satélite Hispasat, son satélites de la Tierra, y la Tierra es satélite del Sol.

Kepler comprobó y Newton demostró que la órbita que describe un satélite tiene forma elíptica. La distancia a la que se encuentra del centro del planeta no es constante, ni tampoco su velocidad. Sin embargo sí hay dos magnitudes que se mantendrán constantes en toda la trayectoria:
- Su energía mecánica E_M
- Su momento angular respecto al planeta (su tendencia a mantener el movimiento de giro) $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$.

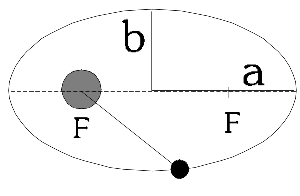
La energía que tendrá el satélite en su órbita vendrá dada por

$$E = Ec + Ep_g = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

Esto hace que la posición y la velocidad del satélite en la órbita estén relacionadas. Para una posición concreta, el satélite tendrá una velocidad concreta. En los puntos más alejados de la órbita (r mayor), la Ep almacenada será mayor, por lo que la Ec será menor, y la velocidad también disminuirá. De la misma forma, al ir acercándose al planeta, su Ep disminuirá, produciendo un aumento de la Ec y, por tanto, de la velocidad.

Los puntos de máximo acercamiento y máximo alejamiento del satélite al cuerpo central reciben nombres propios. Para un satélite que orbita alrededor de la Tierra se habla de *apogeo* (alejamiento máximo) y *perigeo* (dist. mínima). Para el Sol, las palabras usadas son *afelio* y *perihelio*. En ambos puntos la velocidad es perpendicular al radio.

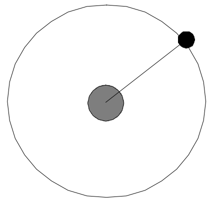
Semiejes y excentricidad de la órbita:



Toda elipse viene caracterizada, además de por los focos, por dos distancias llamadas *semiejes*, *a* y *b* (en la figura). Estas dos distancias sirven para calcular la *excentricidad (e)*, magnitud que nos indica el achatamiento de la elipse, es decir, cuánto se aleja la elipse de una circunferencia perfecta.

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad e < 1$$

En una circunferencia, $a = b$, con lo que $e = 0$. Cuanto menor sea la excentricidad, más parecida es la órbita a una circunferencia. Para el caso de los planetas alrededor del Sol, las excentricidades son muy pequeñas (la de la Tierra, por ejemplo, es de 0,017)



Hasta aquí lo que podemos estudiar en este curso sobre las trayectorias elípticas. Para continuar un estudio aproximado, haremos una simplificación razonable. En la mayoría de los casos la excentricidad (diferencia entre los semiejes mayor y menor) de la elipse es tan pequeña que podemos suponer, en el estudio elemental que estamos realizando, que se trata de una circunferencia. Es decir, consideraremos que un satélite describe, alrededor del planeta, un *movimiento circular uniforme*. Es decir, tanto el radio de la órbita como la velocidad se mantendrán constantes en toda la trayectoria.

Velocidad orbital: (v_{orb}) Es la velocidad que lleva el satélite en su órbita. Para calcularla, tendremos en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria.

$$\boxed{F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}$$

También, al tratarse de un movimiento circular, sólo tendrá aceleración normal. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_g = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Igualando ambas expresiones: $$\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Observamos que, a cada órbita corresponde una velocidad determinada.

Periodo de revolución (**T**): Tiempo que tarda el satélite en describir una órbita completa (en dar una vuelta). Dado que se trata de un movimiento uniforme, podemos calcular este tiempo dividiendo la distancia recorrida (una vuelta = 2 · π · r) entre la velocidad que lleva (v_{orb}). Así

$$T = \frac{d}{v_{orb}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot r^{\frac{3}{2}}$$

De este resultado podemos extraer una importante consecuencia: Elevando al cuadrado y despejando...

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot r^3 \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cte$$

Obtenemos la expresión de la 3ª ley de Kepler.

