

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Física

TEMA 2.

2º Bachillerato.
Física



Física

ESQUEMA DE LA UNIDAD

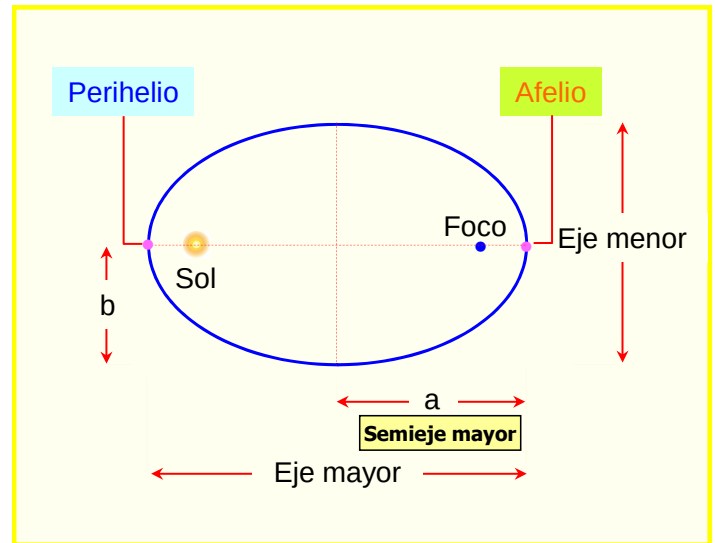
- ✓ 1. LAS LEYES DE KEPLER.
- ✓ 2. NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.
- ✓ 3. CAMPO GRAVITATORIO.
- ✓ 4. ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO.
- ✓ 5. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATELITES Y PLANETAS.

1 LAS LEYES DE KEPLER

Física

Las leyes de Kepler. Primera ley

- Tras cuatro años de observaciones sobre Marte, llegó a la conclusión de que los datos colocaban las órbitas **ocho minutos de arco** fuera del esquema circular de Copérnico
- Comprobó que este hecho se repetía **para todos los planetas**
- Descubrió que la **elipse** era la curva que podía definir el movimiento planetario
- La posición del extremo del semieje mayor más **alejada** del Sol se llama **afelio**
- La posición más **cercana**, es el **perihelio**



Primera ley: Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, estando situado este, en uno de sus focos

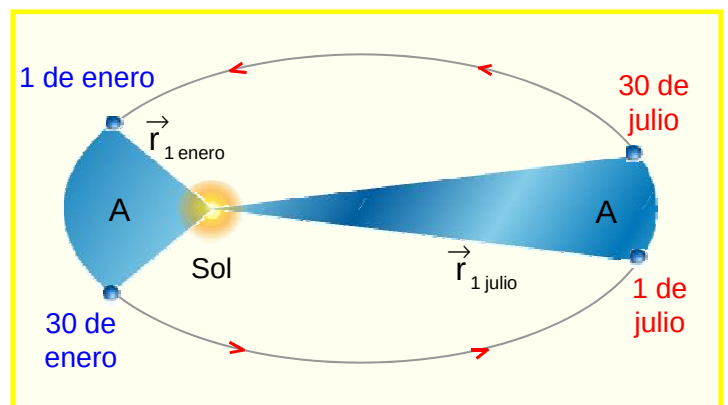
1 LAS LEYES DE KEPLER (II)

Física

Segunda ley de Kepler

- Kepler observó que **la velocidad** de los planetas **dependía** de su **posición** en la órbita

Segunda ley: La recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales



- El módulo del producto vectorial de 2 vectores **es el área** del paralelogramo que forman.

Para un triángulo: $dA = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \wedge \vec{v} \right| dt$

Fuerza central $\rightarrow M = \vec{F} \wedge \vec{r} = F \cdot r \cdot \sin 0 = 0$

- Como en el sistema podemos considerar que no hay fuerzas externas, entonces $\vec{M} = 0$ y por tanto $\vec{L} = \text{cte}$. A partir de aquí se deduce que la velocidad areolar también es constante ya que es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \wedge \vec{v} \right| = \frac{1}{2} \frac{|\vec{L}|}{m} = \text{cte}$$

$$dL/dt = \vec{r} \wedge m \, dv/dt = \vec{r} \wedge m \vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M} \rightarrow \vec{M} = dL/dt$$

siendo dA/dt la **velocidad areolar**

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot m \cdot \vec{v} \cdot \sin \theta = \text{cte} \rightarrow \vec{r}_a \cdot \vec{v}_a = \vec{r}_p \cdot \vec{v}_p$$

