Cuestiones previas (página 36)

1. ¿Se mueve nuestro planeta a la misma velocidad en todos los puntos de su órbita alrededor del Sol?

No, porque según la segunda ley de Kepler cuanto mayor sea la distancia entre el Sol y la Tierra, menor será la velocidad. La Tierra se mueve más deprisa en el perihelio que en el afelio, pero barre áreas iguales en tiempos iguales.

2. ¿Por qué razón la mayoría de los cuerpos que componen el sistema solar orbitan en torno al Sol casi en el mismo plano?

Porque el momento angular de traslación de un planeta alrededor del Sol permanece constante en dirección.

3. ¿Por qué el eje de rotación terrestre se mantiene paralelo a sí mismo mientras la Tierra orbita en torno al Sol?

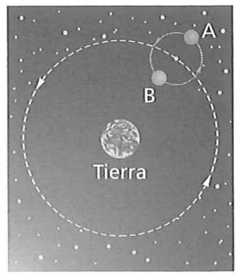
Por la ausencia de momentos de fuerza netos actuando sobre la Tierra. Esto explica la secuencia regular de las estaciones.

4. Se afirma que la fusión de los casquetes polares por un aumento de la temperatura planetaria produciría un ligero alargamiento de los días. ¿Sabes por qué?

La distribución de masa varía, y por tanto el momento de inercia. La conservación del momento angular exige que varíe la velocidad angular.

Actividades (páginas 37/57)

1 A la vista de la figura, ¿en qué punto del epiciclo se vería más brillante el planeta desde la Tierra? ¿En qué zona del epiciclo parecería retrogradar el planeta si el centro del epiciclo no se moviera?



Se vería más brillante en el punto B, y parecería retrogradar también cuando el planeta estuviera recorriendo el tramo de epiciclo próximo a B. Obsérvese que ambos giros se producen en sentido antihorario.

2 ¿Qué observaciones realizó Galileo para comprobar la ausencia de paralajes?

Galileo comprobó que las estrellas no parecían aumentar a través del telescopio, lo cual le hizo pensar que estaban muy lejos, tanto que no era posible detectar ningún paralaje.

3 Los seis meses transcurridos entre el 21 de marzo y el 21 de septiembre tienen más días que los comprendidos entre el 21 de septiembre y el 21 de marzo. ¿Se te ocurre alguna razón? ¿Entre qué fechas estará más próxima la Tierra al Sol?

En efecto, el tiempo comprendido entre el equinoccio de septiembre y el de marzo es menor que el que transcurre entre el equinoccio de marzo y el de septiembre. La razón es que ni la órbita terrestre es un círculo perfecto ni el Sol está en su centro. En consecuencia, y de acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad orbital de la Tierra es algo mayor cuanto más próxima está al Sol, cosa que ocurre durante el invierno boreal.

4 PAU A partir de los datos orbitales terrestres con respecto al Sol ($T = 365$ días y $r_{\text{Sol-Tierra}} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m), determina cuánto tarda Júpiter en completar una órbita alrededor del Sol (en segundos y años terrestres) sabiendo que su distancia al Sol es de $7{,}78 \cdot 10^{11}$ m.

Dato: el valor de la constante de Kepler, k, es el mismo para todos los planetas que orbitan alrededor del Sol.

De la tercera ley de Kepler sabemos que:

$$T^2 = kR^3 \Rightarrow \frac{T^2_{\text{Júpiter}}}{R^3_{\text{Júpiter}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}}$$

Por tanto:

$$T^2_{\text{Júpiter}} = T^2_{\text{Tierra}} \left(\frac{R_{\text{Júpiter}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3 = 1{,}87 \cdot 10^7$$

$$T_{\text{Júpiter}} = 4\,328{,}77 \text{ días} = 11{,}86 \text{ años} = 3{,}74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

5 Si una partícula se mueve a lo largo de una recta, ¿tendrá momento angular cero con respecto a un origen cualquiera elegido al azar? ¿Tendrá momento angular cero con respecto a algún origen específico? Razona tu respuesta.

Su momento angular no será cero, salvo que el origen elegido se encuentre en la recta del movimiento, en cuyo caso $\vec{r}$ y $\vec{p}$ serían paralelos.

6 Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve a lo largo de una recta con una velocidad constante $\vec{v} = 3\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al origen (0, 0) cuando el cuerpo está en los puntos (2, 0), (2, 1) y (2, 2) de la misma recta. ¿Qué conclusión obtienes respecto del momento angular de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme?

Punto (2, 0): $\vec{r} = 2\vec{i}$ m

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Punto (2, 1): $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Punto (2, 2): $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

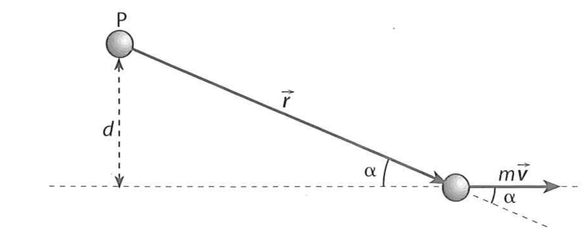
En consecuencia, el momento angular de un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme es constante.

7 Demuestra que el momento angular de una partícula de masa m, que se mueve con velocidad v a lo largo de una recta cuya distancia mínima al origen es d, es constante y tiene por valor $L = mvd$ en cualquier punto de la trayectoria.

El módulo del momento angular viene dado por la expresión:

$$L = rmv \operatorname{sen} \alpha$$

donde α es el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Sin embargo, como puede comprobarse en la figura:



$$r \operatorname{sen} \alpha = d$$

Por lo que:

$$L = mvd = \text{constante}$$

8 PAU ¿Permanece constante el momento angular de un electrón en una órbita determinada según el modelo de Bohr? Explícalo.

El segundo postulado de Bohr establece, efectivamente, la constancia de dicha magnitud como consecuencia del carácter central de la fuerza electrostática entre núcleo y electrón. De ahí también que el modelo de Bohr supusiera órbitas planas para el movimiento de los electrones.

9 Teniendo en cuenta tu respuesta a la actividad anterior, ¿puede usarse el valor del momento angular para caracterizar una determinada órbita? ¿Conoces algún número cuántico referido al momento angular?

Efectivamente, al tener valor constante para cada órbita, el momento angular sirve para caracterizar las órbitas del átomo de Bohr. El número cuántico referido al momento angular es n, el número cuántico principal.

10 ¿Qué significado físico tiene el postulado de Bohr según el cual $mvr = \dfrac{nh}{2\pi}$?

La formulación del segundo postulado de Bohr es:

$$L = m_e vr = n\hbar$$

Luego el momento angular caracteriza las distintas órbitas de Bohr a través del número cuántico principal, n.

11 PAU Una pelota unida a una cuerda se hace girar en círculos horizontales alrededor de un eje, permitiendo que la cuerda se vaya arrollando en torno a dicho eje. ¿Permanece constante, aumenta o disminuye la velocidad de la pelota a medida que la cuerda se arrolla? ¿Cómo lo explicarías en términos del momento angular?

Suponiendo que el efecto del peso es pequeño en el lapso de tiempo considerado, puede afirmarse que el momento angular es constante, es decir:

$$L = mvr = \text{constante}$$

Puesto que el radio disminuye al ir enrollándose la cuerda, para mantener L constante es preciso que la velocidad vaya aumentando progresivamente.

12 PAU Teniendo en cuenta que la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ kg, que su distancia media al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m y que su período orbital es de 365 días, determina:

***a)* El valor de su momento angular de traslación respecto al Sol.**

***b)* La velocidad areolar del movimiento de traslación terrestre (expresando sus unidades).**

***c)* A partir del valor anterior y dando por cierto que la distancia al Sol permanece invariable en el transcurso de un día, determina qué distancia recorre la Tierra en un día durante su movimiento orbital. Compáralo con el que se obtendría al dividir la longitud orbital entre los 365 días.**

a) El momento angular de traslación es:

$$L = mrv = mr^2\omega = 6 \cdot 10^{24} \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \cdot \frac{2\pi}{(365 \cdot 24 \cdot 3\,600)}$$

$$L = 2{,}675 \cdot 10^{40} \text{ kg m/s}^2$$

b) La velocidad areolar del movimiento de traslación es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}(1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3\,600} = 2{,}23 \cdot 10^{15} \text{ m}^2\text{/s}$$

c) A partir de la velocidad areolar podemos determinar el área que barre la Tierra en un día:

$$A_{\text{día}} = v_{\text{areolar}} \cdot 24 \cdot 3\,600 = 1{,}926 \cdot 10^{20} \text{ m}^2$$

Para desplazamientos pequeños comparados con la órbita completa, como es el recorrido de un día, se puede aproximar el área barrida al área del triángulo (figura 1.21):

$$A = \frac{Rd}{2} = 1{,}926 \cdot 10^{20} \text{ m}^2$$

De donde resulta que el desplazamiento d de un día es:

$$d = 2{,}575 \cdot 10^9 \text{ m} = 2{,}575 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Por otro lado, sabemos que la Tierra describe aproximadamente una circunferencia, luego la distancia recorrida en un día será la longitud de dicha circunferencia dividida por 365:

$$d = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{365} = 2{,}575 \cdot 10^6 \text{ km}$$

13 Demuestra que la constancia del momento angular orbital es coherente con la segunda ley de Kepler. Razona si dicha constancia es también coherente con la primera ley.

Como sabemos, la velocidad areolar es equivalente a $L/2m$. Si el momento angular es constante, lo será la velocidad areolar. Esta constancia es la que establece la segunda ley de Kepler.

Por otro lado, si el momento angular es constante, la órbita debe quedar siempre forzosamente en el mismo plano, que es lo que afirma la primera ley de Kepler.

14 Determina la posición del centro de masas del sistema constituido por tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, y $m_3 = 6$ kg, situadas, respectivamente, en los puntos (0, 3, 1), (4, 1, 2) y (5, 0, 0). Expresa su posición en notación vectorial.

Hacemos uso de la expresión 1.12:

$$m_{\text{total}}\vec{r}_{\text{CM}} = 2(0\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) + 4(4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + 6(5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})$$

$$m_{\text{total}}\vec{r}_{\text{CM}} = 46\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = 3{,}83\vec{i} + 0{,}83\vec{j} + 0{,}83\vec{k}$$

15 Una partícula de 4 kg se mueve en la dirección del eje X con una velocidad de 3 m/s, y otra de 2 kg lo hace en la misma dirección con una velocidad de −2 m/s. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? ¿Y el momento lineal total del sistema?

Aplicando la expresión 1.14:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{4 + 2}\vec{i} = \frac{8}{6}\vec{i} = \frac{4}{3}\vec{i} \text{ m/s}$$

Y, por tanto:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = 8\vec{i} \text{ kg m/s}$$

16 Tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, y $m_3 = 1$ kg, se mueven según las trayectorias $\vec{r}_1 = t^2\vec{i} - 2t\vec{j}$ m, $\vec{r}_2 = 3t^3\vec{i} - t\vec{j} + t^2\vec{k}$ m y $\vec{r}_3 = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}$ m, respectivamente. Calcula:

***a)* $\vec{r}_{\text{CM}}$ en función del tiempo y en $t = 1$ s.**

***b)* El momento lineal del sistema en $t = 1$ s.**

***c)* La fuerza neta que opera sobre el sistema.**

***d)* La aceleración del centro de masas.**

a) Aplicando la expresión 1.12, se obtiene:

$$\vec{r}_{\text{CM}}(t) = \frac{(1{,}5t^3 + 2t^2 + 2t)\vec{i} - 2{,}5t\vec{j} + (0{,}5t^2 + t)\vec{k}}{3{,}5}$$

Por lo que:

$$\vec{r}_{\text{CM}}(1) = 1{,}57\vec{i} - 0{,}71\vec{j} + 0{,}43\vec{k} \text{ m}$$

b) Teniendo en cuenta que:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = m_{\text{total}}\vec{v}_{\text{CM}} = m_{\text{total}}\frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt}$$

se obtiene:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = (4{,}5t^2 + 4t + 2)\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + (t + 1)\vec{k} \text{ kg m/s}$$

Y, por tanto, en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 10{,}5\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + 2\vec{k} \text{ kg m/s}$$

c) Como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

entonces:

$$\vec{F} = (9t + 4)\vec{i} + \vec{k} \text{ N}$$

d) La aceleración del centro de masas será:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{m_{total}} = \frac{9t+4}{3{,}5}\vec{i} + \frac{1}{3{,}5}\vec{k} \text{ m/s}^2$$

17 ¿Crees que puede considerarse el momento de inercia una propiedad fundamental de la materia del mismo modo que la masa?

El momento de inercia no es una propiedad de la materia. La masa es una propiedad inherente a todo cuerpo material, y su valor es característico de cada cuerpo o partícula; es decir, a cada cuerpo le corresponde una **única masa.** Por el contrario, un mismo cuerpo puede tener **infinitos momentos de inercia** en función del eje elegido.

18 Con el propósito de calcular el momento de inercia de un cuerpo en rotación, ¿puede considerarse la masa del cuerpo como si estuviese concentrada en el centro de masas? ¿Por qué?

No, porque en la determinación del momento de inercia es esencial la forma del cuerpo; si el eje de rotación pasara por el centro de masas, el momento de inercia sería cero. Eso ocurriría, por ejemplo, en el caso de una esfera homogénea (maciza o hueca) que girase alrededor de un eje que pasa por su centro; no puede suponerse que la masa de la esfera está concentrada en el centro de masas. Este concepto, sin embargo, sí es aplicable en la dinámica de traslación.

Existe, sin embargo, un equivalente al centro de masas en rotación, que sería aquel punto donde podemos suponer concentrada la masa del sólido, girando a una distancia tal del eje (distancia denominada **radio de giro**) que su momento de inercia con respecto a ese eje fuese igual al de todo el sólido. La localización de dicho punto es muy sencilla. Por ejemplo, si consideramos el caso de una esfera sólida homogénea de masa m que está rotando alrededor de un diámetro, la distancia (radio de giro) a la que estaría dicho punto especial se hallaría igualando el momento de inercia de la esfera con el que tendría toda su masa concentrada en dicho punto:

$$\frac{2}{5}mr^2 = mR^2$$

donde R es el radio de giro. Resolviendo, obtenemos:

$$R = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot r$$

19 PAU Si dos discos del mismo peso y espesor se hacen de metales de diferentes densidades, ¿tendrán el mismo momento de inercia? Si no es así, demuestra cuál de ellos tiene mayor momento de inercia.

Los dos discos tienen la misma masa y diferente densidad, por lo que tendrán también distinto volumen. Dado que el volumen viene dado por $\pi r^2 h$, donde r es el radio del disco, y h, su espesor, y puesto que tienen el mismo espesor, la diferencia de volumen se manifestará en distinto radio, que será mayor cuanto mayor sea el volumen, es decir, cuanto menor sea la densidad.

En el enunciado no se indica el eje de rotación alrededor del cual giran los discos. Supongamos que se trata de un eje que pasa por el centro y tiene la dirección perpendicular al disco. Según la expresión **1.17**, el momento de inercia es tanto mayor cuanto más alejadas del eje están las distintas partículas que forman el disco. Esta observación cualitativa es suficiente para concluir que el disco con mayor radio (menor densidad) tiene mayor momento de inercia. Se obtiene la misma conclusión si consideramos que el momento de inercia de un disco alrededor del eje indicado es $I = mr^2/2$, que será tanto mayor cuanto mayor sea el radio.

20 ¿Existe algún momento de fuerza responsable de la rotación de los planetas y satélites? ¿Qué consecuencias se extraen de tu respuesta?

Sobre cualquier punto de un planeta o satélite actúa principalmente la fuerza gravitatoria del Sol o, en el caso de los satélites, la que ejerce el planeta más próximo, y podría pensarse que existe un momento de fuerza. Sin embargo, al ser los planetas esféricos y presentar una distribución simétrica de la masa, la resultante de la fuerza gravitatoria debe pasar por el centro de los planetas o satélites, con lo cual el momento de fuerza resultante es nulo. En consecuencia, el momento angular de rotación de los planetas permanece constante.

21 Sobre la polea de la figura 1.39 (a) se ejerce directamente una fuerza de 30 N. Si el radio de la polea es de 10 cm, su masa es de 1,5 kg, y su momento de inercia viene dado por la expresión $I = 1/2\ mr^2$, ¿cuál será su velocidad angular al cabo de 10 s?

La fuerza $\vec{F}$ produce un momento que da lugar a la rotación de la polea. Como la fuerza es tangencial, el momento de fuerza vale $M = Fr$, donde r es el radio de la polea. Aplicando la expresión **1.19**, podemos obtener la aceleración angular y, de ese modo, la velocidad angular en función del tiempo:

$$F_r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

donde m es la masa de la polea. Resolviendo:

$$\alpha = \frac{2F}{mr} = 400 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega(t = 10 \text{ s}) = \alpha t = 4\,000 \text{ rad/s}$$

22 Fíjate en la figura 1.39 (b). ¿Se obtendría el mismo resultado si en lugar de ejercer directamente una fuerza de 30 N colgáramos un peso de 30 N?

El caso es, ahora, cualitativamente muy distinto, pues la fuerza tangencial cuyo momento produce la rotación de la polea es la tensión de la cuerda. Por una parte, tenemos la ecuación de traslación de la pesa:

$$P - T = m'a$$

y por otra, la de rotación de la polea:

$$Tr = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

Puesto que $a = \alpha r$, sustituyendo en la primera ecuación y resolviendo el sistema resultante, se obtiene:

$$\alpha = \frac{P}{\left(\frac{1}{2}m + m'\right)r} = 78{,}7 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega = \alpha t = 787 \text{ rad/s}$$

Resultado muy diferente, por tanto, al del caso anterior.

23 PAU Dos cuerpos esféricos en rotación alrededor del eje que pasa por sus respectivos centros tienen la misma masa pero distinta densidad. Si el momento angular de rotación de ambos es idéntico, ¿es entonces también idéntica su energía cinética de rotación?

A igualdad de masas, si las densidades de ambas esferas son distintas, también lo serán los volúmenes y, en consecuencia, los radios. Por otro lado, la energía cinética de rotación es:

$$E_{c\ rotación} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Ahora bien, $I = 2mR^2/5$, luego es diferente para ambas esferas. En consecuencia, la energía cinética de rotación también lo será.

24 Resuelve el orden de llegada a la base de un plano inclinado de altura h de los siguientes cuerpos: una esfera maciza, una esfera hueca, un cilindro macizo, un aro y un bloque rectangular de hielo.

Para los cuatro primeros objetos trabajaremos en el supuesto de ausencia de deslizamiento. En tal caso, la fuerza de rozamiento no realiza trabajo y la energía mecánica se mantiene constante en todo el proceso, es decir:

$$E_{p\ inicial} = E_{c\ base} = E_{c\ base\ traslación} + E_{c\ base\ rotación}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}\right)$$

Para el bloque de hielo, supondremos que no existe rozamiento, luego:

$$E_{p\ inicial} = E_{c\ base\ traslación}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

Por tanto, sin hacer ningún otro cálculo, vemos ya que el hielo es el cuerpo que llega antes, pues es el que alcanza la mayor velocidad. En cuanto a los cuatro cuerpos rodantes, vemos que cuanto mayor es su momento de inercia menor es su velocidad. En consecuencia, el orden de llegada será:

1. Bloque de hielo ($v^2 = 2gh$)
2. Esfera maciza ($v^2 = 10gh/7$)
3. Cilindro macizo ($v^2 = 4gh/3$)
4. Esfera hueca ($v^2 = 6gh/5$)
5. Aro ($v^2 = gh$)

25 Teniendo en cuenta los valores de los momentos de inercia ofrecidos en la figura 1.35, compara las velocidades al llegar a la base de un plano inclinado de altura h de una esfera maciza que se desliza y rueda.

a) Cuando la esfera se desliza, toda la energía potencial inicial se transforma en cinética traslacional, por lo que la velocidad del centro de masas en la base del plano será:

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) Cuando rueda, la energía potencial se transforma en traslacional del centro de masas y en rotacional de la esfera, de modo que:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 \Rightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}r^2\omega^2$$

Teniendo en cuenta que $\omega = v/r$, y resolviendo v, se obtiene:

$$gh = \frac{7}{10}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

velocidad que es menor que la anterior.