Aplicación: Satélites geoestacionarios:

Este tipo de satélites artificiales son muy usados, sobre todo en telecomunicaciones (TV, radio "vía satélite"). Se denominan así porque siempre se encuentran sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Lógicamente no están quietos (se caerían), sino que se mueven al mismo ritmo que la Tierra, describiendo una vuelta en un día. Así, su T = 24 h = 86400 s. aprox.

Teniendo en cuenta la expresión anterior, a un periodo de revolución determinado le corresponde una distancia determinada del centro de la Tierra. Para el caso de estos satélites geoestacionarios, la distancia resulta ser de unos 42300 km, o sea, describen órbitas a 36000 km de altura sobre la superficie terrestre, una distancia muy grande comparada con la altura que alcanzan los llamados "satélites de órbita baja", entre 400 y 800 km sobre la superficie.

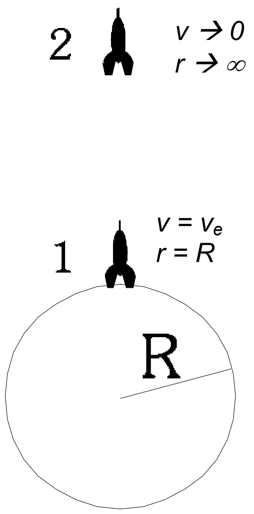
Velocidad de escape: ($\mathbf{v_e}$) Se define como la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente. En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.

Datos: M, R: masa y radio del planeta
m: masa del proyectil

<u>Sistemas de referencia</u>: mediremos las distancias desde el centro del planeta.

El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$



Consideraremos dos situaciones:

<u>Inicial:</u> Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e.

$$Ec_1 = \tfrac{1}{2} m v_e^2 \qquad Ep_{g1} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

<u>Final:</u> el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r \to \infty} E_M = \lim_{r \to \infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$ Puesto en función de la gravedad en superficie $v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

Nótese que la velocidad de escape desde la superficie de un planeta sólo depende de las características (masa, tamaño) del planeta. No importa la masa del proyectil. (Evidentemente, para acelerar un proyectil de más masa hasta esa velocidad se necesitará un mayor esfuerzo, pero eso es otra cuestión)

También puede hablarse de velocidad de escape desde una cierta altura h sobre la superficie. El concepto es el mismo, solo que en lugar de R pondremos R+h.

PROBLEMAS TEMA 3: INTERACCIÓN GRAVITATORIA:

1. La tabla adjunta relaciona el periodo T y el radio de las órbitas de cinco satélites que giran alrededor del mismo astro:

T (años)	0,44	1,61	3,88	7,89
R ($\cdot 10^5$ km)	0,88	2,08	3,74	6,00

a) Mostrar si se cumple la tercera ley de Kepler. ¿Cuál es el valor de la constante?
b) Se descubre un quinto satélite, cuyo periodo de revolución es 6,20 años. Calcula el radio de su órbita.

2. Una masa de 8 kg está situada en el origen. Calcular:
a) Intensidad del campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el punto (2,1) m.
b) Fuerza con que atraería a una masa m de 2 kg, y energía almacenada por dicha masa.
c) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar la masa m desde el punto (2,1) m al punto (1,1) m

3. Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2)m y (2,0) m. Calcular:
a) Intensidad de campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el origen.
b) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar al trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen.

4.- a) ¿En qué punto se equilibran las atracciones que ejercen la Luna y La Tierra sobre un cuerpo de masa m? (Datos: distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna = 384400 km; $M_T / M_L = 81$)
b) Si en dicho punto la atracción gravitatoria que sufre la masa m es nula, ¿podemos decir también que su energía potencial también es nula? Razonar.

5.- Un objeto que pesa 70 kp en la superficie de la Tierra, se encuentra en la superficie de un planeta cuyo radio es el doble del terrestre y cuya masa es ocho veces la de la Tierra. Calcular:
a) Peso del objeto en dicho lugar
b) Tiempo que tarda en caer desde una altura de 20 m hasta la superficie del planeta, si lo dejamos caer con $v_0 = 0$.