1 LAS LEYES DE KEPLER (III)

Física

Tercera ley de Kepler

- Sirvió como **base de la ley de Newton** de la gravitación universal, y **permitió calcular la masa de los planetas**
- Cada planeta, parecía tener su **órbita propia y su velocidad independiente** del resto. Buscó la regla y encontró la solución en las medidas de **Tycho Brahe**
- Esta ley muestra la **relación entre los tamaños de las órbitas y el tiempo** empleado por los planetas **en recorrerlas**

Tercera ley: El cuadrado de los periodos de revolución de los planetas alrededor del Sol (T) es proporcional a los cubos de los semiejes mayores, o radios medios, de sus órbitas (a), $T^2 = Ka^3$ siendo K una constante igual para todos los planetas

- Como el sistema solar es un **sistema aislado de fuerzas**, $\sum \vec{M} = 0$, por tanto se conserva el momento angular $\vec{L} = \text{cte}$
- La conservación de la dirección y el sentido obliga a que los planetas **siempre giren en el mismo sentido y en órbitas planas** ($L = \text{cte} \rightarrow r$ y v siempre perpendiculares)
- La conservación del módulo **justifica la ley de las áreas**

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

Como k es igual para todos los planetas, La relación entre los periodos de dos planetas es:

2 NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

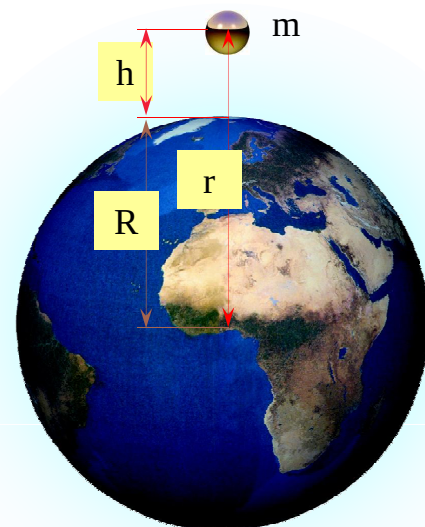
Física

Newton y la gravitación universal

- La atracción de la esfera actúa como si toda su masa estuviese concentrada en el centro
- Si M es la masa de la Tierra y R su radio, la fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa m situado a una altura h sobre su superficie responde a la ley de Newton:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

- A partir de esta ley, Newton pudo explicar fenómenos tales como:
 - las protuberancias de la Tierra y de Júpiter a causa de su rotación
 - el origen de las mareas
 - las trayectorias de los planetas
 - la variación de la gravedad con la altura
 - el cambio en el eje de rotación de la Tierra, etc



$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$

2 NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL (II)

Aplicaciones de la ley de la gravitación

- **H. Cavendish** verificó experimentalmente el valor de la constante **G**, y a partir de su valor, se puede deducir la tercera ley de Kepler de la gravitación universal de Newton
- En el sistema formado por un planeta en su giro en torno al Sol, **la única fuerza que mantiene a los planetas en su órbita es la fuerza centrípeta**

$$F_N = F_c \Rightarrow G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \text{Despejando } v \text{ resulta: } v = \sqrt{G \frac{M}{r}} \quad (1)$$

que es la velocidad de un planeta o satélite girando en una órbita de radio **r** alrededor de un cuerpo de masa **M**

- Como **v** es aproximadamente constante: $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} \quad (2)$
- Igualando (1) y (2): $\sqrt{G \frac{M}{r}} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow G \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (3^a \text{ ley de Kepler})$
- Este resultado **permite calcular la masa de cualquier planeta** conocido el período y el radio de uno de sus satélites
- Si **M** es la masa del Sol, el valor de la constante coincidirá con el valor que calculó Kepler

2 NEWTÓN Y LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL (III)

Deducción de la ley de Newton a partir de las leyes de Kepler

- Se supone que las órbitas descritas por los planetas en torno al Sol son circulares, sin que ello suponga cometer un gran error puesto que en realidad son prácticamente así

$$\left. \begin{array}{l} \text{• Velocidad angular del planeta: } \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \text{• Su aceleración centrípeta: } a = \omega^2 R \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

