DEPARTAMENTO DE FÍSICA E QUÍMICA

Física 2º Bach.

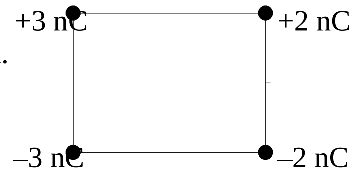
Campos electrostático y magnético 16/03/05

Nombre:

Problemas

[2 PUNTOS /UNO]

1. Calcula: a) la intensidad del campo eléctrico en el centro del lado derecho de un rectángulo de 80 cm×60 cm, con la distribución de cargas de la figura. b) El trabajo para mover la carga de +2,00 nC desde el punto donde se encuentra hasta el centro del rectángulo. $K = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9{,}00\times10^9$ N·m²/C² .



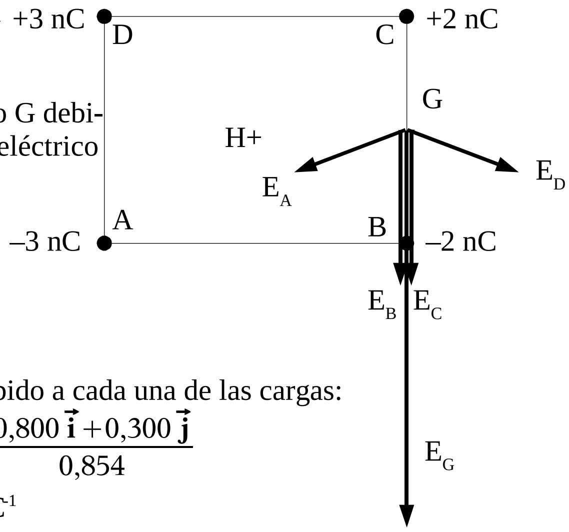
Solución:

a) La intensidad de campo eléctrico en un punto debido a una distribución de cargas puntuales se calcula por el principio de superposición.

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$$

La intensidad de campo eléctrico en un punto a una distancia r de una carga puntual Q viene dado por la expresión:

$$\mathbf{E} = K\, Q / r^2\, \mathbf{u}_r$$



Se dibuja el vector intensidad de campo eléctrico en el punto G debido a cada una de las cargas y el vector intensidad de campo eléctrico resultante.

Se calculan primero las distancias entre los puntos:

$r_{CG} = r_{BG} = 0{,}300$ m

$$r_{AG} = \sqrt{(0{,}800[\mathrm{m}])^2 + (0{,}300[\mathrm{m}])^2} = \sqrt{0{,}730[\mathrm{m}^2]} = 0{,}854\,\mathrm{m}$$

$r_{DG} = r_{AG} = 0{,}854$ m

Se calcula la intensidad de campo eléctrico en el punto G debido a cada una de las cargas:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{A\to G}} = K\frac{Q_A}{r_{AG}^2}\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}} = 9{,}00\times10^9[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{-3{,}00\times10^{-9}[\mathrm{C}]}{0{,}73[\mathrm{m}^2]}\frac{0{,}800\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}300\,\vec{\mathbf{j}}}{0{,}854}$$

$$\mathbf{E}_{A\to G} = (-34{,}6\,\mathbf{i} - 13{,}0\,\mathbf{j})\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$$

Por simetría

$$\mathbf{E}_{D\to G} = (34{,}6\,\mathbf{i} - 13{,}0\,\mathbf{j})\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$$

Para las otras dos cargas

$$\mathbf{E}_{B\to G} = 9{,}00\times10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}] \cdot (-2{,}00\times10^{-9}\ [\mathrm{C}]) / (0{,}300\ [\mathrm{m}])^2\ (-\mathbf{j}) = -200\ \mathbf{j}\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$$

$$\mathbf{E}_{C\to G} = \mathbf{E}_{B\to G} = -200\ \mathbf{j}\ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$$