26 PAU Determina las aceleraciones de descenso de un cilindro macizo y de una esfera maciza, ambos de la misma masa y radio, que ruedan sin deslizarse por un plano inclinado de 30°.

***a)* Si la distancia que recorren en el plano es de 5 m, ¿con qué velocidad llega cada cuerpo a la base del plano?**

***b)* ¿Cuánto tarda cada uno en llegar a la base?**

a) Para cualquier cuerpo rodante que baja por un plano inclinado, la velocidad al llegar a la base viene dada por la expresión que vimos en la actividad 24:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr^2}}}$$

donde $h = d \operatorname{sen} \theta = 5 \operatorname{sen} 30° = 2{,}5$ m.

Así pues, para determinar la velocidad basta con sustituir el valor del momento de inercia y la altura recorrida. El momento de inercia del cilindro macizo es $mR^2/2$, mientras que el de la esfera maciza es $2mR^2/5$. Las velocidades de llegada de ambos cuerpos serán, por tanto:

$$v_{cilindro} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 5{,}72 \text{ m/s} \qquad v_{esfera} = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 5{,}92 \text{ m/s}$$

b) Tanto el cilindro como la esfera tienen un movimiento uniformemente acelerado, por lo que:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

Sustituyendo los valores de la velocidad final, resulta que $a_{cilindro} = 3{,}26$ m/s² y $a_{esfera} = 3{,}5$ m/s².

Por otro lado, sabemos que:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{10}{a}}$$

Sustituyendo los valores de la aceleración, resulta que:

$$t_{cilindro} = 1{,}75 \text{ s};\ t_{esfera} = 1{,}69 \text{ s}$$

Cuestiones y problemas (páginas 60/61)

Guía de repaso

1 ¿Qué innovaciones introdujo Ptolomeo en la teoría geocéntrica? ¿Qué problemas parecían resolver?

Véase el apartado «Teoría geocéntrica de Ptolomeo» (en el subepígrafe 1.1).

2 ¿Qué tipo de velocidad parece mantenerse constante en el transcurso del movimiento planetario?

La velocidad areolar.

3 Define la magnitud que se usa para describir el movimiento de traslación de los planetas. ¿Cuáles son sus características?

El momento angular (véase el subepígrafe 3.1).

4 ¿Qué agente dinámico puede producir cambios en el momento angular de un cuerpo?

El momento de una fuerza (consúltese el subepígrafe 3.2).

5 ¿En qué condiciones se mantiene constante el momento angular? Pon ejemplos de movimientos en los que permanece constante el momento angular.

Véase el subepígrafe 3.2. Son ejemplos de este tipo de movimiento los del sistema solar, el de un tiovivo, los saltos de trampolín, etcétera.

6 ¿Cuáles son los correspondientes símiles en la dinámica rotacional para fuerza, masa y momento lineal?

El momento de fuerza, el momento de inercia y el momento angular respectivamente.

7 ¿Qué es el centro de masas de un cuerpo? ¿Qué tiene de particular dicho punto?

Véase el epígrafe 4.

8 **Completa el siguiente cuadro:**

Cualidad	Magnitud y expresión en movimientos lineales	Magnitud y expresión en movimientos de rotación
Posición del móvil	x	θ
Velocidad del móvil	$v = \dfrac{dx}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
Aceleración tangencial	$a_t = \dfrac{dv}{dt}$	$a_t = \alpha r$
Aceleración centrípeta	$a_c = \dfrac{v^2}{r}$	$a_c = \omega^2 r$
Resistencia a modificar el estado de movimiento	m	I
Medida de la cantidad de movimiento	$\vec{p}$	$\vec{L}$
Agente capaz de variar la cantidad de movimiento	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Energía asociada al movimiento	$\dfrac{1}{2}mv^2$	$\dfrac{1}{2}I\omega^2$

Leyes de Kepler

9 **PAU** **La Estación Espacial Internacional (ISS) orbita a una altura media de 340 km sobre la superficie terrestre. Teniendo en cuenta que la distancia Tierra-Luna es de 380 000 km y que el período lunar es de $2{,}36 \cdot 10^6$ s, determina cuánto tarda la ISS en dar una vuelta completa a la Tierra.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

En el sistema gravitatorio formado por la Tierra y sus satélites se cumple la tercera ley de Kepler, es decir, los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas:

$$T^2 = kR^3$$

Por tanto:

$$\frac{T^2_{\text{Luna}}}{R^3_{\text{Luna}}} = \frac{T^2_{\text{ISS}}}{R^3_{\text{ISS}}} \Rightarrow T^2_{\text{ISS}} = \left(\frac{R_{\text{ISS}}}{R_{\text{Luna}}}\right)^3 T^2_{\text{Luna}}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$T^2_{\text{ISS}} = \left(\frac{6\,370 + 340}{380\,000}\right)^3 (2{,}36 \cdot 10^6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{ISS}} = 5\,537{,}38 \text{ s} = 92{,}3 \text{ min}$$

10 **Marte orbita a una distancia media de 1,517 UA alrededor del Sol. A partir de los datos orbitales terrestres, determina la duración del año marciano.**

Dato: 1 UA = distancia media Tierra-Sol

Sabemos que para el sistema gravitatorio formado por el Sol y sus satélites se debe cumplir la tercera ley de Kepler, es decir:

$$\frac{T^2_{\text{Marte}}}{R^3_{\text{Marte}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}} \Rightarrow T_{\text{Marte}} = \sqrt{\left(\frac{R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3}\, T_{\text{Tierra}}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

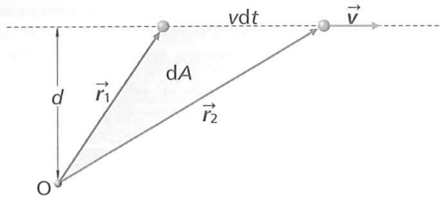
$$T_{\text{Marte}} = \sqrt{(1{,}517)^3}\, T_{\text{Tierra}} = 1{,}868 T_{\text{Tierra}} = 682 \text{ días}$$

Momento angular y su conservación en traslación

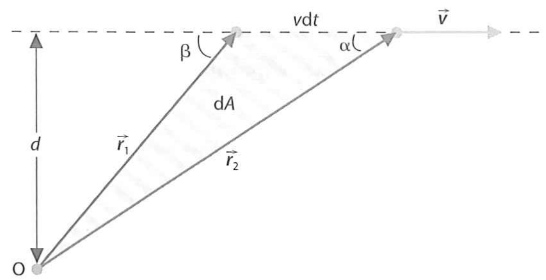
11 **Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Si la única información de que disponemos es que el momento de fuerza que actúa sobre ella es cero, respecto de un origen no especificado, ¿podemos concluir que la partícula se mueve con velocidad constante?**

No puede concluirse que la velocidad de la partícula sea necesariamente constante. Si el origen se encuentra en la recta del movimiento y la fuerza que actúa sobre la partícula tiene también esa dirección, entonces el momento de fuerza es nulo, pero la partícula no se moverá con velocidad constante.

12 **PAU** **Una partícula se mueve con velocidad constante v a lo largo de una recta cuya distancia a un origen O es d. Si en un tiempo dt el vector de posición barre un área dA, demuestra que la velocidad areolar es constante en el tiempo e igual a $L/2m$, expresión en la que L es el momento angular de la partícula con respecto al origen citado.**



Como puede observarse en la figura, el área dA señalada es la diferencia entre el área del triángulo en el que $\vec{r}_2$ es la hipotenusa y la de aquel en que $\vec{r}_1$ es la hipotenusa.



Así pues:

$$dA = \frac{1}{2} r_2 \cos\alpha \cdot d - \frac{1}{2} r_1 \cos\beta \cdot d =$$

$$= \frac{1}{2} d\,(r_2 \cos\alpha - r_1 \cos\beta) = \frac{1}{2} dvdt$$

Con lo que:

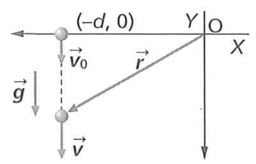
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{m}$$

13 **PAU** **A una partícula de masa m se le imprime una velocidad $-v_0\vec{j}$ en el punto $(-d, 0)$ y empieza a acelerarse en presencia de la gravedad terrestre.**

a) **Determina una expresión para el momento angular como función del tiempo, con respecto al origen.**

b) **Calcula el momento de fuerza que actúa sobre la partícula, en cualquier instante, con relación al origen.**

c) **Con los resultados obtenidos en *a)* y *b)*, comprueba que $M = dL/dt$.**



a) El momento angular viene dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde:

$$\vec{r} = -d\vec{i} + y\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = -mv\vec{j} \text{ kg m/s}$$

Así pues:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mv & 0 \end{vmatrix} = mvd\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

donde $v = v_0 + gt$, por lo que:

$$\vec{L} = m(v_0 + gt)\, d\vec{k} = (mv_0 d + mgdt)\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Es decir:

$$\vec{L} = (L_0 + mgdt)\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

b) El momento de fuerza es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = mgd\vec{k} \text{ N m}$$

c) Puede verse que:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(L_0 + mgdt)\vec{k}}{dt} = mgd\vec{k} \text{ N m}$$

D14 **PAU** **Una pequeña esfera de 300 g de masa atada a una cuerda de masa despreciable de 1 m de longitud gira con una velocidad de 2 m/s alrededor de un punto O de un eje en el plano horizontal. En cierto momento, la cuerda empieza a arrollarse alrededor de dicho punto, de modo que su longitud libre va decreciendo. Determina:**

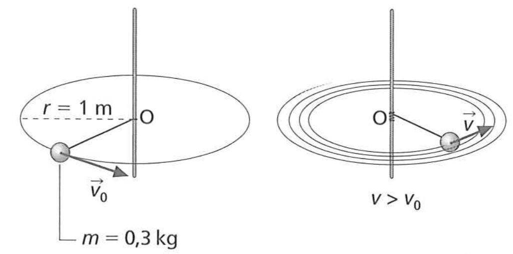
a) **El momento angular inicial alrededor del punto O.**

b) **El valor de la velocidad lineal de la pelota cuando se ha arrollado 0,75 m de cuerda.**

c) **Analiza la validez de la suposición que has hecho para resolver el apartado anterior.**

d) **Teniendo en cuenta que la variación en módulo de la velocidad lineal exige la existencia de una fuerza tangencial, realiza un diagrama de la situación y discute acerca de cómo aparece dicha fuerza tangencial y a qué se debe.**

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



a) Como se ve, el vector de posición es perpendicular en todo momento a la velocidad de la esfera, luego el momento angular inicial es:

$$L_0 = rmv = 1 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6 \text{ kg m}^2\text{/s}$$

b) El momento angular se mantiene constante, pues la fuerza centrípeta que actúa sobre la esfera es de tipo central, con lo que el momento de la fuerza es nulo. Por tanto:

$$L = \text{constante} = 0{,}6 \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Y, en consecuencia:

$$L_2 = r_2 m v_2 = 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot v_2 = 0{,}6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = 8 \text{ m/s}$$

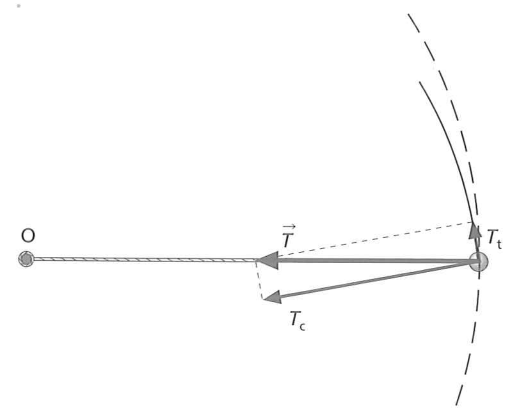
c) Hemos supuesto que no hay más fuerza que la centrípeta que ejerce la cuerda, pero también está el peso, que produce cierto momento de fuerza que imprime un movimiento de caída a la esfera. La aproximación puede valer si la velocidad de la esfera es suficientemente grande, de modo que la esfera se mantiene aproximadamente en posición horizontal en todo el proceso. También hemos supuesto despreciable la fricción de la esfera con el aire.

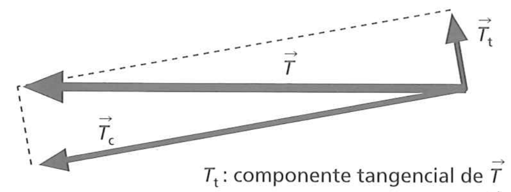
d) La tensión que ejerce la cuerda sobre la esfera es la responsable de su movimiento. Esta tensión viene dada por la siguiente expresión:

$$T = m\frac{v_2}{r} = m\left(\frac{L}{mr}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{\text{constante}}{mr^3}$$

Es decir, la tensión aumenta proporcionalmente al cubo del radio a medida que este disminuye. En consecuencia, la velocidad será inversamente proporcional al radio. Ahora bien, la trayectoria que sigue la esfera no es un círculo perfecto sino una espiral.

En consecuencia, la tensión presentará una pequeña componente en dirección tangencial a la trayectoria, tal como se observa en el dibujo:





T_t: componente tangencial de $\vec{T}$

T_c: componente centrípeta de $\vec{T}$

Esa componente en la dirección tangencial es la responsable de la aceleración tangencial que experimenta la esfera.

Posición y movimiento del centro de masas

15 **Tres partículas de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg, se mueven según trayectorias determinadas por:**

$$\vec{r}_1 = (3t^2 + 1)\vec{i} + 2t^3\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m}$$

$$\vec{r}_2 = (2t^2 - t)\vec{i} - 5t^2\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{r}_3 = 4t^3\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 2t^2\vec{k} \text{ m}$$

a) **Establece la posición del centro de masas del sistema en función del tiempo y en el instante en que $t = 1$ s.**

b) **Halla el momento lineal del sistema en función del tiempo y cuando $t = 1$ s.**

c) **¿Qué fuerza neta opera sobre el sistema?**

d) **¿Cuál ha sido el desplazamiento del centro de masas entre $t = 0$ y $t = 1$ s?**

e) **¿Cuál es el momento angular de la partícula 1 respecto del origen cuando $t = 1$ s?**

a) Aplicando la expresión 1.12:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Sustituyendo los datos, obtenemos:

$$\vec{r}_{\text{CM}}(t) = (0{,}8t^3 + 2{,}1t^2 - 0{,}3t + 0{,}5)\vec{i} + $$
$$+ (t^3 - 1{,}1t^2)\vec{j} + (0{,}4t^2 + 2)\vec{k} \text{ m}$$

que en el instante en que $t = 1$ s, vale:

$$\vec{r}_{\text{CM}}(1) = 3{,}1\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 2{,}4\vec{k} \text{ m}$$

b) El momento lineal del sistema será:

$$\vec{p}_{\text{CM}}(t) = m_{\text{total}}\vec{v}_{\text{CM}} = m_{\text{total}}\frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt}$$

Por tanto:

$$\vec{p}_{CM}(t) = 10\ \text{kg} \cdot [(2{,}4t^2 + 4{,}2t - 0{,}3)\,\vec{i} + (3t^2 - 2{,}2t)\,\vec{j} + 0{,}8t\,\vec{k}\ \text{m/s}] =$$

$$= (24t^2 + 42t - 3)\,\vec{i} + (30t^2 - 22t)\,\vec{j} + 8t\,\vec{k}\ \text{kg m/s}$$

Y en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 63\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}\ \text{kg m/s}$$

c) La fuerza neta que opera sobre el sistema será:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

$$\vec{F} = (48t + 42)\,\vec{i} + (60t - 22)\,\vec{j} + 8\vec{k}\ \text{N}$$

d) El desplazamiento del centro de masas entre 0 y 1 s es:

$$\Delta\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}(1) - \vec{r}_{CM}(0)$$

Como $\vec{r}\,(1)$, mientras que $\vec{r}\,(0) = 0{,}5\vec{i} + 2\vec{k}$:

$$\Delta\vec{r} = 2{,}6\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 0{,}4\vec{k}\ \text{m}$$

Es decir:

$$|\Delta\vec{r}_{CM}| = 2{,}63\ \text{m}$$

e) Para hallar el momento angular de la partícula 1 con respecto al origen cuando $t = 1$ s, hay que calcular previamente los vectores posición y velocidad de dicha partícula en ese tiempo:

$$\vec{r}_1(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\ \text{m} \quad \text{y} \quad \vec{v}_1(1) = 6\vec{i} + 6\vec{j}\ \text{m/s}$$

Por lo que:

$$\vec{L}\,(1) = \vec{r} \times m_1\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ 30 & 30 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -120\vec{i} + 120\vec{j} + 60\vec{k}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

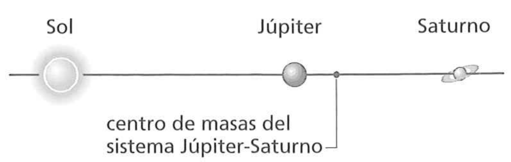
16 **En una buena aproximación, podemos suponer que Júpiter y Saturno concentran la mayor parte de la masa planetaria del sistema solar. Suponiéndolos alineados en conjunción con respecto al Sol y haciendo uso de la tabla de datos del sistema solar en las páginas finales del libro, determina:**

a) **La posición del centro de masas correspondiente a ambos planetas.**

b) **La posición del centro de masas (con respecto al centro solar) del sistema Sol-Júpiter-Saturno, suponiendo que estos últimos están en conjunción con respecto al Sol.**

c) **A la luz del anterior apartado, ¿podría inferir un hipotético astrónomo de un exoplaneta la presencia de planetas alrededor del Sol? ¿Sería capaz de distinguir de algún modo si se trata de uno o de dos planetas?**

En el siguiente dibujo se muestra la situación descrita en el enunciado. El sentido común nos dice que el centro de masas del sistema Júpiter-Saturno se encuentra entre ambos planetas, y que debe estar más próximo a Júpiter que a Saturno:



a) La posición del centro de masas del sistema Júpiter-Saturno respecto al origen, que es el centro del Sol, será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Júpiter}} \cdot 7{,}78 \cdot 10^{11} + m_{\text{Saturno}} \cdot 1{,}43 \cdot 10^{12}}{m_{\text{Júpiter}} + m_{\text{Saturno}}} =$$

$$= \frac{1{,}9 \cdot 10^{27} \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 14{,}3}{1{,}9 \cdot 10^{27} + 5{,}68 \cdot 10^{26}} \cdot 10^{11} =$$

$$r_{CM} = \frac{1{,}9 \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 14{,}3}{1{,}9 + 5{,}68 \cdot 10^{11}} = 9{,}27 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

b) Si incluimos el Sol en el sistema anterior, el centro de masa del sistema será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Sol}} \cdot 0 + m_{\text{Júpiter + Saturno}} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11}}{m_{\text{Sol}} + m_{\text{Júpiter + Saturno}}} =$$

$$= \frac{24{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11} \cdot 14{,}3}{1{,}98 \cdot 10^{30} + 24{,}68 \cdot 10^{26}} = 1{,}155 \cdot 10^9\ \text{m} \cong 1{,}66\ R_{\text{Sol}}$$

c) Sí, pues el Sol orbita alrededor de un centro de masas que no coincide con su centro, y el hipotético astrónomo extraterrestre podría deducir, si dispusiera de una tecnología suficientemente desarrollada, la presencia de planetas orbitando en torno suyo. Asimismo, del tipo de movimiento del Sol (o de cualquier otra estrella) puede inferirse si es uno o si son varios los planetas que orbitan a su alrededor. De este modo se ha postulado la presencia de planetas orbitando alrededor de algunas estrellas cercanas al Sistema Solar, si bien se trata de medidas que requieren una altísima precisión y los resultados no han sido concluyentes hasta la fecha.

