1.- Calcular la velocidad de propagación y la longitud de onda, en el agua y en el vidrio, de un rayo de luz amarilla cuya longitud de onda en el vacío es 5890 Å. ¿Cuál es el índice de refracción relativo del vidrio respecto al agua? Los índices de refracción del vidrio y del agua son n_v = 1'52 y n_a = 1'33.

La frecuencia caracteriza al rayo de luz, mientras que su longitud de onda depende también del medio en el que se propaga. Por ejemplo, sea f la frecuencia, λ_o la longitud de onda en el vacío y c la velocidad de propagación en él; en el agua, sean respectivamente λ_a y v_a; y en el vidrio, λ_v y v_v. Se verifica: $f = \dfrac{c}{\lambda_o} = \dfrac{v_a}{\lambda_a} = \dfrac{v_v}{\lambda_v}$

Como además, según la definición de índice de refracción $c = n_a v_a = n_v v_v$ resulta:

$$\lambda_o = n_a \lambda_a = n_v \lambda_v$$

Agua: $v_a = \dfrac{c}{n_a} = \dfrac{3x10^8}{1.33} = \boldsymbol{2'25x10^8\ m/s}$ $\qquad \lambda_a = \dfrac{\lambda_o}{n_a} = \dfrac{5{,}89x10^{-7}}{1{,}33} = 4{,}428x10^{-7}\,m = \boldsymbol{442'8\ nm}$

Vidrio: $v_v = \dfrac{c}{n_v} = \dfrac{3x10^8}{1{,}52} = \boldsymbol{1'97x10^8\ m/s}$ $\qquad \lambda_v = \dfrac{\lambda_o}{n_v} = \dfrac{5{,}89x10^{-7}}{1{,}52} = 3{,}875x10^{-7}\,m = \boldsymbol{387'5\ nm}$

El índice relativo vidrio-agua es: $n_{va} = \dfrac{n_v}{n_a} = \dfrac{1{,}52}{1{,}33} = \boldsymbol{1'14}$

2.- Sobre una lámina de vidrio, planoparalela de 8 cm de grosor, y cuyo índice de refracción es 1.47, incide un rayo de luz bajo un ángulo de incidencia de 70º. ¿Qué desviación experimenta el rayo?

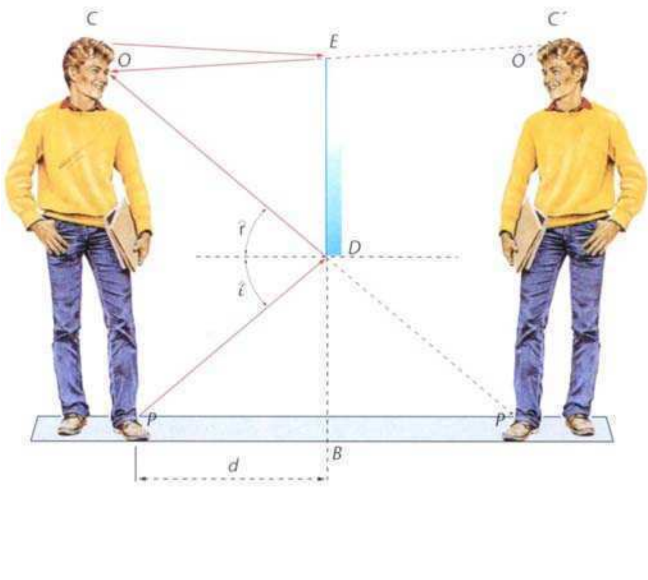
El rayo sale paralelo al incidente, pero experimenta una desviación dada por:

$$\Delta = d.\text{sen}\varepsilon_1\left(1-\sqrt{\frac{1-\text{sen}^2\varepsilon_1}{n^2-\text{sen}^2\varepsilon_1}}\right) = 8x0{,}9397x\left(1-\sqrt{\frac{1-0{,}8830}{2{,}1609-0{,}8830}}\right) = 8x0{,}9397x0{,}1548 = \boldsymbol{1'16\ cm}$$

3.- Una persona de 1,70 m de altura se coloca ante un espejo plano. Sabiendo que sus ojos distan del suelo 1,60 m, establece la altura del espejo para que se vea de pies a cabeza, y a qué altura del suelo ha de colocarse.