El campo resultante en el punto G vale:

$$\mathbf{E}_G = \mathbf{E}_{A\to G} + \mathbf{E}_{B\to G} + \mathbf{E}_{C\to G} + \mathbf{E}_{D\to G} = -426\ \mathbf{j}\ \ \mathrm{N{\cdot}C^{-1}}$$

b) El trabajo de la fuerza eléctrica (conservativa) cuando se traslada una carga q entre dos puntos A y B es igual a la variación de energía potencial:

$$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$$

El potencial eléctrico V_A en un punto A a una distancia r de una carga Q es:

$$V_A = K\,Q / r$$

Se calcula el potencial eléctrico en los puntos inicial (C) y final (H) debidos a las cargas que quedan fijas.

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} + V_{D\to C} = K\frac{Q_A}{r_{AC}} + K\frac{Q_B}{r_{BC}} + K\frac{Q_D}{r_{DC}}$$

$$V_C = 9{,}00\times10^9[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\left(\frac{-3{,}00\,\mathrm{C}}{1{,}00[\mathrm{m}]} + \frac{-2{,}00\,\mathrm{C}}{0{,}600[\mathrm{m}]} + \frac{+3{,}00\,\mathrm{C}}{0{,}800[\mathrm{m}]}\right) = -23{,}2\,\mathrm{V}$$

$$V_H = 9{,}00\times10^9[\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\left(\frac{-3{,}00\,\mathrm{C}}{0{,}500[\mathrm{m}]} + \frac{-2{,}00\,\mathrm{C}}{0{,}500[\mathrm{m}]} + \frac{+3{,}00\,\mathrm{C}}{0{,}500[\mathrm{m}]}\right) = -36{,}0\,\mathrm{V}$$

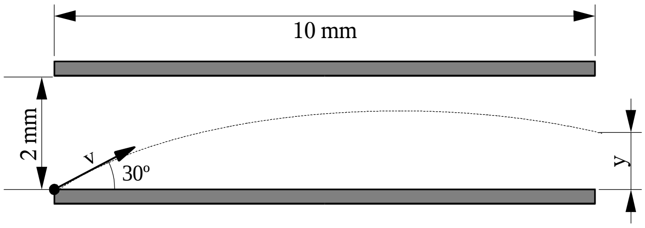
El trabajo de la fuerza del campo eléctrico es:

$$W_{C\to H} = q_C\,(V_C - V_H) = 2{,}00\times10^{-9}\ [\mathrm{C}]\ (-23{,}3 - (-36{,}0)\ )\ [\mathrm{V}] = 2{,}55\times10^{-8}\ \mathrm{J}$$

El trabajo de la fuerza exterior para que la carga se desplace sin variación de energía cinética:

$$W_{ext} = -W_{campo} = -2{,}55\times10^{-8}\ \mathrm{J}$$

2. Una partícula α penetra a una velocidad de $3{,}00\times10^{6}$ m/s entre las placas de una condensador formando un ángulo de 30º con la horizontal, tal como se representa en la figura. El condensador está formado por dos placas planas paralelas de 10,00 mm × 5,00 mm separadas entre sí 2,00 mm entre las que existe una diferencia de potencial de 30,0 kV. Calcula:



a) La carga de cada placa del condensador, (valor y signo).

b) ¿A qué distancia *y* de la placa inferior sale la partícula α del condensador? (Desprecia el peso)

Datos: m (α): $6{,}65\times10^{-27}$ kg; q (α) = $+3{,}20\times10^{-19}$ C

Solución:

a) El valor de la intensidad del campo eléctrico en el interior de un condensador plano de placas paralelas es constante:

$$\mathbf{E} = \sigma / \varepsilon$$

donde σ es la densidad superficial de carga en las placas y ε la permitividad eléctrica del medio que hay entre ellas. La dirección del campo es perpendicular a las placas y está dirigido de la positiva a la negativa.

Como el campo es constante, la diferencia de potencial entre las placas vale

$$V_A - V_B = |\mathbf{E}| \cdot d$$

donde d es la distancia entre las placas.