17 PAU **Eligiendo como origen de referencia el centro de la Tierra, y teniendo en cuenta que la masa de la Luna es 0,012 veces la masa de la Tierra, determina a qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el centro de masas del sistema Tierra-Luna. Compárala con el radio de la Tierra y saca las conclusiones oportunas.**

Datos: $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km; $r_T = 6\,370$ km

Aplicando la expresión general:

$$x_{CM} = \frac{m_T x_T + m_L x_L}{m_T + m_L} =$$

$$= \frac{m_T \cdot 0 + 0{,}012 \cdot m_T \cdot 384\,000}{1{,}012 \cdot m_T} = 4\,553{,}3\ \text{km}$$

Aquí hemos supuesto que $x_T = 0$, al considerar que el origen se encuentra en el centro de la Tierra. Así pues, el centro de masas del sistema Tierra-Luna está en el interior de la Tierra, a 4 553,3 km de su centro.

Si bien ambos astros se mueven en torno al centro de masas, la Tierra queda prácticamente inmóvil, y es la Luna la que gira en torno suyo.

Rotación del sólido rígido y conservación del momento angular

18 **¿Qué sentido tiene el acto instintivo de extender los brazos en cruz cuando tratamos de conservar el equilibrio? ¿Por qué los funambulistas hacen equilibrios en la cuerda ayudados de un palo largo?**

En esencia, se trata de aumentar nuestro momento de inercia para disminuir la posibilidad de «rotación» (con la consiguiente caída) alrededor de la línea de equilibrio.

Las pequeñas variaciones imprimidas en el momento de inercia con la barra permiten al funambulista compensar los desequilibrios puntuales y, con ello, evitar la caída.

19 **¿Por qué cuando caminamos no lo hacemos a «piñón fijo»; es decir, por qué no adelantamos simultáneamente el brazo y la pierna del mismo lado?**

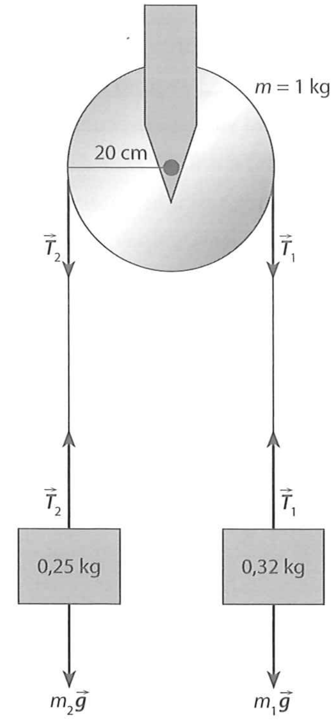
Si camináramos a «piñón fijo», el brazo y la pierna adelantados del mismo lado crearían un par de fuerzas con el brazo y la pierna que se quedan atrás, lo que produciría una pequeña rotación alrededor del eje vertical que pasa por nuestro centro, dando lugar a ese extraño andar de «robot».

20 **Una persona se encuentra en pie sobre una plataforma que gira alrededor de un eje vertical. En un momento dado, se siente mareada y trata de desplazarse hacia el eje con la intención de asirse a él. ¿Crees que ha tomado la decisión más acertada? ¿Por qué?**

Ha tomado la peor decisión. Al dirigirse hacia el eje, el momento de inercia del conjunto (plataforma + persona) disminuye, por lo que la velocidad angular de rotación aumenta y, con ella, el mareo de nuestro personaje.

21 **La polea de una máquina de Atwood tiene una masa de 1 kg y un radio de 20 cm. A ambos lados de la polea cuelgan dos pesas de 250 g y 320 g, respectivamente. Determina la aceleración que adquieren las masas, así como los valores de la tensión a ambos lados de la polea. ¿Qué porcentaje de error cometemos al no tener en cuenta el movimiento de la polea? (Considera la polea como un pequeño cilindro homogéneo.)**

La figura muestra las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo:



Hay dos ecuaciones de traslación de m_1 y m_2, y una de rotación de la polea:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1\,(g - a)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2\,(g + a)$$

$$(T_1 - T_2)\,r = I\alpha \Rightarrow (T_1 - T_2)\,r = \frac{1}{2}mr^2\,\frac{a}{r}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}ma$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para T_1 y T_2, resulta:

$$m_1\,(g - a) - m_2\,(g + a) = \frac{1}{2}ma$$

$$(m_1 - m_2)\,g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right) \cdot a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2 + 1/2\,m} = 0{,}64\ \text{m/s}^2$$

$$T_1 = 2{,}93\ \text{N};\ T_2 = 2{,}61\ \text{N}$$

Operando en la máquina de Atwood, obtendríamos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2} = 1{,}203\,5\ \text{m/s}^2$$

Por tanto, se comete un error del 88 %.

22 PAU **El radio solar es de unos $6{,}96 \cdot 10^8$ m, y su período de rotación es de 25,3 días. ¿Cuál sería su período de rotación si se colapsara formando una enana blanca de 4 000 km de radio, sin variación apreciable de masa?**

En ese hipotético proceso se conservaría el momento angular, por lo que:

$$I\omega = I'\omega' \Rightarrow \frac{2}{5}mr^2\omega = \frac{2}{5}m(r')^2\omega'$$

Como $\omega = 2\pi/T$, llegamos a:

$$r^2\,\frac{2\pi}{T} = (r')^2\,\frac{2\pi}{T'} \Rightarrow \frac{r^2}{T} = \frac{(r')^2}{T'}$$

De donde:

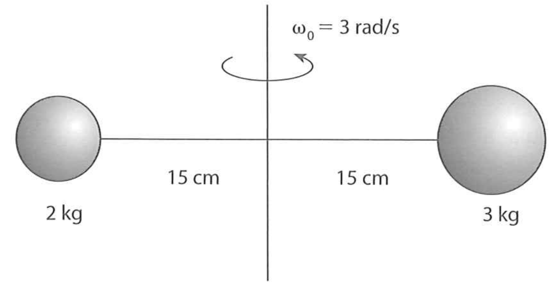
$$T' = \left(\frac{r'}{r}\right) = 0{,}000\,835\ \text{días} = 1\ \text{min}\ 12\ \text{s}$$

D23 PAU **Dos masas de 2 kg y 3 kg, respectivamente, se encuentran en los extremos de una varilla rígida horizontal de 30 cm de longitud y de masa despreciable. El sistema comienza a girar alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la varilla a razón de 3 rad/s. ¿Cuánto vale el momento angular del sistema? Si en un momento dado las dos partículas empiezan a desplazarse una hacia la otra con velocidades respectivas de 0,8 cm/s y 0,5 cm/s:**

a) **Determina una expresión para el momento de inercia del sistema en función del tiempo.**

b) **Halla la velocidad angular del sistema al cabo de 10 s.**

c) **Si para que las partículas comiencen a moverse, ha sido necesario impulsarlas en la dirección radial, ¿es lícito pensar que el momento angular no sufre variaciones?**



El momento de inercia inicial es:

$$I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Y sustituyendo los datos:

$$I_0 = 2\ \text{kg} \cdot (0{,}15\ \text{m})^2 + 3\ \text{kg} \cdot (0{,}15\ \text{m})^2 = 0{,}112\,5\ \text{kg m}^2$$

Por lo que el valor de su momento angular será:

$$L_{\text{inicial}} = I_0\omega_0 = 0{,}337\,5\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

a) El momento de inercia en función del tiempo es:

$$I(t) = m_1\,(d_1 - v_1 t)^2 + m_2 (d_1 - v_2 t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = 2 \cdot (0{,}15 - 0{,}008t)^2 + 3 \cdot (0{,}15 - 0{,}005t)^2 =$$

$$= 2{,}03 \cdot 10^{-4}t^2 - 9{,}3 \cdot 10^{-3}t + 0{,}112\,5\ \text{kg m}^2$$

b) El momento de inercia a los 10 s valdrá:

$$I\,(10) = 0{,}039\,8\ \text{kg m}^2$$

Y como el momento angular se conserva:

$$I_0\omega_0 = I'\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{I_0\omega_0}{I'} = 8{,}48\ \text{rad/s}$$

c) Sí, pues al ser las fuerzas radiales, resulta que $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, lo que implica que el momento angular es constante.

D24 PAU **Una partícula de 10 g de masa que se mueve con una rapidez v_0 = 15 m/s choca tangencialmente contra la periferia de una esfera sólida de 1 kg de masa y 20 cm de radio que estaba en reposo. Si la partícula queda adherida a la esfera y esta puede comenzar a girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por su centro, determina:**

a) **La velocidad angular con la que girará el sistema.**

b) **La energía se disipa en la colisión.**

a) El momento angular inicial del sistema es el de la partícula con respecto al centro de la esfera:

$$L_0 = mv_0 r = 0{,}01\ \text{kg} \cdot 15\ \text{m/s} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 0{,}03\ \text{kg m}^2\text{/s}$$

Después de la colisión, el momento angular es:

$$L' = I'\omega' = \left(\frac{2}{5}mr^2 + m'r^2\right)\omega' = \left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2\omega'$$

En ausencia de fuerzas externas momento angular se conserva es decir, $L_0 = L'$ por tanto:

$$L' = I'\omega' = 0{,}3 \Rightarrow \omega' = \frac{0{,}03\ \text{kg m}^2\text{/s}}{\left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2} = 1{,}83\ \text{rad/s}$$

b) La energía disipada en la colisión viene dada por:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I'(\omega')^2 = 1{,}125\ \text{J} - 0{,}027\ \text{J} = 1{,}098\ \text{J}$$

por lo que se disipa el 97,6 %.

El problema de los cuerpos rodantes

25 PAU **Una esfera maciza rueda por dos planos inclinados que tienen la misma altura, pero diferente inclinación. ¿Llegará la esfera al final con la misma velocidad en ambos casos? ¿Tardará lo mismo en llegar al final?**

La velocidad al final de ambos planos es la misma si la altura de partida era idéntica, pues la ecuación general referida a la energía mecánica es la misma: $E_{c\,\text{final}} = E_{p\,\text{inicial}}$.

Sin embargo, no tardan lo mismo en llegar en un caso y en otro. La razón es la diferente aceleración lineal del centro de masas en cada caso. La fuerza de fricción, F_r, produce el momento de fuerza necesario que incrementa la velocidad angular a medida que la esfera desciende. Entonces, podemos aplicar a la esfera que rueda sin deslizarse dos ecuaciones:

- Ecuación de rotación:

$$F_r r = I\alpha \Rightarrow F_r r = \frac{2}{5}mr^2\left(\frac{a_{CM}}{r}\right) \Rightarrow F_r = \frac{2}{5}ma_{CM}$$

- Ecuación de traslación:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - F_r = ma_{CM}$$

donde a_{CM} es la aceleración del centro de masas.

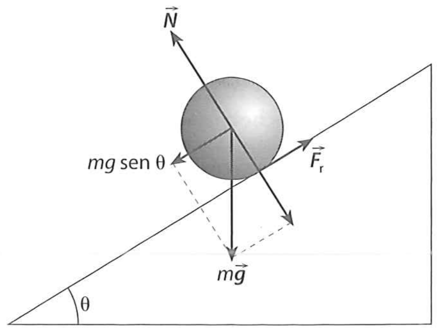
Resolviendo el sistema, observamos que la aceleración del centro de masas es:

$$a_{CM} = \frac{5}{7}g\ \text{sen}\ \theta$$

Por tanto, puede concluirse que, cuanto menor sea el ángulo, la aceleración es menor y, por tanto, será menor el tiempo que emplea la esfera en llegar a la base del plano.

26 PAU **Una esfera sólida de masa m y radio r rueda sin deslizarse por un plano inclinado de ángulo θ. Demuestra que el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático necesario para garantizar la rodadura sin deslizamiento vale $\mu = 2/7\ \text{tg}\ \theta$.**

Consideremos un cuerpo que baja rodando por un plano inclinado, tal como se observa en el dibujo:



Podemos plantear una ecuación para el movimiento de traslación y otra para el movimiento de rotación, suponiendo que el cuerpo no se desliza:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - F_{roz} = ma$$

$$F_{roz} \cdot R = I\alpha = \frac{Ia}{R} \Rightarrow F_{roz} = \frac{Ia}{R^2}$$

Combinando ambas ecuaciones, resulta:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - \frac{Ia}{R^2} = ma$$

$$g\ \text{sen}\ \theta = \left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)a \Rightarrow a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Pero, por otro lado, sabemos que la fuerza de rozamiento viene dada por la expresión:

$$F_{roz} = \mu mg \cos \theta$$

Si introducimos este valor en la ecuación de rotación, resulta:

$$mg\ \text{sen}\ \theta - \mu mg \cos \theta = ma \Rightarrow a = g(\text{sen}\ \theta - \mu \cos \theta)$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para la aceleración, resulta:

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \text{sen}\ \theta - \mu \cos \theta$$

Ahora podemos introducir el valor del momento de inercia, que para la esfera es $2mR^2/5$:

$$\frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\text{sen}\ \theta}{\frac{7}{5}} = \text{sen}\ \theta - \mu \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7}\text{sen}\ \theta = \text{sen}\ \theta - \mu \cos \theta$$

$$-\frac{2}{7}\text{sen}\ \theta = -\mu \cos \theta \Rightarrow \mu = \frac{2}{7}\text{tg}\ \theta$$

27 **¿Podrían diferenciarse dos esferas idénticas, de la misma masa y radio, que fueran una hueca y otra maciza? ¿Cómo?**

Los momentos de inercia de una esfera maciza y una hueca son, respectivamente:

$$I_{maciza} = \frac{2}{5}mR^2 \qquad I_{hueca} = \frac{2}{3}mR^2$$

Las esferas podrían distinguirse dejándolas rodar por un plano inclinado. Como se ha visto en la actividad 22, la aceleración de caída para un cuerpo que rueda por un plano inclinado viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Al tener un momento de inercia menor, la esfera maciza caerá con mayor aceleración y llegará antes a la base del plano.

28 **Dos esferas de la misma masa pero de distinta densidad se dejan caer rodando por un plano inclinado. ¿Llegan a la vez a la base del plano?**

Como hemos visto en actividades anteriores, la aceleración de caída de la esfera viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g\ \text{sen}\ \theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Ahora bien, si se trata de dos esferas de la misma masa pero distinta densidad, la expresión I/mR^2 es idéntica para ambas, e igual a 2/5. En consecuencia, podemos asegurar que las dos esferas llegarán a la vez.

2 Gravitación universal

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 62)

1. ¿Qué atrae con más fuerza a qué: la Tierra a la Luna o la Luna a la Tierra? ¿Y en el caso de una piedra y la Tierra?

Se atraen con la misma fuerza en magnitud pero sentidos opuestos.

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones te parecen correctas?

a) **Un cuerpo más pesado siempre caerá más deprisa que otro más ligero.**

b) **La Tierra atrae a todos los cuerpos en su superficie con la misma fuerza.**

a) Falso. Caen con la misma aceleración siempre que despreciemos el rozamiento de los cuerpos con el aire.

b) Falso. La Tierra atrae a todos los cuerpos que se encuentran en la superficie con la misma aceleración pero distinta fuerza.

3. Imagina que te encuentras dentro de una nave espacial sin referencias visuales con respecto al exterior. ¿Podrías discernir de alguna manera si en un momento dado te hallas en órbita alrededor de la Tierra o, estás precipitándote hacia ella?

Si estás en ingravidez es cuándo estás en órbita, lo puedes comprobar si sueltas un objeto y observas que se mueve a la velocidad de la nave.

4. ¿A qué se deben las mareas? ¿Cuántas se producen en un día? ¿Qué son las mareas vivas? ¿Y las muertas?

Las mareas se deben fundamentalmente a la acción de la Luna sobre la Tierra. Se producen dos mareas altas y dos mareas bajas.

Las mareas vivas se deben a la influencia de la Luna y del Sol sobre la Tierra. Cuando los dos efectos se suman dan lugar a las mareas de flujo máximas.

Al igual que las mareas vivas, las mareas muertas también se deben a la influencia de la Luna y el Sol sobre la Tierra. Sin embargo, al contrario de las mareas vivas, cuando ambas contribuciones se contrarrestan dan lugar a las mareas muertas.

Actividades (páginas 63/77)

1 Supongamos que el movimiento de la Luna se compone de otros dos: uno de ellos de avance y el otro de caída hacia la Tierra, regido este último por las ecuaciones de caída libre. Con los datos que se ofrecen, y siguiendo las sugerencias de la figura 2.2, contesta a las siguientes preguntas.

a) **¿Qué ángulo se ha desplazado la Luna en 1 hora?**

b) **¿Qué altura h ha «caído» la Luna en esa hora?**

c) **¿Qué valor de aceleración g_L de caída corresponde a esa distancia y ese tiempo?**

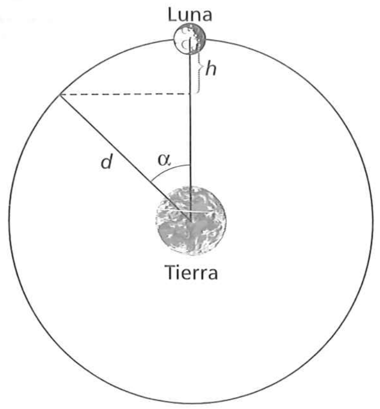
d) **¿Cuántas veces es menor ese valor que el valor $g_T = 9{,}8$ m/s^2, que corresponde a la superficie terrestre?**

e) **¿Cuántas veces es mayor la distancia Tierra-Luna que el radio terrestre?**

f) **¿Qué relación puedes encontrar entre la variación de la aceleración y la de la distancia?**

Datos: radio terrestre = 6 370 km; distancia Tierra-Luna = 384 000 km; período sidéreo lunar = 27,31 días

La situación descrita en el enunciado es la siguiente:



a) El período sidéreo lunar, expresado en horas, es de 655,44 h. En este tiempo, la Luna ha descrito 360°, por lo que, en 1 hora, el ángulo α es de:

$$\alpha = \frac{360°}{655{,}44} = 0{,}549°$$

b) La altura h (véase la figura 2.2) que la Luna ha «caído» en esa hora es:

$$h = d - d\cos\alpha = d\,(1 - \cos\alpha) = 17\,627{,}75 \text{ m}$$

c) El valor de aceleración de caída que se correspondería con esa distancia en 1 h (3 600 s) se obtendría de la siguiente manera:

$$h = \frac{1}{2}g_L t^2 \Rightarrow g_L = \frac{2h}{t^2} = 0{,}002\,7 \text{ m/s}^2$$

d) Dividiendo el valor de g_T en la superficie terrestre entre g_L, se obtiene:

$$\frac{g_T}{g_L} \cong 3\,600$$

e) Al dividir ambas distancias, resulta:

$$\frac{d}{r_T} \cong 60$$

f) Queda claro que, al aumentar la distancia 60 veces, la aceleración gravitatoria ha disminuido 3 600 veces, es decir, 60^2 veces. Así pues:

$$g \propto \frac{1}{r^2}$$

2 PAU Determina el valor de «la fuerza requerida para mantener a la Luna en su órbita» (en palabras de Newton) haciendo uso de los datos de masas de la Tierra y de la Luna, así como de la distancia entre ambos. ¿Qué aceleración comunica dicha fuerza a cada uno de los cuerpos celestes?

La fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna es:

$$F = G\frac{m_T m_L}{d_{T\text{-}L}^2}$$

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3{,}84 \cdot 10^{8} \text{ m})^2} = $$

$$= 1{,}95 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Dicha fuerza comunica a la Tierra una aceleración de valor:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} = 3{,}34 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Y a la Luna:

$$a_L = \frac{F}{m_L} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{7{,}34 \cdot 10^{22}} = 2{,}71 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

3 ¿Qué le sucede al peso de un objeto si su masa se triplica a la vez que también se triplica su distancia al centro terrestre?

La expresión de la fuerza gravitatoria es:

$$F = G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2}$$

Si se triplica tanto la masa m como la distancia r al centro de la Tierra, resulta:

$$F' = G\frac{M_{\text{Tierra}}3m}{9r^2}$$

Operando queda:

$$F' = \frac{1}{3}G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2} = \frac{1}{3}F$$

Luego la fuerza queda dividida por tres.

4 PAU Dos esferas idénticas de radio r y densidad ρ están en contacto. Expresa la fuerza de atracción gravitatoria entre ambas como función de r, ρ y G.

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho \cdot 4/3\,\pi r^3$ y que la distancia entre los centros de las esferas es $2r$, entonces:

$$F = G\frac{mm}{(2r)^2} = G\,(2/3\,\rho\pi r^3)^2 = 4/9 G\rho^2\pi^2 r^4$$

5 ¿A qué distancia del centro lunar es atraída con una fuerza de 1 N una masa de 1 kg?

La fuerza con que la Luna atrae a una masa de 1 kg será:

$$F = G\frac{m_L m}{r^2} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{7{,}20 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}}{r^2} = 1 \text{ N}$$

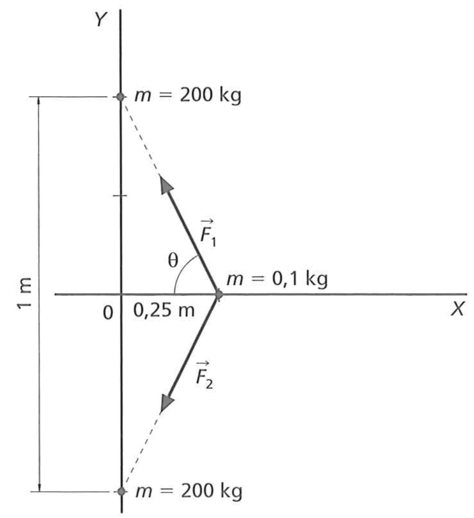
Despejando r, resulta:

$$r = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 7{,}20 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}/1 \text{ N}} =$$

$$= 2{,}19 \cdot 10^{6} \text{ m} = 2\,190 \text{ km}$$

6 PAU Dos esferas de 200 kg se encuentran separadas 1 m a lo largo del eje Y. Halla la fuerza neta que ejercen sobre una pequeña masa de 0,1 kg situada sobre el eje X a 0,25 m del punto medio de las esferas. (Expresar el resultado en notación vectorial y calcular el módulo de la fuerza neta).

El diagrama de las fuerzas originadas por las dos masas se observa en el siguiente dibujo:



El valor de la fuerza que cada masa m ejerce sobre m' es:

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

Siendo $r^2 = 0{,}5^2 + 0{,}25^2 = 0{,}312\,5$, por lo que sustituyendo:

$$F = 4{,}27 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Como se desprende de la figura, las fuerzas F_1 y F_2 son iguales en valor y pueden descomponerse en las componentes x e y, siendo:

$$F_{1x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{1y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$
$$F_{2x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{2y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$

Donde sen $\alpha = 0{,}5/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}89$ y $\cos\alpha = 0{,}25/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}45$

Por lo que:

$$\vec{F}_1 = -1{,}92 \cdot 10^{-9}\,\vec{i} + 3{,}8 \cdot 10^{-9}\,\vec{j} \text{ N}$$
$$\vec{F}_2 = -1{,}92 \cdot 10^{-9}\,\vec{i} - 3{,}8 \cdot 10^{-9}\,\vec{j} \text{ N}$$

Así pues, la fuerza neta es:

$$\vec{F} = -3{,}84 \cdot 10^{-9}\,\vec{j} \text{ N}$$

Siendo su valor $3{,}84 \cdot 10^{-9}$ N.

7 Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra, y su radio es aproximadamente 1/4 del terrestre, da un valor aproximado de la aceleración de caída de los objetos en la superficie lunar.

Utilizando los datos ofrecidos, tendremos:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{(0{,}012 \cdot m_T)}{\left(\frac{1}{4}r_T\right)^2} =$$

$$= 0{,}192 \cdot g_T = 1{,}88 \text{ m/s}^2$$

8 PAU A partir de la expresión de la aceleración de caída libre, demuestra que, si consideramos los planetas como cuerpos esféricos, puede escribirse:

$$a = \frac{4}{3}G\pi\rho r$$

donde ρ es la densidad media del planeta.

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}\,\pi r^3$, donde r es el radio del planeta, se obtiene la expresión pedida, al sustituir esta igualdad en la expresión **2.8**:

$$a = G\frac{\frac{4}{3}\rho\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho r$$

Obsérvese que la expresión obtenida nos da únicamente la aceleración en la superficie del planeta (o para alturas muy pequeñas comparadas con ella).

9 PAU El diámetro de Venus es de 12 120 km y su densidad media es de 5 200 kg/m³. ¿Hasta qué altura ascendería un objeto lanzado desde su superficie con una velocidad inicial de 30 m/s?

La aceleración de la gravedad en la superficie de Venus viene dada por la siguiente expresión:

$$g_{\text{Venus}} = G\frac{M_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} = G\frac{\rho_{\text{Venus}}V_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} =$$

$$= \frac{4}{3}G\pi\rho_{\text{Venus}}R_{\text{Venus}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una gravedad de 8,8 m/s^2.

Puesto que el objeto lanzado hacia arriba experimenta un movimiento uniformemente acelerado, podemos aplicar la ecuación que relaciona velocidades con espacio recorrido:

$$v^2 = v_0^2 + 2gy_{\text{máx}}$$

En nuestro caso, la aceleración es negativa y la velocidad final es la del punto más alto, esto es, cero:

$$0 = 30^2 - 2 \cdot 8{,}8 \cdot y_{\text{máx}} \Rightarrow 51{,}14 \text{ m}$$

10 **Teniendo en cuenta que la masa del Sol es de unos $2\cdot 10^{30}$ kg, calcula el valor de *k* para los planetas del sistema solar y exprésalo con sus correspondientes unidades del SI.**

Sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión **2.9**, se obtiene:

$$k=\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2}\cdot 2\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}=2{,}96\cdot 10^{-19}\ \mathrm{s^2\ m^{-3}}$$

11 **El satélite de Júpiter llamado Ío tiene un período de revolución de 42 horas 29 minutos, y su distancia media a Júpiter es de 422 000 km. ¿Cuál es la masa de Júpiter?**

A partir de la tercera ley de Kepler, y sustituyendo los valores ofrecidos, se calcula el valor de la constante *k* en el caso de Júpiter:

$$k=\frac{T^2}{r^3}=\frac{(152\,940)^2}{(4{,}22\cdot 10^8)^3}=3{,}112\cdot 10^{-16}\ \mathrm{s^2\ m^{-3}}$$

Después se halla la masa de Júpiter a partir de la expresión **2.9**:

$$m_{\text{Júpiter}}=\frac{4\pi^2}{kG}=1{,}9\cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}$$

12 **Marte se encuentra a una distancia media del Sol de 227 900 000 km. ¿Cuántos días dura el año marciano?**

Se trata de determinar, a partir de la tercera ley de Kepler, el período de Marte usando el valor de la constante *k* obtenido en la actividad 10.

$$T^2=kr^3=2{,}96\cdot 10^{-19}\cdot(2{,}279\cdot 10^{11})^3=3{,}5\cdot 10^{15}$$

$$T=5{,}92\cdot 10^7\ \mathrm{s}=685\ \text{días}$$

13 **Si el período de un péndulo simple que oscila bajo ángulos pequeños viene dado por $T=2\rho\sqrt{l/g}$:**

a) **¿Qué le ocurriría a dicho período si lo alejáramos hasta el doble de la distancia que hay entre el péndulo y el centro de la Tierra?**

b) **¿Qué le ocurriría en ese mismo caso a su frecuencia de oscilación?**

a) Al duplicar la distancia, el valor de la aceleración de la gravedad se reduce a la cuarta parte; es decir:

$$g'=\frac{g}{4}$$

Al sustituir este nuevo valor en la expresión del período, observamos que este se duplica:

$$T=2\rho\sqrt{\frac{l}{g'}}=2\rho\sqrt{\frac{l}{g/4}}=4\rho\sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) Si se duplica el período, la frecuencia se reduce a la mitad.

14 **Haz una estimación del valor de la aceleración de marea en la zona más próxima a la Luna. ¿Qué elevación de marea produciría dicha aceleración, en condiciones ideales, actuando durante media hora?**

Dato: La masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra.

La aceleración de la marea en el punto más cercano a la Luna viene dada por la expresión **2.14**. Sustituyendo $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_T$ por sus respectivas expresiones matemáticas, resulta:

$$a_{\text{marea}}=Gm_{\text{Luna}}\cdot\left(\frac{1}{(r-r_T)^2}-\frac{1}{r^2}\right)=$$

$$=0{,}012\cdot G\cdot m_T\cdot\frac{2rr_T-r_T^2}{r^2(r-r_T)^2}$$

Ahora bien, como veremos en el epígrafe siguiente, el radio de la Tierra es mucho menor que la distancia Tierra-Luna, luego la expresión anterior se puede aproximar a:

$$a_{\text{marea}}\cong 0{,}012\cdot Gm_T\cdot\frac{2rr_T}{r^2r^2}=0{,}012\cdot Gm_T\frac{2r_T}{r^3}$$

Sustituyendo, resulta:

$$a_{\text{marea}}\cong 0{,}012\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot\frac{2\cdot 6{,}37\cdot 10^6}{(3{,}84\cdot 10^8)^3}=$$

$$=1{,}08\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/s^2}$$

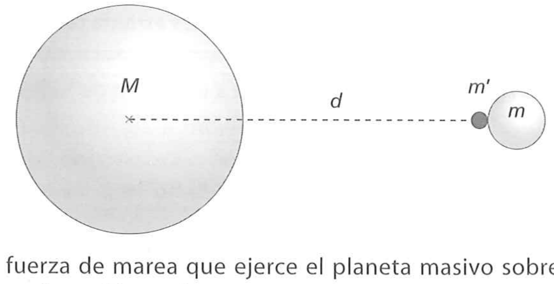
Si consideramos que el valor de la aceleración de marea se mantiene aproximadamente constante durante media hora, la elevación que se producirá será:

$$y=\frac{1}{2}at^2=1{,}75\ \mathrm{m}$$

Debe hacerse notar que este ejercicio no es más que una mera aproximación.

15 PAU **Supongamos una masa *m'* sobre la superficie de un satélite de masa *m* y radio *r* que orbita a una distancia *d* alrededor de un planeta masivo de masa *M*. Teniendo en cuenta que el límite de Roche sería la distancia crítica *d* en la que la fuerza de marea sobre *m'* originada por el planeta se iguala a la fuerza de atracción gravitatoria que el satélite ejerce sobre *m'*, demuestra que el límite de Roche viene dado por la expresión:**

$$d=r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$



La fuerza de marea que ejerce el planeta masivo sobre el pequeño satélite será:

$$F_{\text{marea}}=G\frac{M\,2r}{d^3}\cdot m'$$

Mientras que la fuerza gravitatoria que ejerce el satélite sobre la masa *m'* es:

$$F_{\text{gravitatoria}}=G\frac{m\,m'}{r^2}$$

En el límite de Roche, ambas fuerzas se igualan, es decir:

$$G\frac{M\,2r}{d^3}\cdot m'=G\frac{m\,m'}{r^2}$$

Despejando la distancia:

$$d=r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$

16 **Demuestra que si en la anterior fórmula expresamos las masas en función de las densidades y volúmenes del planeta y satélite, se obtiene la siguiente expresión más útil para el límite de Roche, que solo depende del radio del planeta y de las densidades de ambos cuerpos:**

$$d=R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Si expresamos las masas en función de la densidad y el volumen de los planetas:

$$M=\frac{4}{3}\rho R^3\cdot\rho_{\text{planeta}};\ m=\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho_{\text{satélite}}$$

$$\frac{2M}{m}=\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\left(\frac{R}{r}\right)^3$$

Si sustituimos este cociente en la expresión hallada en la actividad anterior, resulta:

$$d=R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Cuestiones y problemas (páginas 80/81)

Guía de repaso

1 **¿De qué tipo llegó a imaginar Kepler que podía ser la fuerza responsable del movimiento de los planetas? ¿A qué asociaba la causa de dicha fuerza?**

Kepler situaba la causa del movimiento de los planetas en el Sol. La razón que daba era que la fuerza con que el Sol movía a los planetas disminuía con la distancia, del mismo modo que lo hacía su propia luz. Por ello, dicha fuerza debía ser algo inherente a la sustancia solar. Seducido por los estudios de Gilbert sobre magnetismo terrestre, Kepler llegó a suponer que la fuerza que dimanaba del Sol era magnética.

2 **¿Cuál parece ser el origen de la idea contenida en el libro III de los *Principia* de Newton, según la cual la caída de los cuerpos y los movimientos planetarios obedecen a un mismo tipo de fuerza?**

Los cálculos que Newton realizó en 1666, en los que supuso que la Luna «caía» hacia la Tierra de forma continua, de igual modo que un proyectil se precipita parabólicamente a tierra.

Así, halló que la aceleración con que caía cumplía con la regla del inverso del cuadrado de la distancia.

3 **¿Cuál es el origen de la insistente suposición de que la fuerza responsable del movimiento de los planetas debía cumplir la ley del inverso del cuadrado de la distancia?**

La suposición de que la fuerza era centrípeta, junto con el cumplimiento de la tercera ley de Kepler.

4 **¿Por qué no aparece la constante de gravitación *G* en los Principia? ¿Qué impedía a Newton conocer su valor?**

Porque no se conocía la masa de la Tierra.

5 **¿Qué precauciones considerarías necesario tomar si te vieses en la tesitura de tener que reproducir el experimento de Cavendish? ¿Por qué es tan difícil su reproducción?**

Habría que evitar, por ejemplo, las posibles perturbaciones producidas por corrientes de aire. Debe, pues, reproducirse el experimento en condiciones de vacío.

Según el material que se emplee, ha de procurarse también que no se produzcan interacciones de naturaleza electrostática.

6 **¿Cómo se llega a la conclusión de que la masa inercial y la gravitacional son la misma magnitud?**

Se llega a esa conclusión a partir de la observación experimental de que la aceleración de la gravedad es la misma para todos los cuerpos, independientemente de su masa.

7 **¿Qué razones llevaron a suponer que la fuerza gravitatoria entre masas varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia?**

La respuesta a esta cuestión es la misma que se dio para la cuestión 3.

8 **¿Te parece lícito considerar que *G* es una constante verdaderamente «universal»? ¿Qué otras constantes universales conoces?**

Sí es lícito, mientras no se demuestre lo contrario. Existen otras constantes universales, como la de Avogadro, la de Boltzmann, la masa y la carga del electrón, la velocidad de la luz en el vacío, la constante de Planck, las masas y cargas de partículas elementales o la constante de Hubble.

9 **¿Cómo podría incidir en el fenómeno de las mareas un calentamiento global del planeta? ¿Qué consecuencias podría tener dicha incidencia?**

Un calentamiento global del planeta que provocase la fusión de los casquetes polares conllevaría un aumento de la masa acuosa del planeta y, por tanto, problemas de anegación de zonas hoy habitadas debido a un ligero incremento de las mareas.

10 **¿Por qué el efecto de marea de la Luna sobre la Tierra es mayor si la fuerza gravitatoria del Sol supera a la ejercida por la Luna?**

Porque, como ya se ha comentado y puede observarse en el ejercicio resuelto número 6 de la página 77, las fuerzas y aceleraciones de marea varían conforme al inverso del cubo de la distancia.

11 **¿Cuántas mareas se producen al día en una localidad costera? ¿Cada cuánto tiempo?**

Al día se producen dos mareas altas y dos mareas bajas. Las mareas altas se producen cada 12 h y 26 min y el tiempo que transcurre entre una marea alta y una marea baja es de 6 h y 13 min.

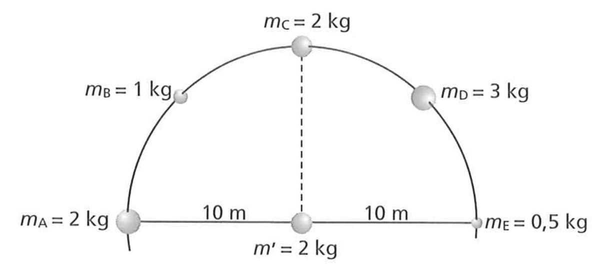
Ley de gravitación universal

12 **Dos masas aisladas se atraen gravitacionalmente. Si una es el doble que la otra, ¿cómo serán, en comparación, las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas? ¿Qué pasará a las fuerzas si la distancia entre las masas se reduce a la mitad? ¿Cómo serán, en comparación, las aceleraciones que adquirirán las masas?**

Las fuerzas, según se desprende de la formulación de la ley de gravitación y de la tercera ley de Newton, serán iguales y de sentidos opuestos. Si la distancia se reduce a la mitad, el valor de la fuerza se cuadruplica.

En cuanto a las aceleraciones que adquirirán ambos cuerpos, el de doble masa tendrá la mitad de la aceleración que el otro.

