DEPARTAMENTO DE FÍSICA E QUÍMICA	**Física 2º Bach.** Gravitación 10/02/05 Nombre:	

Problemas

[2 PUNTOS / APTDO.]

1. Un satélite de 500 kg de masa se mueve alrededor de Marte, describiendo una órbita circular a $6{,}0\times10^6$ m de su superficie.
   a) ¿Cuánto vale su período?
   b) ¿A qué altura debería encontrarse el satélite para que su período fuese doble?
   c) ¿A qué velocidad se estrellará contra el suelo marciano cuando acabe cayendo, sin apenas pérdida de energía?
   Datos: gravedad en la superficie de Marte: $g_M = 3{,}7$ m/s^2 ; $R_M = 3\,400$ km

Solución:

Datos:

masa del satélite:	$m = 500$ kg	
radio de Marte:	$R = 3\,400$ km $= 3{,}4\times10^6$ m	
altura de la órbita:	$h = 6{,}0\times10^6$ m	radio de la órbita: $r = R + h = 9{,}4\times10^6$ m
gravedad en la superficie de Marte:	$g = 3{,}7$ m/s^2	

Ecuaciones:

Ley de Newton de la gravitación universal:	$F = G\,M\,m\,/\,r^2$
Principio fundamental de la dinámica:	$\sum F = m\,a$
En el movimiento circular uniforme:	$v = 2\,\pi\,R\,/\,T$
	$a = a_N = v^2\,/\,R$
Energía potencial gravitatoria:	$E_P = -G\,M\,m\,/\,R$
Energía cinética:	$E_C = ½\,m\,v^2$.

Cálculos:

a) Sólo se tiene en cuenta la fuerza gravitatoria de Marte sobre el satélite, que mantiene un movimiento circular uniforme de radio r.

$$G\,M\,\cancel{m}\,/\,r^2 = \cancel{m}\,v^2\,/\,r = \cancel{m}\,(2\,\pi\,r\,/\,T)^2\,/\,r$$

$$G\,M = 4\,\pi^2\,r^3\,/\,T^2$$

Como no tenemos el dato de la masa de Marte, podemos escribir que en la superficie marciana,

$$G\,M\,\cancel{m}\,/\,R^2 = \cancel{m}\,g$$

y sustituir el producto $G\,M = g\,R^2$

$$g\,R^2 = 4\,\pi^2\,r^3\,/\,T^2$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g\,R^2}}=2\pi\sqrt{\frac{(9{,}4\times10^6[\mathrm{m}])^3}{3{,}7[\mathrm{m/s^2}]\cdot(3{,}4\times10^6[\mathrm{m}])^2}}=2{,}8\times10^4\,\mathrm{s}=7{,}7\,\mathrm{h}$$

b) Para calcular la nueva altura, aplicamos la misma ecuación, sólo que despejada la distancia al centro de Marte

$$r=\sqrt[3]{\frac{g\,R^2\,T^2}{4\pi^2}}$$

Si dividimos esta expresión por otra equivalente cada una con su radio de órbita r y r' y su período T y T'.

$$\frac{r'}{r}=\frac{\sqrt[3]{\frac{g\,R^2\,T'^2}{4\pi^2}}}{\sqrt[3]{\frac{g\,R^2\,T^2}{4\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{T'^2}{T^2}}$$

y sustituimos $T' = 2\,T$

$$r' = r \cdot \sqrt[3]{\frac{(2\,T)^2}{T^2}} = r \cdot \sqrt[3]{4} = 9{,}4\times10^6\,[\mathrm{m}] \cdot \sqrt[3]{4} = 1{,}5\times10^7\ \mathrm{m}$$

de donde $h' = 1{,}5\times10^7$ [m] – $3{,}4\times10^6$ [m] = $1{,}2\times10^7$ m

c) Si la energía se conserva (prácticamente)

$$(E_P + E_C)_{\text{suelo}} = (E_P + E_C)_{\text{órbita}}$$

En órbita, la velocidad se puede calcular en función del radio de la órbita.

$$G\,M\,\cancel{m} / r^2_{\text{órbita}} = \cancel{m}\,v^2 / r_{\text{órbita}}$$

$$v^2 = G\,M / r_{\text{órbita}}$$

por lo que la energía mecánica en órbita es:

$$(E_P + E_C)_{\text{órbita}} = -G\,M\,m / r_{\text{órbita}} + \tfrac{1}{2}\,m\,v^2_{\text{órbita}} = -G\,M\,m / r_{\text{órbita}} + \tfrac{1}{2}\,(G\,M\,m / r_{\text{órbita}}) = -\tfrac{1}{2}\,G\,M\,m / r_{\text{órbita}}$$