Por tanto, el valor del campo eléctrico en el interior del condensador es:

$$|\mathbf{E}| = (V_A - V_B) / d = 30{,}0\times10^{3}\ [\text{V}] / 0{,}00200\ [\text{m}] = 1{,}50\times10^{7}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$$

y la densidad superficial de carga

$$\sigma = |\mathbf{E}| \cdot \varepsilon = 1{,}50\times10^{7}\ [\text{N}\cdot\text{C}^{-1}] \cdot 1 / (4\pi \cdot 9{,}00\times10^{9}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2]) = 1{,}33\times10^{-4}\ \text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

Como la superficie de cada placa es:

$$S = 10{,}00\ \text{mm} \times 5{,}00\ \text{mm} = 50{,}0\ \text{mm}^2 = 5{,}00\times10^{-5}\ \text{m}^2$$

la carga de cada placa es:

$$Q = \sigma \cdot S = 1{,}33\times10^{-4}\ [\text{C}\cdot\text{m}^{-2}]\cdot 5{,}00\times10^{-5}\ [\text{m}^2] = 6{,}63\times10^{-9}\ \text{C}$$

A la vista de la trayectoria de la partícula alfa, que tiene carga positiva, la placa superior debe tener carga positiva y la inferior carga negativa.

$$Q_{sup} = +6{,}63\ \text{nC}; \quad Q_{inf} = -6{,}63\ \text{nC}$$

b) Como el campo es constante, la fuerza eléctrica que actúa sobre la partícula α también lo será, y, como la fuerza peso es despreciable, la aceleración de la partícula α en el interior del campo eléctrico es constnte:

$$a = \sum F / m = F_{eléctrica} / m = q\ E / m = 3{,}20\times10^{-19}\ [\text{C}] \cdot 1{,}50\times10^{7}\ [\text{N}\cdot\text{C}^{-1}] / 6{,}65\times10^{-27}\ [\text{kg}] = 7{,}22\times10^{14}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

y la ecuación de movimiento viene dada por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\ t + ½\ \mathbf{a}\ t^2$$

Eligiendo un sistema de referencia con origen en el punto de entrada de la partícula alfa, eje X horizontal y sentido positivo el de avance de la partícula, y eje Y vertical y sentido positivo hacia arriba:

$$\mathbf{r} = 3{,}00\times10^{6}\ [\text{m/s}^2]\ (\cos 30º\ \mathbf{i} + \text{sen}\ 30º\ \mathbf{j}) \cdot t - 3{,}61\ [\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]\ t^2\ \mathbf{j}$$

Sale del condensador en un punto de coordenadas (0,0100, y):

$$0{,}0100\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} = 2{,}60\times10^{6}\ t\ \mathbf{i} + 1{,}50\times10^{6}\ t\ \mathbf{j} - 3{,}61\ t^2\ \mathbf{j}$$

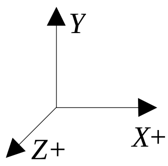
$$t = 0{,}0100\ [\text{m}] / 2{,}60\times10^{6}\ [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}] = 3{,}85\times10^{-9}\ \text{s}$$

$$y = 1{,}50\times10^{6} \cdot 3{,}85\times10^{-9}\ [\text{s}] - 3{,}61\ (\cdot\ 3{,}85\times10^{-9}\ [\text{s}])^2 = 4{,}3\times10^{-4}\ \text{m}$$

3. Un electrón penetra perpendicularmente desde la izquierda en un campo magnético uniforme vertical hacia el techo con una velocidad de $3{,}00\times10^{6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. El electrón sale a 9,00 cm de distancia horizontal del punto de entrada. Calcula:

a) El **vector** intensidad de campo eléctrico, producido por un condensador plano de placas paralelas que distan 8,00 cm, que le ha comunicado al electrón libre en reposo, casi pegado a la placa negativa, la velocidad que tiene.

b) Calcula el **vector** intensidad de campo eléctrico que habría que colocar en la región donde actúa el campo magnético para que otro electrón que entrase igual que el primero no se desviase.