13 PAU **Determina la fuerza que actúa sobre la masa *m'* de la distribución que se aprecia en la figura.**



La fuerza total resultante en la dirección del eje *X* viene dada por:

$$F'_x=G\frac{m'}{r^2}(-m_A-m_B\cos 45°+m_D\cos 45°+m_E)$$

de donde:

$$F'_x=-0{,}021\,72\cdot G$$

De manera análoga, la fuerza total resultante en la dirección del eje *Y* es:

$$F'_y=G\frac{m'}{r^2}(m_B\,\mathrm{sen}\,45°+m_C+m_D\,\mathrm{sen}\,45°)$$

de donde:

$$F'_y=0{,}096\,56\cdot G$$

Por lo que:

$$\vec{F}'=-0{,}021\,72\cdot G\vec{i}+0{,}096\,56\cdot G\vec{j}\ \mathrm{N}$$

cuyo valor es:

$$F'=G\sqrt{(-0{,}021\,72)^2+(0{,}096\,56)^2}=6{,}60\cdot 10^{-12}\ \mathrm{N}$$

14 **PAU** **Dos masas puntuales iguales de 5 kg se encuentran situadas en los vértices inferiores de un triángulo equilátero de 40 cm de lado.**

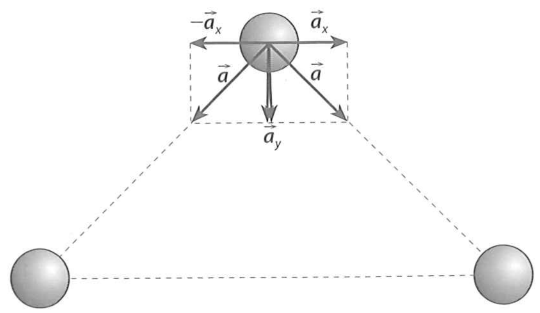
Si se coloca en el vértice superior una tercera masa m':

a) ¿Qué aceleración adquiere esta última masa en ese punto (exprésala en notación vectorial)?

b) ¿Descenderá con aceleración constante?

c) ¿Qué aceleración tendrá en el momento de llegar a la base del triángulo?

La representación vectorial del problema se aprecia en la siguiente figura:



a) Puesto que las masas en los vértices inferiores son iguales, las componentes x de la aceleración que cada una de ellas comunica a m' se cancelan, de modo que la aceleración total que adquiere m' será:

$$\vec a_{total} = -2a_y\vec j \text{ m/s}^2$$

donde:

$$a_y = G\frac{m}{d^2}\cos 30°$$

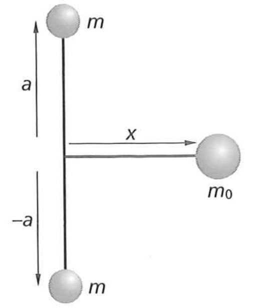
Sustituyendo $m = 5$ kg y $d = 0{,}4$ m, se obtiene:

$$\vec a_{total} = -3{,}6\cdot 10^{-9}\vec j \text{ m/s}^2$$

b) No lo hará con aceleración constante, pues a medida que desciende las componentes y de la aceleración disminuyen.

c) Puesto que se mueve en la dirección del eje Y, su aceleración total será 0, al estar en el punto medio de las dos masas iguales.

D.15 **PAU** **Dos masas puntuales de valor m se encuentran situadas sobre el eje Y en las posiciones $y = +a$ e $y = -a$, mientras que una tercera, m_0, se encuentra situada en el eje X a una distancia $-x$ del origen, como se indica en la figura.**

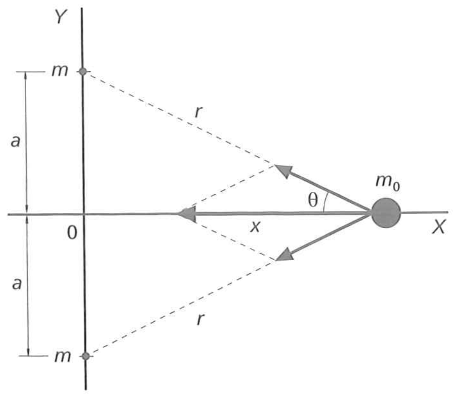


a) Demuestra, detallando todos los pasos y argumentando la respuesta, que la fuerza que las dos masas idénticas ejercen sobre m_0, es:

$$\vec F = \frac{2G\,mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec i$$

b) ¿Qué expresión se obtendrá si situamos la masa m_0 a una distancia mucho mayor que a?

El diagrama de fuerzas es el siguiente:



a) El valor de la fuerza que cada masa ejerce sobre m_0 es:

$$F = G\frac{mm_0}{r^2} = G\frac{mm_0}{(x^2+a^2)}$$

Al descomponer ambas fuerzas en sus componentes x e y, vemos que las componentes y se anulan entre sí, de modo que la fuerza neta resultante sobre m_0 es, como se aprecia en la figura:

$$\vec F = -2F_x\vec i$$

Aplicando la ley de gravitación universal:

$$F_x = F\cos\alpha = G\frac{mm_0}{(x^2+a^2)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} = G\frac{mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Así pues, en forma vectorial:

$$\vec F = -2G\frac{mm_0x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec i$$

b) Si $x >> a$, entonces $(x^2+a^2)^{3/2} \approx x^3$, quedando la anterior expresión de la manera:

$$\vec F = -2G\frac{mm_0x}{x^2}\vec i$$

Que será la que resultará de suponer la masa m_0 atraída por una única masa puntual de valor $2m$ situada a la distancia x.

16 **¿Dónde será mayor el período de un péndulo, en el ecuador o en los polos?**

Según la expresión utilizada en la actividad 13, el período de un péndulo será mayor en el ecuador, donde el valor de g es ligeramente menor. Este hecho era conocido por Newton, ya que Richter había llevado a cabo mediciones del período de un péndulo en la Guayana francesa en 1672 y observado que el péndulo oscilaba más lentamente. A raíz de ello, Newton concluyó que la Tierra debía estar abultada en su zona ecuatorial y achatada por los polos.

17 **Imagínate que la ESA (Agencia Espacial Europea) organiza un concurso de ideas en los centros de enseñanza sobre posibles experimentos para llevar a cabo en un satélite que se halle en órbita alrededor de la Tierra. Alguien propone analizar el movimiento de un péndulo en el interior del satélite. ¿Qué te parece la idea?**

La idea no resultaría en absoluto, pues el péndulo no oscilaría. En realidad, todos los objetos en el interior de la estación orbital estarían cayendo libremente, lo que les conferiría esa situación de «ingravidez», que no significa ausencia de gravedad.

18 **¿Qué le ocurriría a un péndulo si, de repente, la Tierra aumentara su velocidad de rotación? ¿Se vería afectado el péndulo si se encontrara en los polos?**

Como se tendrá ocasión de analizar en detalle en la siguiente unidad, la aceleración gravitatoria efectiva que actuaría sobre los cuerpos en latitudes no polares sería ligeramente menor, al aumentar la aceleración centrífuga.

En consecuencia, el período del péndulo aumentaría, con lo que oscilaría más lentamente. Por el contrario, en los polos no se vería afectado el valor de g, aunque aumentara la velocidad de rotación.

19 **Imagínate que un planeta aumentara de tamaño sin alterar su densidad. ¿Se elevaría o disminuiría el peso de los cuerpos en su superficie?**

Tal y como se desprende de la actividad 8 de la página 66, es posible expresar la aceleración de la gravedad superficial en función de la densidad del siguiente modo:

$$g = \frac{4}{3}G\pi r\rho$$

Al aumentar el tamaño el planeta, se incrementa r y, si no varía la densidad, el valor de g se elevaría, por lo que el peso de los cuerpos en la superficie se incrementa linealmente con la distancia o radio.

20 **Unos astronautas, al llegar a un planeta desconocido de gran tamaño, ponen su nave a orbitar a baja altura del planeta y con los motores desconectados. ¿Cómo podrían estimar la densidad del planeta usando solo un reloj?**

Si los astronautas sitúan la nave en una órbita baja a la velocidad orbital adecuada, lo único que tienen que tener en cuenta es el tiempo que tardan en efectuar una órbita completa (período T). Con esto ya pueden estimar la densidad del planeta del modo que sigue. En primer lugar, como la aceleración centrípeta de la nave es la aceleración gravitatoria, ambas expresiones se igualan:

$$g = \omega^2 r$$

Puesto que la órbita es de baja altura, cabe suponer que r es el radio del planeta. Expresando la aceleración de la gravedad en función de la densidad del planeta (véase la actividad 8), y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi/T$, se obtiene:

$$\frac{4}{3}G\pi r\rho = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r$$

Despejando la densidad, se concluye que:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

Así pues, como puede observarse, todo lo que necesitamos la densidad del planeta es un reloj para medir T.

21 **¿Qué pasaría si desde una nave orbital se dejase caer un objeto?**

Permanecería orbitando en posición paralela a la nave, pues tanto esta como el objeto se encontrarían en caída libre. Lo veríamos, pues, en reposo relativo con respecto a la nave.

22 **PAU** **En la superficie de un planeta cuyo radio es 1/3 de la Tierra, la aceleración gravitatoria es de 5,8 m/s². Halla:**

a) La relación entre las masas de ambos planetas.

b) La altura desde la que debería caer un objeto en el planeta para que llegara a su superficie con la misma velocidad con que lo haría en la Tierra un cuerpo que se precipita desde 50 m de altura.

a) La aceleración gravitatoria de la Tierra:

$$G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

mientras que en el otro planeta:

$$G\frac{m_P}{r_P^2} = 5{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_Tr_P^2}{m_Pr_T^2} = 1{,}69$$

como $r_P = r_T/3$ se tiene que:

$$\frac{m_Tr_T^2}{m_Pr_T^2}\cdot\frac{1}{9} = 1{,}69$$

de donde:

$$\frac{m_T}{m_P} = 15{,}21$$

o bien, a la inversa:

$$\frac{m_P}{m_T} = 6{,}57\cdot 10^{-2}$$

b) Las velocidades con que llegan al suelo los objetos que caen libremente son:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Puesto que en ambos casos la velocidad debe ser la misma:

$$\sqrt{2g_Ty_T} = \sqrt{2g_Py_P} \Rightarrow g_Ty_T = g_Py_P$$

Despejando el valor de y_P:

$$y_P = \frac{g_T}{g_P}\cdot y_T = 84{,}45 \text{ m}$$

23 **Considerando que la densidad media de la Tierra es de 5 500 kg/m³, y teniendo en cuenta el valor de su radio, haz una estimación del valor de la constante G.**

Expresando el valor de g en función de la densidad y despejando G, resulta:

$$g = \frac{4}{3}G\pi r\rho \Rightarrow G = \frac{3g}{4\pi r\rho}$$

Sustituyendo los valores:

$$G = \frac{3\cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{4\pi\cdot 6{,}37\cdot 10^6 \text{ m}\cdot 5\,500 \text{ kg/m}^3} =$$

$$= 6{,}68\cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

24 **PAU** **Una masa cae con una aceleración de 3,7 m/s² sobre la superficie de un planeta sin atmósfera cuyo radio es 0,4 veces el terrestre.**

a) ¿Cómo es la masa de este planeta en relación con la terrestre?

b) ¿Qué velocidad debería llevar una nave para orbitar a 500 km sobre la superficie del planeta?

c) ¿Cuánto tardaría en efectuar una órbita completa a esa altura?

a) La aceleración superficial en el planeta es:

$$g_P = G\frac{m_P}{r_P^2} = 3{,}7 \text{ m/s}^2$$

Y en la Tierra:

$$g_T = G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_Pr_T^2}{m_Tr_P^2} = \frac{3{,}7}{9{,}8}$$

de donde:

$$\frac{m_P}{m_T} = 0{,}06$$

b) Teniendo en cuenta que la aceleración gravitatoria es centrípeta, se obtiene:

$$G\frac{m_P}{d^2} = \frac{v^2}{d}$$

Despejando el valor de v:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_P}{d}}$$

donde:

$$d = r_P + 500\ \text{km} = 0{,}4 \cdot 6\,370\ \text{km} + 500\ \text{km} = 3\,048\ \text{km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$v = 2\,806{,}7\ \text{m/s}$$

c) Como:

$$v = \frac{2\pi d}{T}$$

Entonces:

$$T = \frac{2\pi d}{v} = 6\,823\ \text{s} \cong 0{,}08\ \text{días}$$

25 PAU **Supongamos que la Tierra tiene una densidad media ρ. Determina cuál sería el valor de g sobre su superficie si:**

***a)* El diámetro fuese la mitad y la densidad fuese la misma.**

***b)* El diámetro fuese el doble sin variar la densidad.**

Usando la expresión de g en función de la densidad:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

se observa que:

a) Si el radio se reduce a la mitad, entonces:

$$g' = \frac{1}{2} \cdot g$$

b) Si el radio se duplica, entonces:

$$g' = 2 \cdot g$$

26 PAU **La masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre. Calcula:**

***a)* La distancia que recorrería un cuerpo en 3 s cayendo libremente.**

***b)* La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba si con la misma velocidad se elevara en Tierra hasta 30 m.**

La aceleración de la gravedad en la superficie lunar viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Luna}} = G\frac{M_{\text{Luna}}}{R^2_{\text{Luna}}} = G\frac{0{,}012 \cdot M_{\text{Tierra}}}{0{,}27^2 \cdot R^2_{\text{Tierra}}} = 0{,}164\,6 g_{\text{Tierra}} = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

a) Para hallar la distancia recorrida en la caída, hacemos uso de la ecuación del movimiento de caída libre:

$$y = 1/2\, g_L t^2 = 7{,}2\ \text{m}$$

b) La altura a la que se elevaría en un lanzamiento vertical vendrá dada por la expresión:

$$h_L = \frac{v_0^2}{2g_L}$$

Comparando las alturas que alcanzarían en la luna y en la Tierra, lanzados con la misma velocidad, se obtendría:

$$\frac{h_L}{h_T} = \frac{v_0^2}{2g_L} = \frac{v_0^2/2g_L}{v_0^2/2g_T} \Rightarrow h_L = h_T\frac{g_T}{g_L} = 30 \cdot \frac{9{,}8}{1{,}6} = 183{,}7\ \text{m}$$

27 PAU **Dos planetas extrasolares A y B presentan la misma densidad, pero el radio de A es el doble que el de B. Demuestra cómo serán en comparación los pesos de una misma masa m en sus respectivas superficies.**

El peso de una masa m en la superficie de un planeta de masa M y radio R puede expresarse en función del radio y la densidad del planeta:

$$P = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{4}{3}\pi R^3\rho \cdot \frac{m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R\rho m$$

Si la densidad de ambos planetas es la misma, la relación entre el peso en el planeta A y en el planeta B será:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{R_A}{R_B} = 2 \Rightarrow P_A = 2P_B$$

D 28 PAU **La densidad de Marte es 0,71 veces la de la Tierra, mientras que su diámetro es 0,53 veces el terrestre. Deduce y explica cómo serán, en comparación, los pesos de una misma masa m en Marte y en la Tierra. ¿Cuál es el valor de g en la superficie de Marte si en la Tierra es de 9,8 m/s²?**

Haciendo uso de la expresión $g = \frac{4}{3}G\pi\rho r$, se obtiene:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{4/3\, G\pi \cdot 0{,}71\rho_T \cdot 0{,}53 r_T}{4/3\, G\pi\rho_T r_T} = 0{,}38$$

Puesto que $P = mg$, resulta claro que el peso de una misma masa en Marte es 0,38 veces el correspondiente en la Tierra. Y teniendo en cuenta que $g_T = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, por tanto:

$$\frac{P_{\text{Marte}}}{P_{\text{Tierra}}} = \frac{g_{\text{Marte}}}{g_{\text{Tierra}}}$$

despejando queda:

$$g_{\text{Marte}} = 0{,}38 \cdot g_{\text{Tierra}} = 3{,}7\ \text{m/s}^2$$

Gravitación y tercera ley de Kepler

29 **¿Qué condición cumplen los satélites que emiten señales de TV? ¿A qué distancia deben orbitar?**

Deben ser geoestacionarios, es decir, orbitar con el mismo período que el de rotación terrestre (véase el problema resuelto número 4 de la página 76).

30 **¿Sería posible situar un satélite estacionario sobre nuestro país?**

No sería posible situar un satélite permanentemente sobre nuestro país, porque el centro o foco orbital de este satélite debe ser el centro terrestre, por donde pasa la dirección de acción de la fuerza gravitatoria.

31 **Calcula la masa de Marte sabiendo que Fobos, uno de sus dos satélites, completa una órbita de 9 300 km de radio cada 0,32 días.**

La aceleración centrípeta de Fobos es la gravitatoria, de modo que:

$$G\frac{m}{r^2} = \omega^2 r$$

Despejando la masa, tenemos que:

$$m = \frac{\omega^2 r^3}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituyendo los datos correspondientes, llegamos a:

$$m = 6{,}23 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

Para obtener este resultado, T se ha expresado en segundos, y r, en metros.

32 **Halla cuántas veces es mayor la masa solar que la terrestre a partir de los datos orbitales de la Luna alrededor de la Tierra y de esta alrededor del Sol.**

Aplicando la tercera ley de Kepler al movimiento orbital de la Luna alrededor de la Tierra y conociendo el valor de la constante k para un satélite alrededor de la Tierra (subepígrafe 3.2), se obtiene:

$$T_L^2 = k' d^3_{TL} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d^3_{TL}$$

Haciendo lo propio en el caso del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, se obtiene:

$$T_T^2 = k d^3_{TS} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \cdot d^3_{TS}$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos:

$$\frac{T_L^2}{T_T^2} = \frac{m_S d^3_{TL}}{m_T d^3_{TS}}$$

Es decir:

$$\frac{m_S}{m_T} = \frac{T_L^2 d^3_{TS}}{T_T^2 d^3_{TL}}$$

Considerando los siguientes datos:

$$T_L = 27{,}31\ \text{días};\quad d_{TS} = 149\,600\,000\ \text{km}$$

$$T_T = 365{,}25\ \text{días};\quad d_{TL} = 384\,000\ \text{km}$$

cabe concluir que:

$$\frac{m_S}{m_T} = 3{,}3 \cdot 10^5$$

Es decir, la masa solar es $3{,}3 \cdot 10^5$ veces la terrestre.

33 **¿Cuál sería la masa de la Tierra, comparada con la real, para que la Luna girase en torno a nuestro planeta con el período actual, pero a una distancia dos veces mayor?**

Aplicando la tercera ley de Kepler para el caso real:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d^3$$

Por otro lado, si $d' = 2 \cdot d$ y se mantiene el periodo, tendremos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'_T} \cdot (2 \cdot d)^3$$

Igualando ambas expresiones, se llega a que:

$$m'_T = 8 \cdot m_T$$

Es decir, la masa ficticia debería ser 8 veces la real.