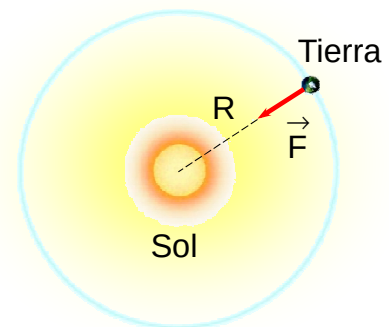
$$\text{• Por la 3ª ley de Kepler } (T^2 = kR^3): a = \frac{4\pi^2}{kR^3} R = \frac{cte}{R^2}$$

- La fuerza **F** ejercida sobre un planeta de masa **m** es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

$$F = ma = cte \frac{m}{R^2}$$

- Dicha constante incluye la masa del Sol es decir: $cte = GM \Rightarrow$

$$F = G \frac{Mm}{R^2} \quad \text{Ley de la gravitación universal}$$



La ley de gravitación universal indica que la fuerza de interacción entre dos partículas materiales es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia

3 CAMPO GRAVITATORIO

Física

El campo gravitatorio

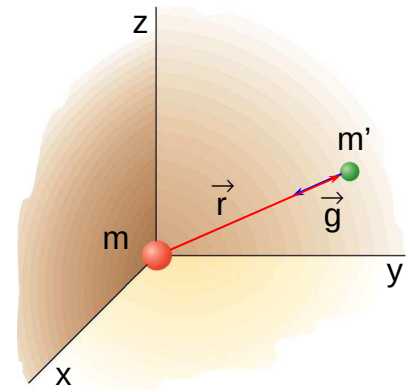
- La ecuación de Newton proporciona la expresión de la fuerza entre dos masas:

$$F = G \frac{M m}{R^2}$$

- Para explicar la acción que una masa ejerce sobre otra situada a cierta distancia, se introduce el concepto de **campo de fuerzas**
- La masa **m** hace que las propiedades del espacio que la rodea cambien, independientemente que en su proximidad se sitúe otra masa **m'**
- La intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto es la fuerza por unidad de masa, calculada en dicho punto

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M}{R^2}$$

y se expresa en N/kg en el S.I.



Decimos que existe un **campo de fuerzas** en un lugar del espacio si, al colocar en él un cuerpo de prueba, éste queda sometido a una fuerza.

- La fuerza gravitatoria sobre otra masa inmersa en el campo es:

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

Llamamos **campo gravitatorio** a la perturbación que un cuerpo produce en el espacio que lo rodea por el hecho de tener masa.

Física

3 CAMPO GRAVITATORIO (II)

El campo gravitatorio terrestre

- Cuando se trata de cuerpos extensos, se supone la **masa concentrada en el c.d.m.**, y además se considera para las distancias que $r = R_T + h$
- El **módulo** del campo gravitatorio creado es:

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

- En las proximidades de la superficie, donde **h** es **despreciable** frente al R_T puede considerarse:

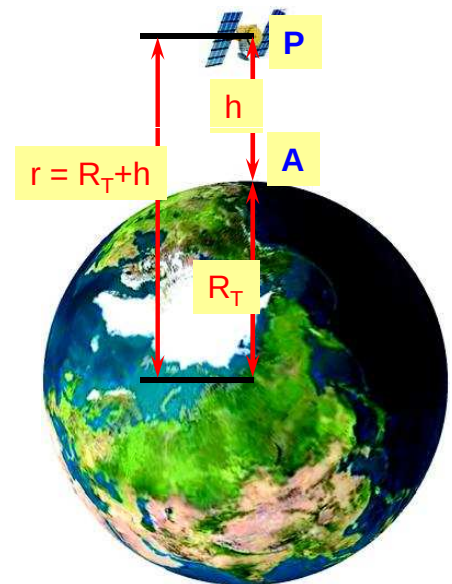
$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

- La **fuerza ejercida** sobre un cuerpo de masa **m** colocado a una altura **h** sobre la superficie terrestre será:

$$F = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = mg$$

El peso, P, de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. $P = mg$

La intensidad del **campo gravitatorio**, g, en un punto del espacio es la fuerza que actuaría sobre la unidad de masa situada en ese punto.