Datos: $m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ kg; $q_e = -1{,}60\times10^{-19}$ C. Utiliza la siguiente orientación para los ejes X, Y, Z.

Solución:

a) El electrón ha sido acelerado por un campo eléctrico **E** creado por una diferencia de potencial, $V_A - V_B$. Al ser un condensador plano, el campo eléctrico es constante, y la diferencia de potencial entre las placas del condensador es:

$$V_A - V_B = |\mathbf{E}|\ d$$

donde d es la distancia entre las placas.
La energía cinética comunicada al electrón es igual al trabajo eléctrico:

$$W = q\ (V_A - V_B) = \Delta E_c = ½\ m\ v^2$$

$$V_A - V_B = 9{,}11\times10^{-31}\ [\text{kg}]\ (3{,}00\times10^6\ [\text{m}\cdot\text{s}^{-1}])^2 / (2 \cdot 1{,}60\times10^{-19}\ [\text{C}]) = 25{,}6\ \text{V}$$

$$|\mathbf{E}| = (V_A - V_B) / d = 25{,}6\ [\text{V}] / 0{,}0800\ [\text{m}] = 320\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Si el electrón se mueve horizontalmente desde la izquierda su velocidad es

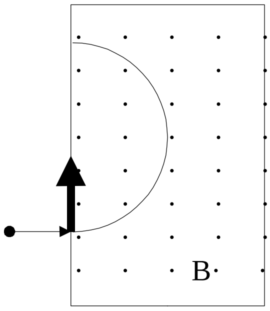
$$v = 3{,}00\times10^6\ \mathbf{i}\ \text{m/s}$$

La fuerza eléctrica que dio lugar a esa velocidad, también está dirigida de izquierda a derecha, y como

$$F = q\ \mathbf{E}$$

y la carga del electrón es negativa, el campo eléctrico debe estar dirigido hacia la izquierda.

$$\mathbf{E} = -320\ \mathbf{i}\ \text{N}\cdot\text{C}^{-1}$$



b) La fuerza ejercida por un campo magnético **B** sobre una partícula de carga q que se mueve con una velocidad **v** es, por la ley de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Con la orientación de los ejes propuesta, (X+ horizontal hacia la derecha; Y+ hacia el borde superior del papel; Z+ hacia el techo), la fuerza del campo magnético será:

$$\mathbf{F} = -1{,}60\times10^{-19}\ [\text{C}]\ (3{,}00\times10^6\ \mathbf{i}\ [\text{m/s}] \times \text{B}\ \mathbf{k}) = +4{,}80\times10^{-13}\ \text{B}\ \mathbf{j}\ [\text{N}]$$

hacia el borde superior del papel (inicialmente).
Como la fuerza es en todo momento perpendicular a la velocidad y no tiene componente tangencial, la velocidad será constante en módulo y describirá una semicircunferencia, cuyo radio depende de las otras magnitudes.
Por la 2ª Ley de Newton, $|\mathbf{F}| = m\ |\mathbf{a}|$, siendo **a** una aceleración normal

$$\mathbf{a} = v^2 / R\ \mathbf{u}_N.$$

Sustituyendo la fuerza por la expresión de Lorentz,

$$q\ v\ B\ \text{sen}\ \varphi = m\ v^2 / R$$

despejando el valor del campo magnético B

$$B = m\ v^2 / (q\ v\ \text{sen}\ \varphi\ R) = m\ v / (R\ q\ \text{sen}\ \varphi)$$

$$B = 9{,}11\times10^{-31}\ [\text{kg}] \cdot 3{,}00\times10^6\ [\text{m/s}] / (1{,}60\times10^{-19}\ [\text{C}] \cdot 0{,}045\ [\text{m}] \cdot 1) = 3{,}80\times10^4\ \text{T}$$