6.- Calcular: a)Altura sobre la superficie terrestre en la que el valor de g se ha reducido a la mitad
b)Potencial gravitatorio terrestre en un punto situado a 6370 km de distancia de la Tierra.
(Datos: Masa de la Tierra = $6\cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km.)

7.- Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 1000 m s^{-1}. Calcular:
a) Altura máxima que alcanzará
b) Repetir lo anterior despreciando la variación de g con la altura. Comparar ambos resultados.

8.- Calcular la velocidad de escape para un cuerpo situado en : a) La superficie terrestre
b) A 2000 km sobre la superficie

9.- Un satélite artificial describe una órbita circular a una altura igual a tres radios terrestres sobre la superficie de la Tierra. Calcular: a) Velocidad orbital del satélite
b) Aceleración del satélite

10.- a) ¿Cuál será la altura que alcanzará un proyectil que se lanza verticalmente desde el Sol a 720 km/h.?
b)¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en el Sol que en la Tierra?
($M_{SOL}/M_{TIERRA} = 324440$; $R_S/R_T = 108$; $R_T = 6370$ km)

11.- Si la gravedad en la superficie lunar es aproximadamente 1/6 de la terrestre, calcular la velocidad de escape de la Luna ¿En qué medida importa la dirección de la velocidad? (dato $R_{LUNA} = 1740$ km)

12.- El planeta Marte tiene un radio $R_M = 0,53\ R_T$. Su satélite Fobos describe una órbita casi circular de radio igual a 2,77 veces R_M, en un tiempo de 7 h 39' 14". Calcula el valor de g en la superficie de Marte. (dato: $R_T = 6370$ km)

13.- Calcular la aceleración respecto al Sol de la Tierra si el radio de la órbita es $1,5\cdot 10^8$ km de radio. Deducir la masa del Sol (datos $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km)

14.- Calcular:

a) Trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra. ($M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; R_T= 6370 km)

b) Velocidad a la que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura

15. Un satélite de comunicaciones está situado en órbita geoestacionaria circular en torno al ecuador terrestre. Calcule:
a)Radio de la trayectoria, aceleración tangencial del satélite y trabajo realizado por la fuerza gravitatoria durante un semiperiodo;
b) campo gravitatorio y aceleración de la gravedad en cualquier punto de la órbita.
($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2} $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg)

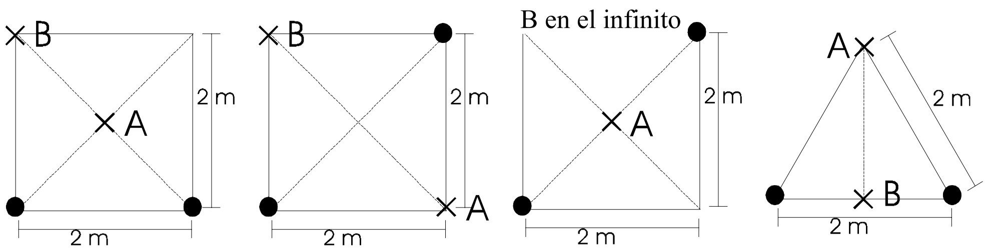
16. Un satélite describe una órbita circular de radio 2 R_T en torno a la Tierra..
a) Determine su velocidad orbital.
b) Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿cuál será su peso en la órbita? Explique las fuerzas que actúan sobre el satélite.
(R_T = 6400 km ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

17. Un satélite describe una órbita en torno a la Tierra con un periodo de revolución igual al terrestre.
a) Explique cuántas órbitas son posibles y calcule su radio.
b) Determine la relación entre la velocidad de escape en un punto de la superficie terrestre y la velocidad orbital del satélite.
(R_T = 6400 km ; g_T = 10 m s^{-2} ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