3 CAMPO GRAVITATORIO (III)

Física

Aplicación al cálculo del peso de un cuerpo a cierta altura

Si una persona pesa 686 N en la superficie de la Tierra, ¿cuánto pesará a 9000 m de altura?

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2}$; $R_T = 6370 \text{ km}$; $g_T = 9,8 \text{ m/s}^2$

- Cálculo de la masa en la superficie terrestre

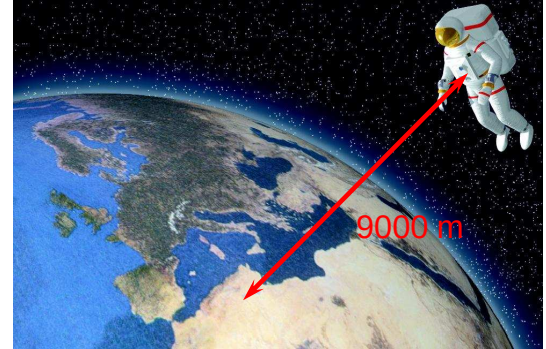
$$m = \frac{F_0}{g_0} = \frac{686}{9,8} = 70 \text{ kg}$$

- Cálculo del peso a 9000 m de altura

La fuerza gravitatoria tanto a dicha distancia como sobre la superficie terrestre es:

$$\left. \begin{aligned} F &= G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \\ F_0 &= G \frac{M_T m}{R_T^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{F}{F_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \Rightarrow F = \frac{F_0 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{(6370 \cdot 10^3 + 9000)^2} = 684,06 \text{ N}$$

Luego el peso de la persona a 9000 m será: **$F = 684,06 \text{ N}$**

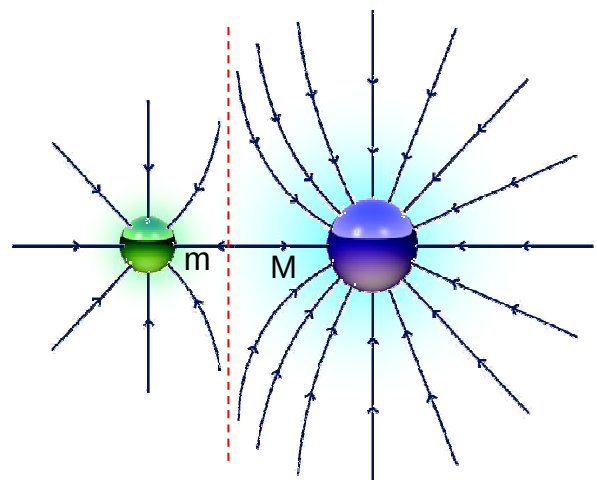


3 CAMPO GRAVITATORIO (IV)

Física

Representación del campo

- Los **campos de fuerzas** se representan mediante **líneas de campo**
- En el **campo gravitatorio**, las líneas de campo no parten de ningún punto definido, **carecen de fuentes**, y acaban en los cuerpos con masa o **sumideros** (**Campos Centrales**)



Características de las líneas de campo

- **Módulo:** se indica mediante la densidad de líneas de campo
- **Dirección del campo** en un punto es la tangente a la línea en dicho punto
- **El sentido** viene indicado por la flecha, y es el que seguiría la unidad de masa colocada en dicha línea por efecto de las fuerzas del campo

3 CAMPO GRAVITATORIO (V)

Física

Principio de superposición

- La intensidad del campo en un punto P, creado por un conjunto de masas puntuales, se obtiene calculando la intensidad de campo creada por cada una de las partículas y sumando los resultados parciales