Igualando energías

$$-G\,M\,\cancel{m} / R + \tfrac{1}{2}\,\cancel{m}\,v^2_{\text{suelo}} = -\tfrac{1}{2}\,G\,M\,\cancel{m} / r_{\text{órbita}}$$

Despejando v_{suelo} después de sustituir $G\,M = g\,R^2$, queda

$$v^2_{\text{suelo}} = \frac{-G\,M}{r_{\text{órbita}}} + 2\cdot\frac{G\,M}{R} = G\,M\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r_{\text{órbita}}}\right) = g\,R^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r_{\text{órbita}}}\right)$$

$$v_{\text{suelo}} = \sqrt{g\,R^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r_{\text{órbita}}}\right)} = \sqrt{3{,}7\,[\mathrm{m/s^2}]\cdot(3{,}4\times10^6\,[\mathrm{m}])^2\left(\frac{2}{3{,}4\times10^6\,[\mathrm{m}]} - \frac{1}{9{,}4\times10^6\,[\mathrm{m}]}\right)} = 4{,}5\times10^3\ \mathrm{m/s}$$

Teoría

[1 PUNTO /UNO]

1. El valor del campo gravitatorio terrestre es menor en un punto que está:
   A. Sobre la superficie terrestre.
   B. En el fondo de un pozo a una distancia $r = ¾\,R_T$ del centro de la Tierra.
   C. A una altura $h = ¼\,R_T$ sobre el suelo. (R_T = radio de la Tierra)

Solución: C

b) La gravedad terrestre varía con la profundidad:
Se suponemos la Tierra como una esfera maciza homogénea de densidad ρ, el campo gravitatoria en un punto de una esfera interior depende únicamente de la masa encerrada por esa esfera. (La masa no exterior de esa esfera produce un campo gravitatorio nulo, por el teorema de Gauss).
Si se llama M a la masa de la Tierra, R a su radio y r a la distancia al centro del punto donde se quiere determinar el valor del campo gravitatorio g, entonces

$$g = G\,m / r^2$$

en el que m es la masa de la esfera de radio r.
Si la esfera es homogénea, se calcula la masa m a partir de la densidad:

$$m = \rho V_r = \rho\,(4/3)\,\pi\,r^3$$

Por tanto

$$g = G\,m / r^2 = G\ \rho\,(4/3)\,\pi\,r^3 / r^2 = (4/3)\,\pi\rho\,G\,r$$

Como en la superficie de la Tierra el valor del campo gravitatorio es

$$g_0 = G\,M / R^2$$

Substituyendo la masa de la Tierra M en función de la densidad ρ:

$$M = \rho V_R = \rho\,(4/3)\,\pi\,R^3$$

$$g_0 = G\,M / R^2 = G\,\rho\,(4/3)\,\pi\,R^3 / R^2 = (4/3)\,\pi\rho\,G\,R$$

Dividiendo la expresión de la intensidad de campo a una distancia r del centro entre el valor en la superficie:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi\,\rho\,G\,r}{\frac{4}{3}\pi\,\rho\,G\,R} = \frac{r}{R}$$

$$g = g_0\,(r / R)$$

por lo que la gravedad disminuye con la profundidad ($r < R \Rightarrow g < g_0$)
A una distancia $r = ¾ R_T$,

$$g = ¾\, g_0 = 0{,}75\, g_0$$

c) La gravedad terrestre varía con con la altura.
La intensidad del campo gravitatorio g creado por una masa M esférica a una distancia r del centro, en el exterior de la esfera es:

$$g = G\, m / r^2$$

Para la Tierra, a una altura $h = r – R,$ de la superficie

$$g_h = G\, M / (R + h)^2$$

Comparando con el valor en la superficie de la Tierra

$$g_0 = G\, M / R^2$$

Dividiendo ambas expresiones

$$\frac{g_h}{g_0}=\frac{\dfrac{GM}{(R+h)^2}}{\dfrac{GM}{R^2}}=\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

por lo que la gravedad disminuye con la altura ($h > 0 \quad \Rightarrow g_h < g_0$)
A una altura $h = ¼ R_T$,

$$r = R_T + h = R_T + ¼\, R_T = 5/4\, R_T$$
$$g_h = g_0\, R^2_T / (5/4\, R_T)^2 = 0{,}64\, g_0$$

que es menor que en el suelo y que en el interior a una profundidad de $r = ¾ R_T$

Análisis: Es consecuente con el hecho de que en el interior de la Tierra la gravedad disminuye linealmente y en el exterior varía con el inverso al cuadrado de la distancia, es decir, más rápidamente.