Para que otro electrón que viaje igual no se desvíe habrá que colocar un campo eléctrico que ejerza una fuerza opuesta a la del campo magnético, o sea hacia el borde inferior del papel.
La fuerza eléctrica ha de ser opuesta a la fuerza magnética y del mismo módulo,

$$q\ E = q\ v\ B$$

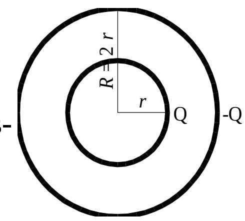
$$E = v\ B = 3{,}00\times10^6\ [\text{m/s}] \cdot 3{,}80\times10^{-4}\ [\text{T}] = 1{,}14\times10^3\ \text{N/C}$$

y estará dirigido del borde inferior al superior del papel (por ser la carga del electrón negativa)

$$\mathbf{E} = 1{,}14\times10^3\ \mathbf{j}\ \text{N/C}$$

Cuestiones

[1 PUNTO/UNA]



1. Explica con una gráfica cómo varía el potencial eléctrico con la distancia, desde el centro de las esferas hasta el infinito, para un conjunto de dos esferas concéntricas conductoras huecas, la esfera interior de radio r = 10 cm y carga +Q = 2,0 µC y la esfera exterior de radio R = 2 r = 20 cm y carga –Q = –2,0 µC.

Solución:

Por el teorema de Gauss, la intensidad de campo eléctrico en el interior de una esfera conductora hueca de radio R cargada con una carga Q es nulo. Por tanto el potencial eléctrico en el interior de la esfera es constante e igual al de un punto de su superficie:

$$V_{\text{int}} = K\, Q / R$$

Para puntos en el exterior en la esfera, el valor de la intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico es el mismo que si toda la carga de la esfera estuviese concentrada en su centro. El potencial en un punto a una distancia r del centro de la esfera, sería:

$$V_{\text{ext}} = K\, Q / r$$

El potencial en un punto sometido a la influencia de ambas esferas será la suma de los potenciales creados en ese punto por cada una de ellas.

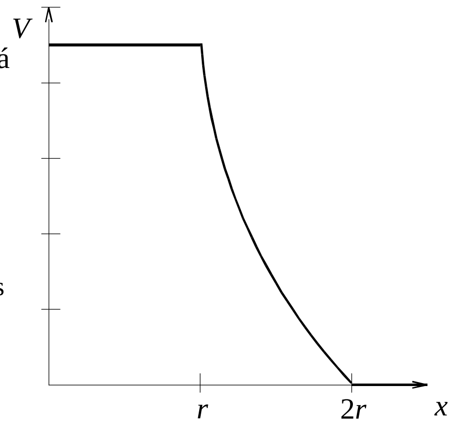
En la zona interior a la esfera pequeña, $x \le r$, el potencial es constante.

$V = K\,Q / r + K\,(–Q) / 2r = K\,Q / 2r = 9{,}0 \times 10^9$ [N·m²·C⁻²] · $2{,}0 \times 10^{-6}$ [C] / 0,20 [m] = $9{,}0 \times 10^4$ V = 90 kV

En la zona entre ambas esferas, $r < x \le 2\,r$, el potencial disminuye con la distancia, al estar en el exterior de la esfera pequeña.

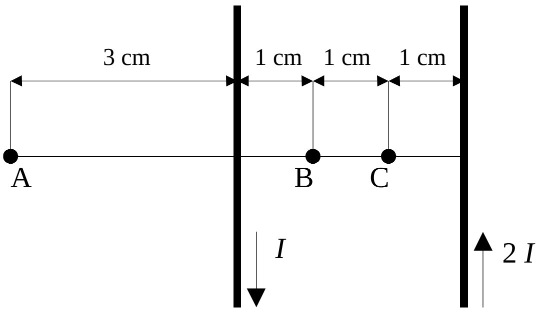
En la superficie de la esfera mayor y en la zona exterior, $x > 2r$, el potencial es nulo, porque la carga total es $Q + (–Q) = 0$.

La gráfica de la variación sería:



2. Dos conductores paralelos por los que circula corriente en sentido opuesto, en uno de ellos el doble que el otro. ¿En qué punto se anula el campo magnético?