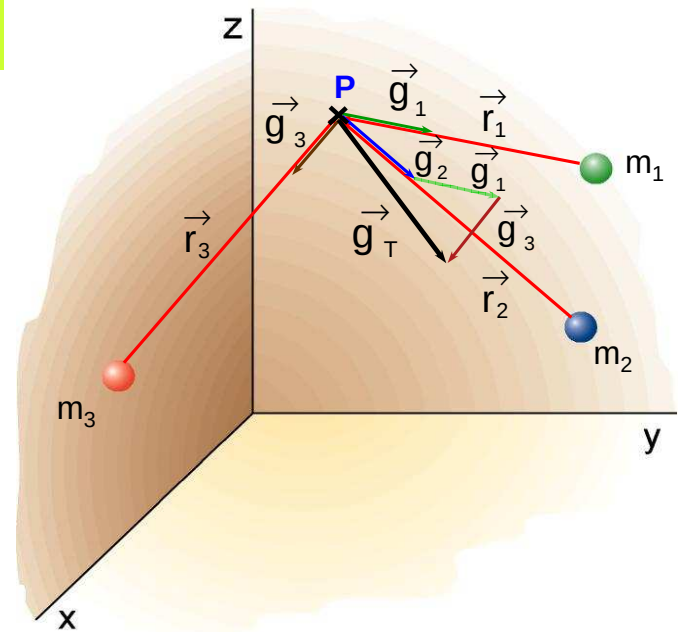
$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \dots + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^n \left(-G \frac{m_i}{|\vec{r}_i|^2} \cdot \vec{u}_i \right)$$

$$\text{siendo } \vec{u}_i = \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$$

- También se puede aplicar al cálculo de la fuerza ejercida sobre cierta masa por la acción de un conjunto discreto de ellas

$$\vec{F}_T = m \vec{g}_T = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Si un cuerpo está sometido a la acción de varias fuerzas gravitatorias, el efecto total resultante es la suma de los efectos individuales de cada fuerza



4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO

Campos de fuerzas conservativos (I)

- Sea una partícula de masa m situada en el seno de un campo de fuerzas
- Por cada desplazamiento $\Delta \vec{r}$ que realice la partícula, la fuerza del campo realiza un trabajo:

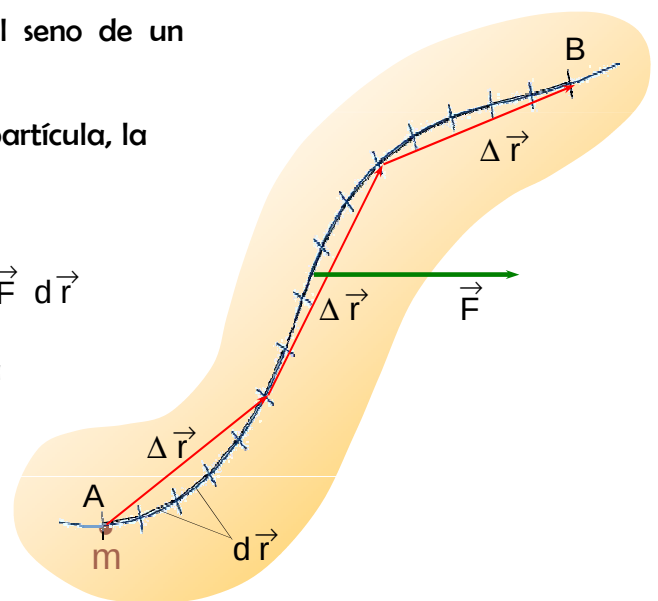
$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

- Para desplazamientos infinitesimales: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

- El camino total desde un punto A a otro B es la suma de todos los $d\vec{r}$

- Si en cada $d\vec{r}$ se realiza un trabajo dW , el trabajo total será la suma de todos los realizados en cada intervalo infinitesimal:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Campos de fuerzas conservativos son aquellos en los que el trabajo depende solo de los puntos inicial y final, y no del camino seguido

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (II)

Campos de fuerzas conservativos (II)

- En un campo de fuerzas conservativo, el resultado de la integral del trabajo realizado para ir desde A hasta B puede expresarse como una nueva función, E_p que depende solo de los puntos inicial y final

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B)$$

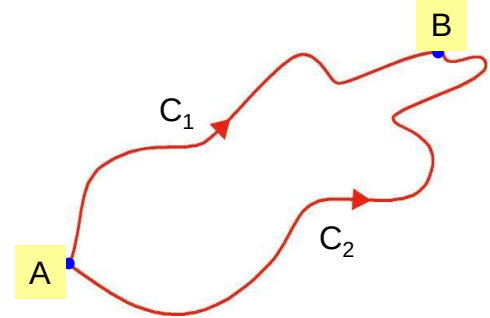
- Si el campo de fuerzas es conservativo,

$$W_{A \rightarrow C_1 \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C_2 \rightarrow B}$$