2. ¿Cuál debería ser la duración T del día en un planeta de radio R y campo gravitatorio g para que un objeto en su ecuador pesase la mitad que otro igual en un polo?
   A. $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ B. $T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ C. $T=2\pi\sqrt{\frac{R/2}{g}}$

Solución: B

Debido a la rotación del planeta alrededor de su eje, la aceleración de la gravedad g_E en el ecuador del planeta es inferior al valor del campo gravitatorio. La diferencia es:

$$g_E = g – a_N = g – v^2 / R$$

en la que R es el radio del planeta, y v el valor de la velocidad lineal de un punto del ecuador respecto al eje de giro del planeta.
En un movimiento circular, la velocidad lineal v es proporcional a la velocidad angular,

$$v = \omega\, R$$

siendo R el radio de la circunferencia.
La velocidad angular es inversamente proporcional al período

$$\omega = 2\, \pi / T$$

de donde

$$v = \omega\, R = 2\, \pi\, R / T$$

Substituyendo

$$g_E=g-\frac{v^2}{R}=g-\frac{\left(\dfrac{2\pi R}{T}\right)^2}{R}=g-\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Si el peso en el ecuador es la mitad del peso en el polo,

$$m\, g_E = m\, g / 2$$
$$g_E = g / 2$$

Sustituyendo g_E

$$\frac{g}{2}=g-\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

$$\frac{g}{2}=\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

Despejando *T*:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

3. Las órbitas planetarias son planas porque:
   A. Los planetas tienen movimiento circular uniforme.
   B. No varía el momento angular al ser una fuerza central.
   C. No varía el momento lineal de los planetas en su recorrido.

Solución: B

La fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre los planetas es una fuerza central, es decir, está dirigida en todo momento hacia el Sol y depende de la distancia (es inversamente proporciona al cuadrado de la distancia).
Como consecuencia, el momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ es un vector constante.
Si hallamos la derivada del momento angular respecto al tiempo
$d\,\mathbf{L} / dt = d\,(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) / dt = d\mathbf{r} / dt \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times d\,(m\mathbf{v}) / dt\,) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$
porque $\mathbf{v}$ y $m\mathbf{v}$ son vectores paralelos y $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ también, por ser una fuerza central.
Si el vector momento angular es constante, su dirección no varía. Como el vector momento angular es siempre perpendicular a los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ (por ser su producto vectorial), el plano que los contiene en un instante, no puede variar con el tiempo, por lo que la trayectoria tiene que ser plana.

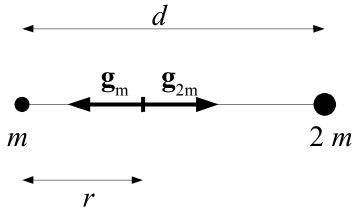
4. Dadas dos masas *m* y 2 *m* separadas una distancia *d*, justifica si hay algún punto intermedio de la recta de unión que cumpla:
   A) Campo nulo y potencial positivo.
   B) Campo nulo y potencial negativo.
   C) Campo y potencial positivos.

Solución: B

O potencial será sempre negativo, xa que o potencial gravitatorio V_G nun punto á unha distancia *r* dunha masa *M* é:

$$V_G=\frac{E_P}{m}=-G\frac{M}{r}$$

e a suma dos potenciais debidos a varias masas serán tamén negativos.



O punto A entre *m* e 2*m*, no que o campo gravitatorio se anule, atoparase a una distancia *r* de masa *m* que cumpra que:

$$\mathbf{g}_m + \mathbf{g}_{2m} = \mathbf{0}.$$

Supoñendo que *m* atópase na orixe de coordenadas e 2*m* no eixo X, cumprirase que:

$$-G\frac{m}{r^2}\vec{\mathbf{i}}+\left(-G\frac{2m}{(d-r)^2}\right)(-\vec{\mathbf{i}})=0\,\vec{\mathbf{i}}$$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{2}{(d-r)^2}$$

$$\frac{(d-r)}{r}=\sqrt{2}$$

$$r=\frac{d}{(\sqrt{2}+1)}=0{,}414\,d$$