34 PAU **El satélite de Júpiter llamado Ío orbita a una distancia del centro planetario de 422 000 km, con un período de revolución de 1,77 días. Con estos datos, calcula a qué distancia se encuentra Europa, otra de sus lunas, si su período de revolución es de 3,55 días.**

Teniendo en cuenta que el valor de la constante k es el mismo para ambos casos, e igualando a partir de la tercera ley de Kepler, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{T^2_{\text{Io}}}{d^3_{\text{Io}}} = \frac{T^2_{\text{Europa}}}{d^3_{\text{Europa}}}$$

Despejando la distancia a que se encuentra Europa, se obtiene:

$$d_{\text{Europa}} = d_{\text{Io}} \cdot \left(\frac{T_{\text{Europa}}}{T_{\text{Io}}}\right)^{2/3}$$

Sustituyendo los datos correspondientes que nos facilita el problema, concluimos que:

$$d_{\text{Europa}} = 1{,}59 \cdot d_{\text{Io}} = 671\,144\ \text{km}$$

35 PAU **La masa de Saturno es 95,2 veces la de la Tierra. Encélado y Titán, dos de sus satélites, tienen períodos de revolución de 1,37 días y 15,95 días, respectivamente. Determina a qué distancia media del planeta orbitan estos satélites.**

En ambos casos se aplica la tercera ley de Kepler:

$$d^3 = \frac{T^2}{k} = \frac{Gm_{\text{Saturno}}T^2}{4\pi^2}$$

donde:

$$d = \left(\frac{Gm_{\text{Saturno}}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Como $m_{\text{Saturno}} = 95{,}2 \cdot m_T = 5{,}71 \cdot 10^{26}$ kg, al sustituir en la anterior expresión, se obtiene:

$$d_{\text{Encélado}} = 237\,520\ \text{km}$$

$$d_{\text{Titán}} = 1\,223\,161\ \text{km}$$

36 PAU **El Apolo VIII orbitó en torno a la Luna a una altura de su superficie de 113 km. Si la masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre, calcula:**

***a)* El período de su órbita.**

***b)* Su velocidad orbital y su velocidad angular.**

a) Puesto que la aceleración centrípeta de su órbita es la gravitatoria, al igualar, se obtiene:

$$G\frac{m_L}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

de donde:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_L}$$

Teniendo en cuenta que:

$$r = r_L + h = 1\,833\ \text{km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 7\,113\ \text{s}$$

b) Su velocidad orbital será:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 1\,618\ \text{m/s}$$

Y su velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{rad/s}$$

37 PAU **Con los datos ofrecidos en el ejercicio anterior, halla:**

***a)* La distancia que recorrería un cuerpo en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar.**

***b)* La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente si con esa velocidad se eleva en la Tierra hasta 20 m.**

Para resolver ambos apartados, debemos calcular la aceleración gravitatoria en la superficie lunar, que será, aproximadamente:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{0{,}012 \cdot m_T}{(0{,}27 \cdot r_T)^2}$$

$$g_L = 0{,}164 \cdot g_T = 1{,}60\ \text{m/s}^2$$

a) Así pues, la distancia que un cuerpo recorrería en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar sería:

$$y = \frac{1}{2} g_L t^2 = 0{,}81\ \text{m}$$

b) Teniendo en cuenta que la altura máxima que alcanza un objeto al ser lanzado verticalmente es:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

y si las velocidades de lanzamiento son iguales desde la Tierra y desde la Luna, entonces:

$$2g_T y_T = 2g_L y_L$$

donde:

$$y_L = \frac{g_T}{g_L} \cdot y_T = 121\ \text{m}$$

38 **La masa del planeta Saturno es 95,2 veces la de la Tierra, su radio es 9,4 veces el terrestre, y su distancia media al Sol es de 1 427 000 000 km. Calcula:**

***a)* La duración de su año en días terrestres.**

***b)* El valor de la gravedad en su superficie en relación con el terrestre.**

a) Por aplicación de la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{kd^3}$$

donde k es igual a $2{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{s}^2\,\text{m}^{-3}$ (véase la actividad 10 de la página 67).

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 9{,}274 \cdot 10^8\ \text{s} = 10\,734\ \text{días}$$

b) El valor de la gravedad superficial de Saturno es:

$$g_S = G\frac{m_S}{r_S^2}$$

Como $m_S = 95{,}2 \cdot m_T$, y $r_S = 9{,}4 \cdot r_T$, podemos concluir que:

$$g_S = G\frac{95{,}2 \cdot m_T}{(9{,}4 \cdot r_T)^2} = 1{,}08 \cdot g_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_T} = 1{,}08$$

39 **Marte se encuentra un 52 % más alejado del Sol que la Tierra. Con este dato, determina la duración del año marciano en días terrestres. Dato: año terrestre = 365 días**

Según la tercera ley de Kepler, $T^2 = kR^3$. Es decir, T^2/R^3 es constante. Por tanto:

$$\frac{T^2_{\text{Marte}}}{R^3_{\text{Marte}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}} \Rightarrow \left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = \left(\frac{R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3$$

Ahora bien, sabemos que $R_{\text{Marte}} = 1{,}52R_{\text{Tierra}}$, y que el periodo de la órbita terrestre es de 365 días, luego:

$$\left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = 1{,}52^3 = 3{,}511\,8$$

$$T_{\text{Marte}} = 1{,}874 \cdot T_{\text{Tierra}} = 684 \text{ días terrestres}$$

D 40 **PAU** **Júpiter tiene una masa 320 veces mayor que la terrestre y un volumen 1 320 veces superior al correspondiente a la Tierra. Determina:**

a) **A qué altura *h* sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite en órbita circular, para que su período de revolución fuese de 9 h y 50 minutos.**

b) **¿Qué velocidad tendrá el satélite en dicha órbita?**

Datos: $R_{\text{Tierra}} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_{\text{Tierra}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg

a) En el sistema gravitatorio creado por Júpiter, la constante de la tercera ley de Kepler será:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Júpiter}}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Tierra}} \cdot 320}$$

Por otro lado, sabemos que la aceleración de la gravedad terrestre viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Tierra}} = \frac{GM_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}} \Rightarrow GM_{\text{Tierra}} = g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}}$$

Ahora ya podemos expresar la constante de Kepler para Júpiter en función de datos conocidos:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}} \cdot 320} = 3{,}10 \cdot 10^{-16}$$

Conocida $k_{\text{Júpiter}}$, podemos aplicar la tercera ley de Kepler para determinar el radio de la órbita del satélite, convirtiendo previamente el periodo a segundos:

$$R^3_{\text{satélite}} = \frac{T^2_{\text{satélite}}}{k_{\text{Júpiter}}} = \frac{35\,400^2}{3{,}10 \cdot 10^{-16}} = 4{,}04 \cdot 10^{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\text{satélite}} = 1{,}59 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Para determinar la altura, calculamos el radio de Júpiter. Los volúmenes son proporcionales a los radios al cubo:

$$R^3_{\text{Júpiter}} = 1\,320 \cdot R^3_{\text{Tierra}} \Rightarrow R_{\text{Júpiter}} = 10{,}97 \cdot R_{\text{Tierra}} = 7{,}0 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La altura del satélite sobre la superficie de Júpiter se obtiene restando al radio de la órbita el radio de Júpiter, de donde resulta que $h = 8{,}95 \cdot 10^7$ m, es decir, 89 527 km.

b) Igualando la fuerza gravitatoria y la centrípeta:

$$G\frac{m_J m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Se obtiene la velocidad orbital del satélite a la distancia r:

$$v = \sqrt{gm_J/r} = 2{,}8 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

El fenómeno de las mareas

41 **Compara el efecto de marea que la Tierra produce sobre la Luna con el que la Luna ejerce sobre la Tierra. ¿Aclara el resultado por qué la Tierra no muestra siempre la misma cara a la Luna y, sin embargo, esta sí lo hace?**

Según hemos visto en el epígrafe 5 de esta unidad, la aceleración de marea que la Tierra ejerce sobre la Luna es, aproximadamente:

$$a_{TL} = G\frac{m_T 2r_L}{d^3}$$

Mientras que la aceleración de marea que nuestro satélite ejerce sobre la Tierra es:

$$a_{LT} = G\frac{m_L 2r_T}{d^3}$$

Al dividir ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{a_{TL}}{a_{LT}} = \frac{m_T r_L}{m_L r_T}$$

Teniendo en cuenta que el radio lunar es de 1 873 km y que la masa de la Luna es 0,012 veces la terrestre, puede comprobarse que la aceleración de marea de la Tierra sobre la Luna es unas 24,5 veces mayor que la producida por la Luna en nuestro planeta.

Esa es la razón de que haya sido la Luna la que disminuyó más rápidamente su rotación hasta acoplar sus movimientos de rotación y traslación.

42 **PAU** **En el apogeo (punto de la órbita más lejano de la Tierra) la Luna está 1/9 más lejos de la Tierra que en el perigeo. Calcula en qué porcentaje disminuye la fuerza de marea cuando la Luna está en el apogeo.**

La aceleración de marea y, por tanto, la fuerza de marea, es proporcional al inverso del cubo de la distancia Tierra-Luna, es decir:

$$F_{\text{marea}} \propto r^{-3}$$

Donde *r* es la distancia Tierra-Luna. La relación entre la fuerza de marea en el apogeo y en el perigeo será:

$$\frac{F_{\text{apogeo}}}{F_{\text{perigeo}}} = \frac{r^3_{\text{perigeo}}}{r^3_{\text{apogeo}}} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}729$$

Es decir, la fuerza de marea en el apogeo es, aproximadamente, un 73 % menor que en el perigeo; por lo que, disminuye en un 27 %.

43 **¿En qué estación del año y bajo qué condiciones lunares se producirían las máximas elevaciones de marea?**

Teniendo en cuenta que las máximas elevaciones (mareas vivas) se producen cuando se suman las contribuciones de la Luna y el Sol, es decir en períodos lunares de plenilunio o novilunio y considerando las dependencias con el inverso del cubo de la distancia a cada uno, es fácil entender que la circunstancia de máxima elevación de marea requiere:

- Mínima distancia lunar: luna en perigeo.
- Mínima distancia solar: invierno boreal o verano austral.
- Luna nueva o luna llena.

Por tanto, las condiciones más favorables tendrán lugar en nuestro invierno y dándose la coincidencia de que en el momento de luna llena o nueva, esta se encuentra en el perigeo o en sus proximidades.

3 El concepto de campo en la gravitación

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 82)

1. ¿Qué interacciones se describen mediante el concepto de campo?

Interacción gravitatoria entre masas, interacción eléctrica entre cargas…

2. ¿Qué diferencia conceptual crees que existe entre la idea de campo y la de acción a distancia?

Acción a distancia

- Se requiere la existencia de, al menos, **dos cuerpos.** Un solo cuerpo no genera acción alguna.
- El espacio es el marco absoluto e invariable en el que sucede la interacción.
- **La interacción es instantánea,** de modo que las leyes newtonianas no se modifican (por ejemplo, el principio de acción y reacción).

Concepto de campo

- Se requiere la existencia de **un solo cuerpo** para originar un campo. El segundo cuerpo tan solo atestigua la existencia del campo.
- Son las distorsiones de las propiedades asociadas al espacio-tiempo las responsables de la interacción.
- Las **interacciones se propagan a la velocidad de la luz,** lo que modifica aspectos esenciales de las leyes de Newton (por ejemplo, el principio de acción-reacción).

3. ¿Crees que sería necesaria la misma velocidad para hacer escapar un cohete de la Tierra que para hacerlo de la Luna? ¿Por qué?

No, porque es característica del cuerpo celeste depende de su y de su radio la Tierra.

4. ¿Qué conoces de los agujeros negros? ¿Por qué se denominan así?

Los agujeros negros son como una masa muy grande concentrada en un punto que crea un gran campo gravitatorio, es decir, que tiene una gran fuerza de gravedad. Se denominan así porque absorben muchísima energía (igual que el color negro), son como sumideros de energía.

Esta fuerza de gravedad es tal que impide que la luz salga del campo de atracción, resultando por ello invisible.

5. ¿Tienen los satélites en órbita que usar permanente motores para mantenerse en la misma?

No, porque la fuerza centrípeta coincide con la fuerza gravitatoria.

Actividades (páginas 85/97)

1 ¿A qué distancia de un cuerpo de masa $3m$ tiene el campo gravitatorio el mismo valor que a una distancia r de un cuerpo de masa m?

Puesto que $g = Gm/r^2$, si la intensidad de los campos creados por m y por $3m$ es la misma, se cumple que:

$$G\frac{3m}{d^2} = \frac{m}{r^2}$$

$$\frac{3}{d^2} = \frac{1}{r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{3}r$$

2 Si el campo gravitatorio debido a una masa vale g a una distancia r, ¿a qué distancia de la masa valdrá la mitad?

El módulo del campo gravitatorio creado por una masa m es:

$$g = G\frac{m}{r^2}$$

A cierta distancia, d, el campo vale la mitad, es decir:

$$g' = G\frac{m}{r^2} = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}G\frac{m}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{2}r$$

3 Si la Tierra fuese una corteza esférica y se practicase en ella un orificio, ¿qué movimiento describiría una pelota que fuera lanzada al interior de dicho orificio?

Puesto que el campo en el interior de una corteza esférica es nulo, la pelota no estaría sometida a ningún tipo de aceleración y describiría un movimiento rectilíneo uniforme.

4 Si cavaras un hipotético túnel que se extendiese desde el lugar en el que te encuentras hasta los antípodas (suponiendo que la Tierra tiene densidad constante), ¿qué tipo de movimiento describiría una pelota que se dejara caer por dicho túnel? Explícalo con todo detalle.

Como el campo en el interior de una esfera sólida viene dado por la ecuación **3.3**, el peso de la pelota en el interior del hipotético túnel variaría conforme a la expresión:

$$\vec{P} = -G\frac{mm'}{r^3}r'\vec{u}_r$$

Por tanto, la fuerza que actúa sobre la pelota responde a la expresión típica de una fuerza restauradora, dirigida siempre hacia la posición de equilibrio ($r' = 0$) y que varía proporcionalmente con la distancia y en sentido opuesto. En consecuencia, la pelota oscilaría continuamente de un extremo al otro del hipotético túnel.

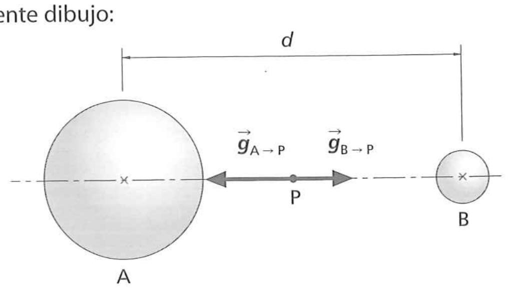
Nota: como ejercicio de ampliación, en la UNIDAD 7, dedicada al estudio del movimiento oscilatorio, puede sugerirse a los alumnos que demuestren que el período de dichas oscilaciones es igual al período orbital que tendría un cuerpo a una distancia equivalente al radio terrestre.

5 PAU Dos esferas A y B tienen la misma densidad, pero el radio de A es el triple del radio de B.

a) **¿Qué relación guardan los respectivos valores del campo en un punto P equidistante de los centros de las esferas?**

b) **Si la separación entre los centros de las esferas es d, ¿a qué distancia de la esfera A se encuentra el punto en el que el campo resultante es nulo?**

La situación descrita en el enunciado se observa en el siguiente dibujo:



a) El campo creado por la esfera A en el punto P será:

$$g_{A\to P} = G\frac{m_A}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{r^2}$$

En la expresión anterior, hemos puesto la masa como producto del volumen por la densidad.

Por su parte, el campo creado por la esfera B en el punto P será:

$$g_{B\to P} = G\frac{m_B}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{(R/3)^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{27r^2}$$

Por tanto, la relación entre los dos campos será:

$$\frac{g_{A\to P}}{g_{B\to P}} = 27$$

b) A cierta distancia del centro de la esfera A, los campos creados por ambas esferas son idénticos, si bien con sentidos opuestos. En ese punto, por tanto, $g_{A\to P} = g_{B\to P}$. Si llamamos r a dicha distancia:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{27(d-r)^2}$$

Simplificando términos y tomando las inversas, resulta:

$$27(d-r)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d - r = \frac{r}{3\sqrt{3}}$$

Agrupando términos y despejando, obtenemos:

$$r = 0{,}839d$$

6 Haz una estimación del valor de g en la cima del Everest, teniendo en cuenta el valor de 9,8 m/s² al nivel del mar. ¿Crees que es correcto utilizar 9,8 m/s² como valor general para toda la superficie terrestre?

Dato: altura del Everest: 8,9 km

Aplicando la expresión **3.4**, en la que $h = 8\,900$ m, obtendremos:

$$g'_{Everest} = 9{,}77\ \text{m/s}^2$$

Como puede comprobarse, la generalización del valor aproximado de 9,8 m/s² para toda la corteza terrestre es válida para la mayor parte de las situaciones.

7 Considerando que en la superficie de Marte g es 3,72 m/s², calcula cuál sería el valor de la gravedad en la cima del monte Olimpo, que, con sus 25 km de altura, es el monte conocido más alto del sistema solar.

Aplicando de nuevo la expresión **3.4**, y tomando como radio promedio para Marte $3{,}38 \cdot 10^6$ m, el valor de g' en la cima del monte Olimpo de Marte será:

$$g' = 3{,}66\ \text{m/s}^2$$

Es decir, ha disminuido en un 2 %.

8 Dibuja una gráfica de las variaciones de la aceleración de la gravedad, g, en función de la distancia r al centro de la Tierra. ¿A qué profundidad, x, por debajo de la superficie terrestre hay que descender para que un cuerpo pese lo mismo que a una altura h sobre la misma?

La gráfica pedida es idéntica a la zona de la izquierda de la figura 3.12.

La segunda parte de la pregunta se refiere, en consonancia con el epígrafe, a alturas pequeñas. En consecuencia, la condición que debe cumplirse es:

$$G\frac{m_T}{r_T^3}r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{r_T}r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right)$$

De donde se obtiene:

$$r' = r_T - 2h$$

Puesto que r' es la distancia desde el centro terrestre hasta el punto considerado, la profundidad pedida será: $x = 2h$.

9 ¿Por qué produce la rotación terrestre un abultamiento ecuatorial y un achatamiento por los polos en nuestro planeta?

En la zona ecuatorial, la aceleración centrífuga alcanza su máximo valor, al ser también máxima la distancia al eje de rotación. Al actuar, en este caso, en la misma dirección que $\vec{g}$, el valor de $\vec{g}_{eféctiva}$ es algo menor. Por esta razón, la Tierra presenta un abultamiento en la zona ecuatorial. Por el contrario, en las zonas polares, la aceleración centrífuga es nula, y $\vec{g}_{efectiva} = \vec{g}$, por lo que su valor es mayor. De ahí que la Tierra presente un achatamiento en las zonas polares.

10 Determina qué ángulo separa la vertical de la dirección radial en una latitud de 40°.

La relación que existe entre la componente horizontal y la radial de $\vec{g}_{efectiva}$ nos da la tangente del ángulo α, que separa la vertical de la dirección radial y es:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2 r_T \cos\varphi \cdot \text{sen}\,\varphi}{g - \omega^2 r_T \cos^2\varphi} = 0{,}0017$$

Por lo que $\alpha = 0{,}097°$.

Para obtener este valor, se ha tenido en cuenta que $\omega = 2\pi/86\,400$ rad/s. Obsérvese que la desviación de la vertical con respecto a la dirección radial es sumamente pequeña.

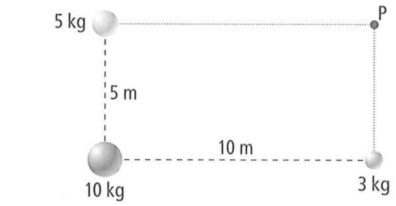
11 Calcula los valores de la gravedad efectiva en las latitudes canarias (aprox. 28°) y cantábricas (aprox. 43°). Considera $g = 9{,}81$ N/kg.

La gravedad efectiva viene dada por la expresión **3.5**, en la que se observa la variación con la latitud del lugar, φ. La velocidad angular de la Tierra puede ponerse en función del periodo de rotación: $\omega = 2\pi/T$. Sabemos que el periodo es de 24 horas, es decir, de 86 400 s. Por tanto:

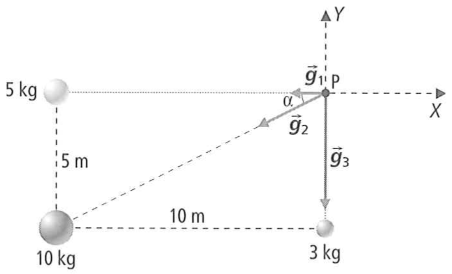
$$g_{Canarias} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos^2 28 = 9{,}783\,7\ \text{m/s}^2$$

$$g_{Cantabria} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos^2 43 = 9{,}792\,0\ \text{m/s}^2$$

12 Determina el campo producido en el punto P por la distribución de masas de la siguiente figura.



Representemos primero los vectores de campo producidos por la distribución de masas en el punto P.