- Si se invierte el segundo camino,

$$W_{A \rightarrow C_2 \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow C_2 \rightarrow A} \Rightarrow W_{A \rightarrow C_1 \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow C_2 \rightarrow A}$$

$$W_{A \rightarrow C_1 \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C_2 \rightarrow A} = 0$$



Cuando un cuerpo se desplace por una **trayectoria cerrada** en un campo de fuerzas conservativo, **el trabajo total** realizado por las fuerzas del campo **es nulo**

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (IV)

Energía potencial

- Una característica de los **campos conservativos** es que puede definirse una magnitud denominada **energía potencial**
- Los **cambios** producidos en la energía potencial, indican el **trabajo realizado** por las fuerzas del campo
- Este trabajo **no depende del camino recorrido** sino de las posiciones inicial (A) y final (B) en las que se encuentra el cuerpo

$$W_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B) \Rightarrow W = -\Delta E_p$$

Teorema de la energía potencial: En un campo conservativo el trabajo realizado por las fuerzas del campo es igual a la variación de la energía potencial cambiada de signo

- Conocido el valor de la fuerza: $\Delta E_p = - \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$
- Considerando incrementos diferenciales: $dE_p = - \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- Integrando: $E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- Si se integra la fuerza del campo entre dos puntos A y B del campo gravitatorio, se obtiene la **diferencia de potencial**

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (V)

Energía potencial gravitatoria

- Para calcular su valor, basta con resolver:

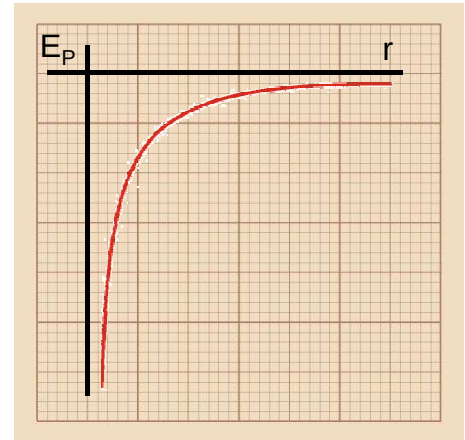
$$dE_p = - \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow dE_p = G \frac{mm'}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

- El trabajo realizado es máximo cuando los desplazamientos ($d\vec{r}$) están en la misma dirección que $\vec{r}$, y así el producto escalar $\vec{r} \cdot d\vec{r}$ se reduce al producto de los módulos:

$$E_p = \int G \frac{mm'}{r^2} dr \Rightarrow E_p = -G \frac{mm'}{r} + C$$

- La Energía potencial gravitatoria es cero cuando r tiende a infinito, y por tanto $C = 0$, luego:

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$



4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (VI)

Potencial gravitatorio

- Por ser el campo gravitatorio conservativo, se puede definir una magnitud que depende únicamente del cuerpo m que crea el campo y no del m' que se coloca como testigo
- Dicha magnitud se denomina **potencial U** y se obtiene así:

$$dV = - \vec{g} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V = -G \frac{M}{r}$$

- La **diferencia de potencial** entre dos puntos A y B cuyas distancias al origen son r_A y r_B respectivamente es:

$$V(A) - V(B) = -G \frac{m}{r_A} + G \frac{m}{r_B}$$

El potencial en un campo gravitatorio es la energía potencial por unidad de masa en ese punto.

$$W = -\Delta E_p = -m \Delta V = m (V_A - V_B)$$

Trabajo realizado por el campo gravitatorio para trasladar la masa del punto A al B.

4 ESTUDIO ENERGÉTICO DEL CAMPO GRAVITATORIO (VII)

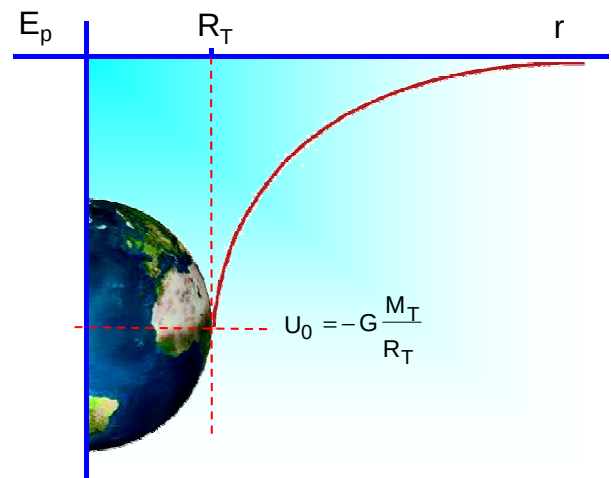
Potencial gravitatorio terrestre

- Se obtiene de la misma forma que en el caso de la energía potencial
- Para un punto P situado a una altura h de la superficie:

$$U(P) = -G \frac{M_T}{(R_T + h)}$$

- En la superficie, el potencial gravitatorio U_0 será:

$$U(P) = -G \frac{M_T}{R_T}$$



Energía potencial gravitatoria terrestre:

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

Aproximación cuando h sea despreciable frente a R_T

5 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS.

Satélites artificiales: energía total y energía de satelización

Cálculo de la velocidad del satélite en la órbita

$$\Sigma F = F_c \Rightarrow G \frac{M_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = G \frac{M_T}{r}$$

Cálculo de las energías cinética y potencial

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} \Rightarrow E_c = G \frac{M_T m}{2r}$$

$$E_p = -G \frac{M_T m}{r}$$

Cálculo de la energía total del satélite en órbita

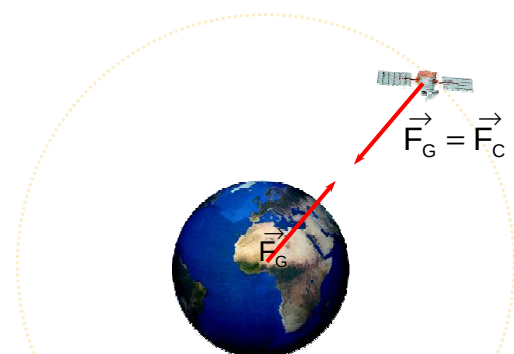
$$E = G \frac{M_T m}{2r} - G \frac{M_T m}{r} = -G \frac{M_T m}{2r} \Rightarrow E = -G \frac{M_T m}{2r}$$

Cálculo de la energía de satelización

$$E_0 = E_f \Rightarrow E_{c,0} + E_{p,0} = E_{c,f} + E_{p,f}$$

$$E_{c,0} - G \frac{M_T m}{R_T} = -G \frac{M_T m}{2r}$$

$$E_{c,0} = G M_T m \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right]$$



Esta fórmula solo puede usarse para cuerpos orbitando alrededor de otros. Para el resto:
 $E_m = E_c + E_p$

5 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS (II)

Velocidad de lanzamiento de un satélite

- A partir del valor de la E_c de satelización, la v_0 de lanzamiento necesaria para ponerlo en órbita circular desde la superficie terrestre, es:

$$E_{c,0} = \frac{1}{2} m v_0^2 = G M_T m \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right] \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 G M_T \left[\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right]}$$

Velocidad de escape de un satélite

$$\begin{aligned} E_0 &= E_f = 0 \\ E_e + E_{p0} &= 0 \end{aligned}$$

- Para que el satélite escape de la atracción terrestre, supondremos que se marcha al infinito, (r es infinito), y la energía de escape será:

$$E_e = G \frac{M_T m}{R_T}$$

- La velocidad de escape será:

$$\left. \begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} m v_e^2 \\ g_0 &= \frac{G M_T}{R_T^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_e = \sqrt{2 g_0 R_T}$$



5 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES Y PLANETAS (III)

Aplicación al cálculo de la energía mecánica de un satélite

Dos satélites artificiales de masa m y $2m$, respectivamente, describen órbitas circulares del mismo radio $r = 2R$, siendo R el radio de la Tierra. Calcular la diferencia de las energías mecánicas de ambos satélites

- La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial, y cuyo valor es:

$$E = \frac{E_p}{2} = - G \frac{M_T m}{2r}$$

Satélite 1, de masa m : $E_1 = - G \frac{M_T m}{2 (2R)} = - G \frac{M_T m}{4R}$

Satélite 2, de masa $2m$: $E = - G \frac{M_T (2m)}{2 (2R)} = - G \frac{M_T m}{2R}$

Su diferencia es: $E_2 - E_1 = - G \frac{M_T m}{4R}$