18. Si con un cañón suficientemente potente se lanzara hacia la Luna un proyectil.
a) ¿En qué punto de la trayectoria hacia la Luna la aceleración del proyectil sería nula?
b) ¿Qué velocidad mínima inicial debería poseer para llegar a ese punto? ¿Cómo se movería a partir de esa posición?
(R_T = 6400 km ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2} ; R_L = 1600 km ; $M_L = 7 \cdot 10^{22}$ kg ;
$d_{T\text{-}L} = 3{,}8 \cdot 10^8$ m)

19. La masa de la Luna es 0,01 veces la de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae desde una altura de 50m sobre la superficie lunar.
a) Determine la masa del cuerpo y su peso en la Luna.
b) Realice el balance energético en el movimiento de caída y calcule la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie.

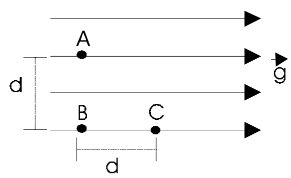
20. dadas las siguientes distribuciones de masa (todas de 10 kg), calcular para cada caso campo y potencial gravitatorios en el punto a, así como el trabajo necesario para llevar la unidad de masa desde el punto A al B.



CUESTIONES TEÓRICAS:

1. a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra?
b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?, ¿Puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?

2. En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo.
a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C.
b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.



3. a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.
b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

4. a) Escriba la ley de Gravitación Universal y explique su significado físico.
b) Según la ley de Gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste, ¿por qué o caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

5. Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando a más alejado del Sol que B.
a) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y compare los valores de las energías cinética y potencial en a y en B.
b) ¿En cuál de los puntos A o B es mayor el módulo de la velocidad? ¿y el de la aceleración?

6. Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h viene dada por
$Ep = m g h$.
a) ¿Es correcta dicha afirmación? ¿Por qué?
b) ¿En qué condiciones es válida dicha fórmula?

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

1. a) $2{,}87 \cdot 10^{-16}$ años^2/km^3 ; b) $5{,}1 \cdot 10^5$ km
2. a) $\mathbf{g} = -9{,}55 \cdot 10^{-11}\,\mathbf{i} - 4{,}77 \cdot 10^{-11}\,\mathbf{j}$ N/kg ; $V = -2{,}39 \cdot 10^{-10}$ J/kg
   b) $\mathbf{F} = -1{,}91 \cdot 10^{-10}\,\mathbf{i} - 9{,}55 \cdot 10^{-11}\,\mathbf{j}$ N; $Ep = -4{,}78 \cdot 10^{-10}$ J ; c) $2{,}77 \cdot 10^{-10}$ J
3. a) $\mathbf{g} = -8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\mathbf{i} - 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\mathbf{j}$ N/kg ; $V = -3{,}34 \cdot 10^{-10}$ J/kg
   b) $3{,}34 \cdot 10^{-10}$ J
4. a) $3{,}46 \cdot 10^8$ m de la Tierra ; b) No
5. a) 1372 N ; b) 1,4 s
6. a) 0,41 R_T ; $-3{,}14 \cdot 10^7$ J/kg
7. a) 51 km ; b) 50 km
8. a) 11,2 km/s ; b) 9,8 km/s
9. a) 3963 m/s ; b) 0,616 m/s^2
10. a) 72 m ; b) 27,8 veces mayor
11. a) 2,4 m/s
12. a) 3,73 m/s^2
13. $a = 5{,}95 \cdot 10\text{-}3$ m s^{-2} ; $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg
14. a) $W_{ext} = -W_g = 6{,}28 \cdot 10^8$ J ; b) 7926 m/s
15. a) r = 42300 km ; $a_t = 0$ m/s^2 ; W = 0 J ; b) 0,22 m s^{-2}
16. a) a) 5592 m/s ; b) 1250 N
17. a) Hay una sola órbita posible (una sola distancia), r = 42300 km ; b) $v_{esc} = 3{,}6\ v_{orb}$
18. a) $3{,}42 \cdot 10^8$ m de la Tierra ; b) 11,06 km/s
19. a) m = 80 kg ; P_L= 128 N