El campo total será la suma vectorial de los campos originados por las distintas masas:

$$\vec{g}_{total} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Para la masa m_1, el campo creado será:

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{i} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5\ \text{kg}}{(10\ \text{m})^2}\vec{i} =$$

$$= -3{,}335 \cdot 10^{-12}\vec{i}\ \text{N/kg}$$

Así, para la masa m_2, tendremos que:

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\cos\alpha\,\vec{i} - G\frac{m_2}{r_2^2}\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j} =$$

$$= -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{10\ \text{kg}}{\left(\sqrt{125\ \text{m}}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{10}{\sqrt{125}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{125}}\vec{j}\right) =$$

$$= (-4{,}772\cdot 10^{-12}\vec{i} - 2{,}386\cdot 10^{-12}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y, para m_3:

$$\vec{g}_3 = -G\frac{m_3}{r_3^2}\vec{j} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2\cdot\frac{3\ \text{kg}}{(5\ \text{m})^2}\vec{j} =$$

$$= -8{,}004\cdot 10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

Entonces, el campo total será:

$$\vec{g}_{\text{total}} = (-8{,}107\cdot 10^{-12}\vec{i} - 1{,}039\cdot 10^{-11}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y su módulo será:

$$g = 1{,}317\cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$$

13 **¿Cuánto trabajo se realiza al desplazar una masa de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una distancia igual a tres veces el radio de la Tierra?**

El trabajo será igual a la variación negativa de la energía potencial, por lo que:

$$W = -G\frac{m_T m}{r_T} - \left(-G\frac{m_T m}{3r_T}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}G\frac{m_T m}{r_T} = -4{,}19\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

El signo negativo del trabajo significa que se realiza contra la atracción gravitatoria.

14 **Un sistema consta de cuatro partículas de 10 g situadas en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?**

La energía potencial del sistema será:

$$E_{\text{p total}} = E_{\text{p }12} + E_{\text{p }13} + E_{\text{p }14} + E_{\text{p }23} + E_{\text{p }24} + E_{\text{p }34}$$

Las distancias r_{13} y r_{24} son las diagonales del cuadrado y valen 0,28 m. Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{\text{p total}} = -G\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}\left(\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2}\right) = -G\cdot 10^{-4}\left(\frac{4}{0{,}2} + \frac{2}{0{,}28}\right) =$$

$$= -1{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

15 **PAU** **Cuatro masas de 2, 4, 3 y 0,4 kg, respectivamente, se encuentran en los vértices de un cuadrado de 2 m de lado. ¿Cuánto vale el potencial en el centro del cuadrado? ¿Qué energía potencial adquirirá una masa de 10 kg colocada en dicho punto?**

La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es igual a $\sqrt{2}$ m. Así pues:

$$V = -\frac{G}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)$$

Sustituyendo los datos queda:

$$V = -4{,}43\cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

Por su parte, la energía potencial que adquiriría una masa $m' = 10$ kg situada en dicho punto será:

$$E_p = m'V = -4{,}43\cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

16 **PAU** **El potencial gravitatorio debido a cierta masa varía a lo largo de la dirección X según la expresión:**

$$V(x) = -\frac{2\cdot 10^{-7}}{x}\ \text{J/kg}$$

Determina:

a) El valor de la masa, considerada puntual, que origina dicho potencial.

b) La expresión vectorial del campo gravitatorio en $x = 10$ m y en $x = 20$ m.

a) Sabemos que el potencial creado por una masa puntual viene dado por la expresión:

$$V(x) = -G\frac{m}{x}$$

b) El campo es el gradiente del potencial cambiado de signo:

$$\vec{g} = -\frac{\delta V}{\delta x}\vec{i} = -\frac{2\cdot 10^{-7}}{x^2}\vec{i}$$

Por tanto:

$$\vec{g}(x = 10) = -2\cdot 10^{-9}\vec{i}$$

$$\vec{g}(x = 20) = -5\cdot 10^{-10}\vec{i}$$

17 **¿Qué valor tiene el campo gravitatorio en el punto A de la figura 3.23? Razona tu respuesta.**

En dicho punto, los campos gravitatorios lunar y terrestre son iguales y de sentidos opuestos, por ello el campo neto es nulo.

18 **¿Cuánto vale la velocidad de escape del Sol a una distancia igual al radio orbital terrestre? ¿Qué te sugiere el resultado?**

La velocidad de escape de la atracción gravitatoria solar a esa distancia (149 600 000 km) es:

$$v = \sqrt{\frac{2Gms}{r}} = 42\,230\ \text{m/s} = 42{,}23\ \text{km/s}$$

La conclusión que se extrae de este resultado es que la velocidad de escape terrestre no es suficiente para abandonar el campo gravitatorio solar. Como se comenta en el texto, las sondas que han abandonado el sistema solar han tenido que adquirir la velocidad necesaria haciendo uso de la llamada «asistencia gravitacional».

Cuestiones y problemas (páginas 102/103)

Guía de repaso

1 **¿Qué importante diferencia se establece a partir de los trabajos de Maxwell en el tratamiento de la interacción a larga distancia y que marca una significativa diferencia entre el concepto de campo y el de acción a distancia?**

Las interacciones entre cuerpos a distancia no son instantáneas, sino que se propagan a la velocidad límite de la luz.

2 **¿Qué se entiende por campo gravitatorio?**

Campo gravitatorio es aquella región del espacio cuyas propiedades son perturbadas por la presencia de una masa m.

3 **¿Qué magnitudes se utilizan como inherentes o propias del campo gravitatorio? ¿Y cuáles se usan para describir la interacción del campo con una partícula testigo?**

Las magnitudes que definen el campo son la Intensidad del campo en un punto y el potencial del campo.

Las magnitudes que se utilizan para describir la interacción del campo con una partícula testigo son la fuerza que actúa sobre la partícula como medida de la interacción, y la energía potencial de la partícula asociada a su posición relativa en el campo.

4 **¿Cuál es la expresión para la intensidad del campo debido a una masa puntual en un punto P distante?**

$$\vec{g} = -Gm/r^2\,\vec{u}_r,\ \text{o bien}\ g = F/m'$$

donde m es la masa que origina el campo y m', la testigo.

5 **¿Cómo es el campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior? ¿Y en uno interior? ¿Podrías demostrar tu respuesta a esta última cuestión desde un punto de vista cualitativo?**

El campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior es idéntico al que se obtendría si toda la masa de la corteza estuviera concentrada en su centro. En un punto interior el campo es nulo. Véase la demostración dada en la página 87.

6 **¿Bajo qué aproximaciones equivale el campo creado por una esfera sólida en un punto exterior de esta al de esa misma masa considerada puntual y concentrada en el centro de la esfera?**

Hay que suponer que la densidad de la esfera es uniforme o varía solo con la distancia al centro, o decir, de modo isotrópico.

7 **¿De qué forma varía el campo en el interior de una esfera sólida? ¿Bajo qué suposiciones?**

Varía linealmente con la distancia al centro hasta hacerse cero en dicho punto. La suposición que hay que hacer es que la densidad de la esfera es uniforme.

8 **¿Cómo se modifica la aceleración gravitatoria efectiva en la superficie en función de la altitud? ¿Y en función de la latitud?**

En función de la altitud: $g_{\text{efectiva}} = g\left(1 - \dfrac{2h}{r_T}\right)$

En función de la latitud: $g_{\text{efectiva}} = g - \omega^2 r_T \cos^2\varphi$

9 **¿En qué condiciones es lícito utilizar el término *mgh*, en el que *g* es constante?**

En pequeñas alturas (véase la página 93).

10 **¿Qué significado físico tiene hablar de energía potencial de un conjunto de partículas?**

La medida del trabajo que debería realizarse para separar el sistema hasta hacer infinita la distancia entre las partículas.

11 **¿Cuál es el significado físico de la energía de amarre o de ligadura?**

Es la energía que debe transferirse por unidad de masa para que un cuerpo abandone completamente un campo gravitatorio.

12 **¿Qué le ocurriría a un cuerpo lanzado desde la Tierra a una velocidad de 11,2 km/s si tenemos presente su situación en el sistema solar?**

Que no llegaría a abandonar el sistema solar.

El campo gravitatorio

13 **PAU** **Dos cortezas esféricas de distinto radio tienen la misma masa. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto situado a la misma distancia de sus respectivos centros?**

Sí, siempre y cuando el punto considerado sea exterior a ambas cortezas.

14 **Dos cortezas esféricas de la misma densidad tienen distinto radio. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto equidistante de sus respectivos centros?**

A igualdad de densidad, la corteza de mayor radio (mayor superficie) tendrá mayor masa, por lo que el campo originado por ella en un punto equidistante será también mayor. Si consideramos la densidad como superficial, la masa de cada esfera vendrá dada por $\rho 4\pi r^2$, con lo que queda clara la interdependencia entre la masa y el radio de la corteza.

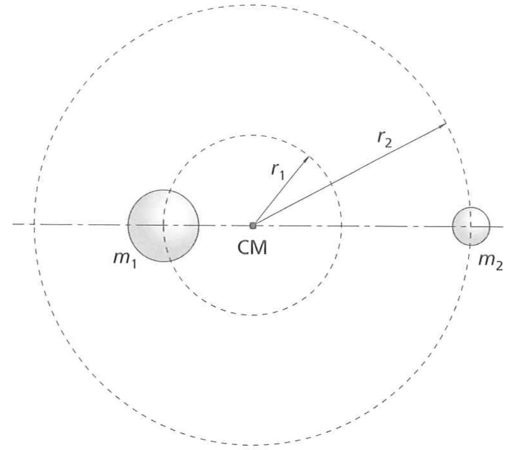
15 **PAU** **Observa que la variación de $\vec{g}$ con respecto a r en el interior de una esfera sólida puede expresarse mediante la igualdad $\vec{g} = -kr\vec{u}_r$. En consecuencia, ¿cómo varía la fuerza gravitatoria con la distancia en el interior de dicha esfera? ¿Qué fuerzas de las que estudiaste en 1.° de Bachillerato variaban de igual manera con la distancia?**

Varía del modo en que lo hacen las fuerzas restauradoras, como las elásticas, estudiadas en 1.° de Bachillerato. En este caso, la posición de equilibrio sería el centro de la esfera (suponiendo constante la densidad).

16 **PAU** **Sean dos masas m_1 y m_2 orbitando alrededor del centro de masas del sistema con idéntico período T, a distancias respectivas r_1 y r_2. Dado que es la interacción gravitatoria mutua la que proporciona la fuerza centrípeta necesaria a cada una, demuestra que debe cumplirse que:**

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



La fuerza gravitatoria que ejerce la masa m_1 sobre m_2 es igual y de sentido contrario a la que ejerce m_2 sobre m_1. Estas dos fuerzas son las responsables de los respectivos movimientos giratorios en torno al centro de masas, es decir:

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2 r_1}{r_1^2} = \frac{m_1 v_2^2 r_2}{r_2^2}$$

Ahora bien, el cociente entre la velocidad lineal y la distancia al centro de masas es la velocidad angular, idéntica para ambas masas. Por tanto, podemos simplificar la anterior igualdad:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Es decir, cuanto más grande sea una masa respecto a la otra, menor será el radio de su órbita respecto al radio de la otra masa.

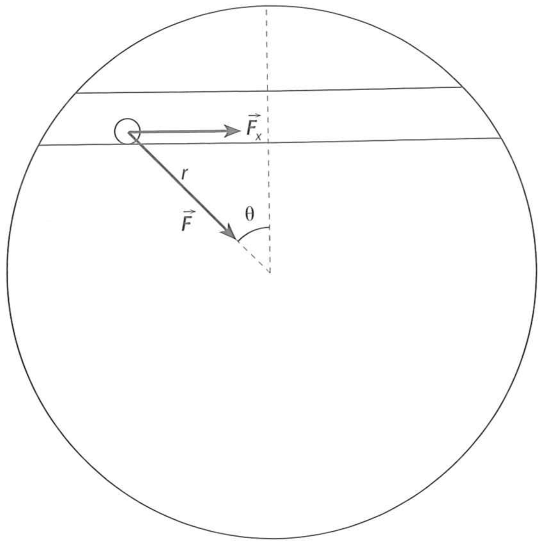
17 **¿Qué tipo de movimiento describiría una partícula en el interior de un hipotético túnel que se cavara desde un punto de latitud 60° N-longitud 0° hasta otro de latitud 60° N-longitud 180°, si la partícula se abandonara en la entrada del túnel?**

Describirá un movimiento oscilatorio bajo la acción de una fuerza variable con la distancia.

Como puede observarse en el dibujo, en este caso es la componente x de la fuerza gravitatoria la que varía con la distancia (la componente y es compensada por la reacción normal de la pared del túnel), con lo que:

$$F_x = F\,\text{sen}\,\theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3}\,r\,\text{sen}\,\theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3}\,x$$

Es decir, se trata de una fuerza restauradora del tipo $F = -kx$.



18 **Si se mantuviera constante la densidad de la Tierra:**

a) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su radio se duplicara?**

b) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su diámetro fuera la mitad?**

a) Puesto que podemos expresar el campo gravitatorio superficial en función de la densidad como:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

si el planeta aumenta de tamaño sin variar la densidad, el peso de los cuerpos en la superficie se incrementaría linealmente con r. Concretamente, el radio (o el diámetro) se duplica, el peso también se duplicaría.

b) Haciendo uso de la misma expresión que en el apartado anterior, si el diámetro se reduce a la mitad, g también lo hará en la misma proporción, luego el peso se reducirá también a la mitad.

19 **Considerando que el período de un péndulo en la superficie terrestre viene dado por $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$, donde l es la longitud del péndulo, analiza si un reloj de péndulo que funcionase bien en nuestras latitudes se atrasaría o se adelantaría en las siguientes situaciones:**

a) **El reloj es trasladado al polo Norte.**

b) **El reloj es trasladado al ecuador.**

c) **El reloj asciende a gran altura en un globo aerostático.**

d) **El reloj desciende a gran profundidad en el interior terrestre.**

e) **El reloj viaja en el interior de una estación orbital.**

a) El período disminuye y, en consecuencia, el reloj se adelantaría, pues g aumenta.

b) Ahora g disminuye y el período aumenta, por lo que el reloj se atrasaría.

c) Sucede lo mismo que en *b)*.

d) En este caso, g disminuye con respecto al valor superficial y el reloj se atrasaría al aumentar el período.

e) El reloj no funcionaría al estar en situación de caída libre.

20 **¿En qué lugar pesa más un cuerpo: en la superficie de nuestro planeta, a 2 000 m de altura o a una profundidad de 2 000 m?**

El mayor valor de g corresponde a la superficie de nuestro planeta, por lo que será ahí donde pese más.

21 **En un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, la aceleración superficial es de 5,4 m/s². Determina cuánto vale comparativamente la densidad (suponiendo que sea constante) del planeta en relación con la densidad terrestre, ρ_T (considerándola también constante).**

El valor de la aceleración gravitatoria de la Tierra es:

$$g_T = \frac{4}{3} G\pi r_T \rho_T = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

En el caso del planeta:

$$g_P = \frac{4}{3} G\pi r_P \rho_P = 5{,}4 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{r_P\rho_P}{r_T\rho_T} = 0{,}55$$

Como $r_P = r_T/3$, entonces:

$$\frac{\rho_P}{3 \cdot \rho_T} = 0{,}55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_P = 1{,}65 \cdot \rho_T$$

22 **PAU** **Halla la altura sobre la superficie terrestre a la que debe colocarse un satélite artificial para que su peso se reduzca en un 20 %.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

El satélite deberá situarse en un punto tal que la intensidad del campo valga:

$$0{,}8 \cdot g = 7{,}84 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, a partir de la expresión:

$$g' = G\frac{m_T}{r^2}$$

se puede obtener r:

$$r = \sqrt{\frac{Gm r_T}{g'}} = 744\,642{,}6 \text{ m} = 7\,144{,}64 \text{ km}$$

Como $r = r_T + h$, la altura a la que debe colocarse el satélite será:

$$h = r - r_T = 774{,}64 \text{ km}$$

23 **PAU** **Halla el valor que tiene el campo gravitatorio en la superficie del planeta Júpiter, teniendo en cuenta que su masa es 300 veces la de la Tierra, y su radio, 11 veces mayor que el terrestre.**

El valor del campo gravitatorio en la superficie de Júpiter será:

$$g_J = G\frac{m_J}{r_J^2} = G\frac{300 \cdot m_T}{(11 \cdot r_T)^2} = 2{,}48 \cdot g_T$$

Es decir:

$$g_J = 24{,}3 \text{ m/s}^2$$

El campo gravitatorio desde un enfoque energético

24 **Si entendemos que la energía potencial es algo así como la capacidad de realizar un trabajo en función de la posición, ¿consideras acertado el criterio de que la energía potencial es cero en el infinito?**

Como la intensidad del campo, por definición, tiende a cero en el infinito, lo más lógico sería considerar el valor cero de energía potencial a distancia infinita, entendiendo que, al tender el campo a cero, también lo hace la fuerza gravitatoria capaz de realizar el trabajo, por lo que el cuerpo, a distancia infinita, perdería dicha capacidad.

25 **Si elegimos como criterio que la energía potencial es cero en la superficie terrestre, ¿cuánto valdría en el infinito?**

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al desplazar un cuerpo de masa m desde el infinito hasta la superficie de nuestro planeta viene dado, en todos los casos, por:

$$W = \int_\infty^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = -Gmm'\int_\infty^r \frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= -Gmm'\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r = G\frac{mm'}{r}$$

Y puesto que el trabajo equivale a la variación negativa de energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

llegamos a:

$$-\Delta E_p = E_{p\infty} - E_{p\,r} = G\frac{mm'}{r}$$

Así pues, queda claro que si elegimos como valor cero el de la energía potencial en la superficie, el valor de la energía potencial en el infinito será:

$$E_{p\infty} = G\frac{mm'}{r}$$

donde r es el radio terrestre. Debe entenderse que, sea cual sea el criterio de energía potencial cero elegido, el resultado del cálculo del trabajo efectuado debe ser el mismo.

26 **PAU** ***a)*** **Determina la velocidad con que llega a la superficie terrestre un cuerpo que se deja caer desde una altura h no despreciable medida desde la superficie. Demuestra, asimismo, que si h es despreciable comparada con el radio terrestre se obtiene la expresión:**

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) **Determina la velocidad con la que llegará a la superficie terrestre un objeto que es abandonado en reposo a una altura de 5 000 km sobre ella.**

a) Para efectuar el cálculo, consideraremos que la energía mecánica del cuerpo se conserva en la caída. Es decir:

$$(E_p)_r = (E_c + E_p)_{r_T}$$

Sustituyendo llegamos a:

$$-G\frac{m_T m}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{m_T m}{r_T}\right)$$

Si despejamos v y desarrollamos la expresión teniendo en cuenta que $r = r_T + h$, obtenemos:

$$v = \sqrt{2Gm_T\frac{h}{r_T^2 + r_T h}}$$

Esta es la expresión general de la velocidad de un objeto que cae desde cualquier altura, por grande que sea, cuando llega al suelo. Observemos que, si consideramos que la altura h es pequeña comparada con el radio terrestre, podemos despreciar en el denominador $r_T h$ frente a r_T^2, con lo que nos queda la conocida expresión (válida sólo para alturas pequeñas):

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) La expresión general de la velocidad puede simplificarse del siguiente modo:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T^2} \cdot \frac{h}{1 + h/r_T}} = \sqrt{2g\frac{h}{1 + h/r_T}}$$

Sustituyendo el valor de la altura h, resulta:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{5 \cdot 10^6}{1 + \dfrac{5 \cdot 10^6}{6{,}37 \cdot 10^6}}} = 7\,409{,}7 \text{ m/s}$$

En este cálculo no se ha tenido en cuenta la fricción del aire, que frena a todo cuerpo en su caída.