Solución: A



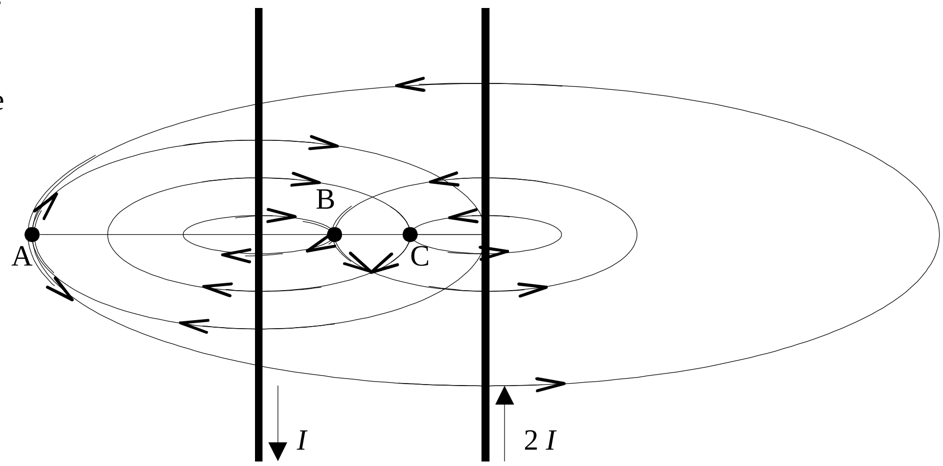
El valor de la intesidad de campo magnético B creado por una corriente I continua indefinida en el vació a una distancia R del conductor viene dada por la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R}$$

en la que μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

El campo magnético es circular alrededor del conductor y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha: si el pulgar de la mano derecha apunta en el sentido de la corriente, el sentido del campo magnético viene dado por el sentido en el que se cierra la mano.

Sólo en el punto A, los vectores campo magnético creados por ambas corrientes tienen sentidos opuestos, y como ese punto está a la mitad de distancia de la corriente I que de la corriente 2 I, ambos campos magnéticos tienen el mismo valor y, siendo opuestos, se anulan.

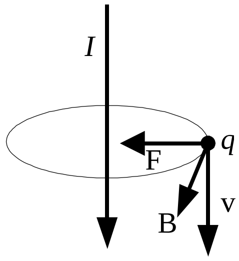


3. Se dispone de un hilo infinito recto y con una intensidad de corriente eléctrica I. Una carga eléctrica $+q$ próxima al hilo moviéndose paralelamente a él y en el mismo sentido que la corriente:

   A) Será atraída.

B) Será repelida.
C) No experimentará ninguna fuerza.

Solución: A



A partir da aplicación da lei de Lorentz que da a forza **F** exercida por un campo magnético sobre una carga q que se move con unha velocidade v:

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

e da lei de Biot-Savart que da o campo magnético creado por un fío indefinido polo que pasa unha intensidade de corrente I, nun punto que dista d do fío

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi d}$$

e da dirección do campo magnético dado pola regra da man dereita, poderemos coñecer as direccións das forzas debidas a acción mutua entre correntes.
A forza **F** do campo magnético **B** (debido a corrente I) sobre a carga $+q$ que se move paralelamente e no mesmo sentido que a corrente ven dada pola regra da man esquerda.

4. Al aplicar el teorema de Gauss a una esfera dieléctrica (aislante) de radio R y carga Q con una distribución uniforme de carga $\rho = Q / V$, el flujo a través de una superficie gaussiana esférica de radio $r < R$ y el campo eléctrico creado por la esfera en el punto interior a una distancia r del centro valen:
   a) $\Phi = Q\, r^3 / (\varepsilon\, R^3)$ y el campo eléctrico: $|\mathbf{E}| = K\,(Q / R^3)\, r$
   b) El flujo: $\Phi = Q / \varepsilon$ y el campo eléctrico: $|\mathbf{E}| = K\, Q / r^2$
   c) El flujo y el campo eléctrico son nulos.

Solución: A