27 **Si el campo en el interior de una esfera sólida homogénea varía conforme a r, ¿cómo lo hará el potencial en función de r en el interior de dicha esfera?**

El potencial en el interior de la esfera variará conforme a r^2. La razón es que, si consideramos los puntos situados a lo largo de una dirección en el interior de la esfera, la relación que existe entre el campo y el potencial en los puntos de dicha recta viene dada por la expresión $g = -dV/dr$, por lo que V debe depender de r^2 para obtener la correspondiente variación lineal de g con r.

28 **¿Qué puede decirse del potencial gravitatorio en el interior de una corteza esférica?**

Puede decirse que será constante. Usando la relación entre g y V ($g = -dV/dr$), dado que $g = 0$ en el interior de una corteza esférica, el potencial ha de ser constante.

29 **PAU** **Tres partículas cuyas masas son 2, 4 y 0,3 kg se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 8,66 m de altura. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?**

La energía potencial del sistema será:

$$E_p = -\frac{G}{l}(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)$$

donde:

$$l = \frac{h}{\text{sen } 60°} = 10 \text{ m}$$

Por tanto:

$$E_p = -6{,}53 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

30 **PAU** **¿A qué altura de la superficie terrestre ascendería un objeto lanzado verticalmente desde dicha superficie con una velocidad de 5 km/s?**

El objeto lanzado verticalmente alcanzará la altura máxima cuando $E_{c\,\text{final}} = 0$, por lo que:

$$E_{c\,\text{inicial}} + E_{p\,\text{inicial}} = E_{p\,\text{final}}$$

de donde:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mm_T}{r_T} = -G\frac{mm_T}{r_T + h}$$

Simplificando, cambiando de signo e invirtiendo términos se obtiene:

$$h = \frac{v_0^2 r_T^2}{2Gm_T - v_0^2 r_T}$$

Sustituyendo los valores:

$$h = 1\,590\,460 \text{ m} = 1\,590{,}46 \text{ km}$$

Luego:

$$\frac{1}{\dfrac{2Gm_T}{r_T} - v_0^2} = \frac{r_T + h}{2Gm_T}$$

Despejando h y simplificando, resulta la siguiente expresión, que permite obtener la altura:

$$\frac{2Gm_T - r_T}{2Gm_T - v_0^2 r_T} = r_T + h$$

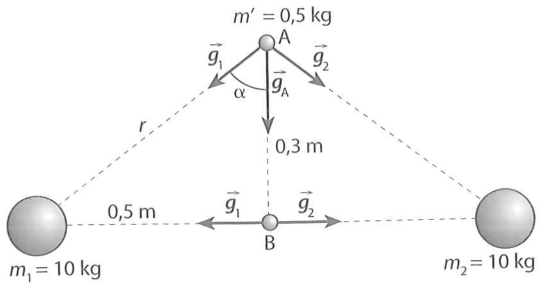
31 **PAU** **Dos masas puntuales de 10 kg cada una se encuentran fijas en dos puntos separados por una distancia de 1 m. Una tercera masa de 0,5 kg se abandona en un punto A equidistante de ambas y situado a 30 cm por encima del punto medio B del segmento que las une. Calcula:**

a) **La aceleración de la tercera masa en los puntos A y B.**

b) **La velocidad que llevará cuando pase por el punto B.**

c) **El tipo de movimiento que describe.**

La figura siguiente ilustra el enunciado del problema:



a) Según se desprende de la figura:

$$r = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2} = 0{,}58 \text{ m}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{0{,}5}{0{,}58}$$

El ángulo α es:

$$\alpha = 59°$$

La intensidad del campo debido a m_1 en el punto A es:

$$\vec{g}_1 = G \frac{m_1}{r^2} (-\text{sen } 59° \, \vec{i} - \cos 59° \, \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

y la del originado por m_2 es:

$$\vec{g}_2 = G \frac{m_2}{r^2} (\text{sen } 59° \, \vec{i} - \cos 59° \, \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

Así pues, la intensidad del campo en el punto A, teniendo en cuenta que $m_1 = m_2$, es:

$$\vec{g}_A = -2G \frac{m_1}{r^2} \cdot \cos 59° \vec{j} = -2 \cdot 10^{-9} \vec{j} \text{ m/s}^2$$

Es decir, la aceleración gravitatoria debida a m_1 y m_2 en el punto A es $2 \cdot 10^{-9}$ m/s^2.

Sin embargo, en el punto B, la aceleración gravitatoria total es cero, pues los dos campos se anulan mutuamente.

b) Por el principio de conservación de la energía mecánica, se cumplirá que:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

es decir:

$$E_{c\,B} - E_{c\,A} = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

donde $E_{c\,A} = 0$.

Por supuesto, la energía potencial en A es:

$$E_{p\,A} = m'V_A = m'\left(-2G\frac{m}{r}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{p\,A} = -1{,}15 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

mientras que la energía potencial en B es:

$$E_{p\,B} = m'V_B = m'\left(-2G\frac{m}{x}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{p\,B} = -1{,}335 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Así pues:

$$\frac{1}{2} m'v^2 = E_{p\,A} - E_{p\,B} = 1{,}85 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Despejando la velocidad, se obtiene:

$$v = 2{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

c) Las condiciones del movimiento en el que la v_0 es igual a cero en el punto A y distinta de cero en el punto B, y la aceleración es distinta de cero en el punto A y cero en el punto B, para, a continuación, invertir su sentido.

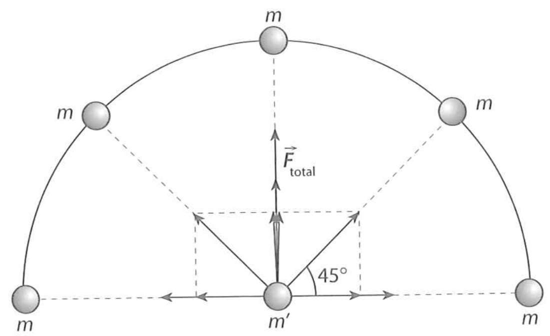
Estas condiciones, permiten predecir que el movimiento de la partícula será oscilatorio y que tendrá como punto de equilibrio el punto B.

32 PAU **Cinco masas de 4 kg cada una están en posiciones equidistantes sobre el arco de una semicircunferencia de 80 cm de radio. Una masa de 0,5 kg se sitúa en el centro de curvatura de dicho arco. Determina:**

***a)* La fuerza que actúa sobre dicha masa.**

***b)* La energía potencial de dicha masa en ese punto.**

a) La siguiente figura ilustra el enunciado de este problema:



Al ser iguales las cinco masas, la fuerza resultante sobre m' es:

$$\vec{F}_{total} = (F + 2 \cdot F \text{ sen } 45°) \vec{j} \text{ N}$$

Es decir:

$$\vec{F}_{total} = \left[G\frac{mm'}{r^2}(1 + \sqrt{2})\right]\vec{j} \text{ N}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$\vec{F}_{total} = 5{,}02 \cdot 10^{-10} \vec{j} \text{ N}$$

b) La energía potencial de la masa m' en el punto indicado es:

$$E_p = m'V = m'\left(-G\frac{5 \cdot m}{r}\right) = -8{,}34 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Movimiento de cuerpos en campos gravitatorios

33 **Un satélite artificial en movimiento circular alrededor del planeta O es acelerado cuando pasa por el punto P. Razona cuál de las siguientes figuras refleja la nueva órbita en la que se moverá el satélite.**

A la vista de las posibles órbitas, el satélite sigue teniendo energía total negativa tras pasar por P, es decir, describe una elipse. Si suponemos que, tras la aceleración, el satélite sigue sujeto exclusivamente a la atracción gravitatoria que ejerce el planeta O, este deberá estar situado en uno de los focos de la elipse que describe la trayectoria. En consecuencia, la trayectoria válida será la ***a***.

34 **Un objeto celeste que proviene del exterior del sistema solar pasa muy cerca de la atmósfera terrestre con una velocidad de 15 km/s. ¿Quedará fijado en una órbita alrededor de la Tierra? ¿Quedará capturado en el sistema solar?**

El objeto no quedará fijado en ninguna órbita alrededor de la Tierra, dado que su velocidad es superior a la de escape terrestre. Sin embargo, sí quedará atrapado en el sistema solar, pues su velocidad es inferior a la que se requiere para escapar del sistema solar. No se consideran aquí posibles asistencias gravitatorias que podrían catapultarlo fuera del sistema.

35 **Si el radio lunar es 0,27 veces el terrestre y la masa lunar es 0,012 veces la terrestre, ¿cuál es la velocidad de escape de la superficie lunar? ¿Cuánto valdrá la energía de ligadura lunar por kilogramo de masa?**

Considerando en la expresión 3.12 la masa y el radio lunar en comparación con los datos terrestres, podemos concluir que:

$$v_{\text{escape lunar}} = 0{,}21 \cdot v_{\text{escape terrestre}} = 2{,}35 \text{ km/s}$$

Por otra parte, sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión de la energía de ligadura, comprobamos que en el caso lunar vale:

$$E_{\text{ligadura lunar}}/\text{kg} = 0{,}044 \cdot E_{\text{ligadura terrestre}} = 2{,}76 \cdot 10^6 \text{ J}$$

36 **¿Puede orbitar un satélite en torno a la Tierra sin que su plano orbital contenga en su interior el centro terrestre?**

No puede orbitar en esas condiciones. La fuerza central que mantiene al satélite en órbita ha de estar dirigida hacia el centro terrestre, lo que obliga a que la Tierra esté contenida en el plan orbital.

D37 PAU **Desde la superficie terrestre se lanza un satélite; al llegar a la máxima altura *r* medida desde el centro terrestre, se le comunica una velocidad horizontal. ¿Qué ocurrirá en cada uno de los siguientes casos?**

***a)* La velocidad comunicada es $v_1 = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$.**

***b)* La velocidad comunicada está comprendida entre v_1 y $\sqrt{2}v_1$.**

***c)* La velocidad comunicada es mayor o igual a $\sqrt{2}v_1$.**

a) La energía mecánica del satélite tras proporcionarle la velocidad horizontal es:

$$E = -\frac{Gm_Tm}{r} + \frac{1}{2}m\frac{Gm_T}{r} = -\frac{1}{2}\frac{Gm_Tm}{r}$$

Se trata de una velocidad negativa, luego el satélite describirá una órbita cerrada. Además, según se ha visto en el subepígrafe 5.3, la velocidad suministrada es la que da lugar a una órbita circular.

b) En este caso, la energía sigue siendo negativa, pero mayor que la requerida para una órbita circular. Por tanto, la órbita será elíptica.

c) En ese caso, el cuerpo abandona el campo gravitatorio terrestre, siguiendo una trayectoria parabólica (si $v = \sqrt{2}v_1$) o hiperbólica (si $v > \sqrt{2}v_1$).

38 PAU **La distancia de la Tierra al Sol es de 152 100 000 km en el afelio, mientras que en el perihelio es de 147 100 000 km. Si la velocidad orbital de la Tierra es de 30 270 m/s en el perihelio, determina, por conservación de la energía mecánica, cuál será su velocidad orbital en el afelio.**

La energía mecánica en el perihelio es:

$$E_{ph} = E_{c\,ph} + E_{p\,ph} = \frac{1}{2}m_Tv_{ph}^2 + \left(-G\frac{m_Tm_S}{r_{ph}}\right)$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{ph} = -2{,}69 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

La energía mecánica se conserva, luego:

$$E_{c\,af} + E_{p\,af} = E_{ph}$$

Por tanto:

$$E_{c\,af} = E_{ph} - E_{p\,af} = E_{ph} - \left(-G\frac{m_Tm_S}{r_{af}}\right)$$

Sustituyendo los datos, se obtiene:

$$E_{c\,af} = 2{,}57 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

Como:

$$v_{af} = \sqrt{\frac{2E_{c\,af}}{m_T}}$$

El resultado será:

$$v_{af} = 29\,247{,}5 \text{ m/s}$$

39 **Los agujeros negros se denominan así porque su increíble densidad hace que su acción gravitatoria sea tan intensa que ni la luz tiene suficiente velocidad de escape para salir de él. A la distancia crítica en la que este hecho sucede (medida desde el centro del agujero) se la denomina «radio de Schwarzchild». ¿Cuál sería este radio para un agujero de diez masas solares?**

En el límite del radio de Schwarzchild, la velocidad de escape es *c*, por lo que:

$$c = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \Rightarrow r = \frac{2Gm}{c^2}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$r = 29\,644 \text{ m} = 29{,}64 \text{ km}$$

40 PAU **Determina la velocidad de escape de la superficie de un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, y cuya aceleración gravitatoria en la superficie es de 5,4 m/s^2.**

Datos: $R = 6\,370$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg

La velocidad de escape será:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = \sqrt{\frac{2Gm}{r^2} \cdot r} = \sqrt{2g'r}$$

donde $r = r_T/3$, por lo que:

$$v = \sqrt{2/3\, g'r_T} = 4\,800 \text{ m/s}$$

Para ello, se ha considerado que $r_T = 6\,400$ km.

D41 PAU **Una sonda espacial de 1 000 kg se halla en una órbita circular de radio 2*R* alrededor de la Tierra. ¿Cuánta energía se requiere para transferir la sonda hasta otra órbita circular de radio 3*R*? Analiza los cambios en la energía cinética, potencial y total.**

La energía potencial viene dada por la expresión general:

$$E_p = -\frac{Gm_Tm}{r}$$

Si las órbitas son circulares, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_Tm}{r^2}$$

Por tanto, la energía cinética valdrá:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm_Tm}{2r}$$

En ambas expresiones, *r* es el radio de la órbita. Para la primera órbita, obtenemos:

$$E_{p1} = -\frac{Gm_Tm}{2R}; E_{c1} = \frac{Gm_Tm}{4R} \Rightarrow E_{\text{total 1}} = -\frac{Gm_Tm}{4R}$$

Mientras que para la segunda órbita:

$$E_{p2} = -\frac{Gm_Tm}{3R}; E_{c2} = \frac{Gm_Tm}{6R} \Rightarrow E_{\text{total 2}} = -\frac{Gm_Tm}{6R}$$

La energía necesaria para transferir la sonda de una órbita a otra será la diferencia entre estas dos energías totales:

$$\Delta E = E_{\text{total 2}} = -\frac{Gm_Tm}{R} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{Gm_Tm}{12R}$$

Sustituyendo los valores, esta energía resulta ser de $5{,}24 \cdot 10^9$ J.

Tanto la energía potencial como la cinética en la segunda órbita tienen valores que resultan de multiplicar por 2/3 los de la primera órbita. Sin embargo, en el caso de la energía potencial, esta aparente reducción es en realidad un aumento, al tratarse de una energía negativa. Del mismo modo, la energía total de la segunda órbita es 2/3 de la energía total de la primera órbita. Sin embargo, al tratarse de una energía negativa, en realidad se ha producido un aumento de energía, como puede verse en el signo de ΔE, positivo.

42 PAU **Un satélite artificial de 1 200 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 2 300 km sobre la superficie terrestre. Determina su momento angular con respecto al centro terrestre.**

El momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Luego su módulo será $L = mrv$, donde r es el radio de la órbita: $r = R + h = 8{,}67 \cdot 10^6$ m. Sabemos que la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_T m}{r^2} = v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = 6\,794 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del módulo del momento angular, resulta:

$$L = mrv = 7{,}07 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Lo calculado es el módulo del momento angular. La dirección del vector $\vec{L}$ será perpendicular al plano de la órbita, mientras que el sentido viene determinado por la regla de la mano derecha.

D 43 PAU **Las grandes estrellas (de masas superiores a 1,4 veces la solar) acaban el ciclo de sus vidas colapsándose o aplastándose gravitacionalmente, formando diminutas estrellas de neutrones de unos 40 km de diámetro. Supón que eso pudiera sucederle al Sol, que tiene $1{,}39 \cdot 10^9$ m de diámetro y que gira una vez cada 27 días.**

***a)* ¿Cuál sería la nueva velocidad angular de «Sol neutrónico», expresada en vueltas o revoluciones por segundo?**

***b)* ¿Cuál sería la gravedad superficial en la estrella de neutrones formada?**

***c)* ¿Cuál sería la velocidad de escape de su superficie?**

Nota: considera que la masa del Sol sigue siendo la misma durante el proceso.

a) En el proceso de colapso de las estrellas de gran tamaño, el momento angular se mantiene constante al no existir fuerzas externas capaces de modificarlo. Sabemos que $L = I\omega$.

El momento de inercia para una esfera maciza que gira alrededor de un diámetro es:

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Puesto que el momento angular se conserva:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_1^2\omega_1 = R_2^2\omega_2$$

En esta expresión, conocemos R_1, R_2 y la velocidad angular ω_1, que podemos expresar como $2\pi/27$ rad/día.

Sustituyendo los datos, resulta que $\omega_2 = 2{,}81 \cdot 10^8$ rad/día, lo cual corresponde a un período $T = 2{,}236 \cdot 10^{-8}$ días $\approx$ $\approx 0{,}002$ s.

Es decir, el período de rotación resulta ser de unas dos milésimas de segundo.

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la estrella colapsada será:

$$g = G\frac{M_{Sol}}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{1{,}98 \cdot 10^{30}}{(2 \cdot 10^4)} = 3{,}3 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2$$

c) La velocidad de escape viene dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{Sol}}{R_{Sol\ neutrónico}}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una velocidad de escape de $1{,}15 \cdot 10^8$ m/s.

4 El campo eléctrico

ESQUEMA DE LA UNIDAD

1. Interacción electrostática: origen y descripción
páginas 107/109
   - 1.1. ¿Qué sabemos de la carga eléctrica? página 107
   - 1.2. Ley de Coulomb páginas 108/109

2. Campo eléctrico: una forma de explicar la interacción
páginas 110

3. El campo eléctrico desde un punto de vista dinámico
páginas 111/114
   - 3.1. Intensidad del campo eléctrico páginas 111/113
   - 3.2. Representación del campo mediante líneas de fuerza página 114

4. El campo eléctrico desde un enfoque energético
páginas 115/121
   - 4.1. Energía potencial asociada a la posición de una carga en un campo eléctrico páginas 115/117
   - 4.2. Potencial del campo eléctrico página 118
   - 4.3. Diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico páginas 119/120
   - 4.4. Relación entre las magnitudes propias del campo (intensidad y potencial) página 121

5. Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme
páginas 122/123
   - 5.1. Movimiento de partículas que inciden en la dirección del campo página 122
   - 5.2. Movimiento de partículas que inciden perpendicularmente al campo página 123

6. Cálculo del capo eléctrico mediante el teorema de Gauss
página 124/127
   - 6.1. ¿Qué es el flujo del campo eléctrico? páginas 124/125
   - 6.2. Teorema de Gauss páginas 125
   - 6.3. Cálculo de campos eléctricos a partir del teorema de Gauss página 126
   - 6.4. Protección frente a campos externos: una consecuencia del teorema de Gauss página 127