En la figura, la imagen de la persona se ha construido teniendo en cuenta que es simétrica al objeto respecto del espejo.

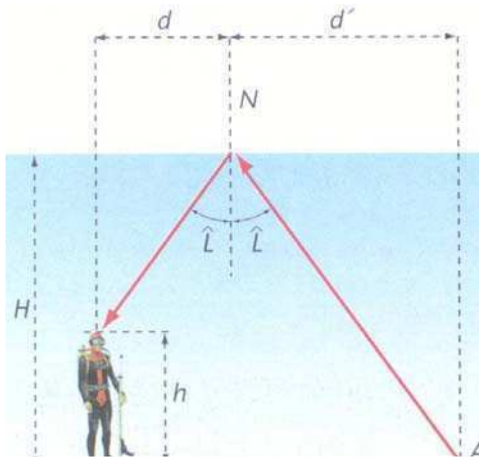
El punto imagen P' es percibido por los ojos por el rayo DO, que es el reflejado del PD. Como el ángulo de incidencia es igual que el de reflexión, la altura a la que debe ponerse el espejo (distancia DB) es ½ OP; es decir, a 0,80 m de altura



Siguiendo el mismo procedimiento, para observar el otro extremo de la persona (punto C') se trazan los rayos CE y EO, de donde se deduce que la persona ve íntegramente su imagen si la longitud del espejo es: ½ CO + ½ OP; es decir, la mitad de su altura, ***0'85 m***.

Nota: Las magnitudes solicitadas en el ejercicio no dependen de la distancia d entre la persona y el espejo. Si el espejo es de mayor longitud, por ejemplo, si se extiende por debajo del punto D, la persona aprecia parte del suelo que hay entre ella y el espejo.

4.- Un buceador de 1,8 m de altura se encuentra de pie en el fondo de un lago, a una prfundidad de 5,0 m. Calcula la distancia mínima a la que se encuentran los puntos del fondo del lago que el buzo puede ver reflejados en la superficie del agua (n_{agua} = 4/3).



El buzo ve los puntos del fondo por la reflexión total que se produce en la superficie de separación agua-aire. La reflexión total se presenta si los rayos que proceden de los puntos del fondo del lago inciden en la superficie con un ángulo superior o igual al ángulo límite; si el ángulo de incidencia es inferior, la luz se refracta (y pasa a propagarse al aire).

Si A es el punto solicitado, el ángulo de incidencia del rayo dibujado es el ángulo límite. De acuerdo con la figura, y teniendo en cuenta la segunda ley de la reflexión:

$D = d' + d = H \, tg\hat{L} + (H - h) \, tg\hat{L} = (2H - h) \, tg\hat{L}$

El ángulo límite es el ángulo de incidencia al que le corresponde un ángulo de refracción de 90º:

$n \, sen\hat{L} = sen \, 90º$ $\quad sen\hat{L} = 1/n = \frac{3}{4}$ $\quad tg\hat{L} = 1,1339$ $\quad D = (2H - h) \, tg\hat{L} =$ ***9'30 m***

Para puntos más próximos, los rayos incidentes cuyos rayos reflejados podrían alcanzar la vista del buzo, incidirían en la superficie de separación agua-aire con un ángulo inferior al límite y, por tanto, la luz no se reflejaría (pasaría al aire).

En realidad, la luz, además de refractarse, en parte puede reflejarse pero en una proporción muy pequeña comparada con la reflexión total.

5.- El ángulo de un prisma, de índice de refracción 1'15, es 60º. Hallar la desviación experimentada por un rayo que incide perpendicularmente a una de sus caras. Para este prisma, ¿cuánto vale la desviación mínima?

El rayo no se desvía en su primera refracción. En la segunda, incide bajo un ángulo ε_2 = 60º, verificándose:

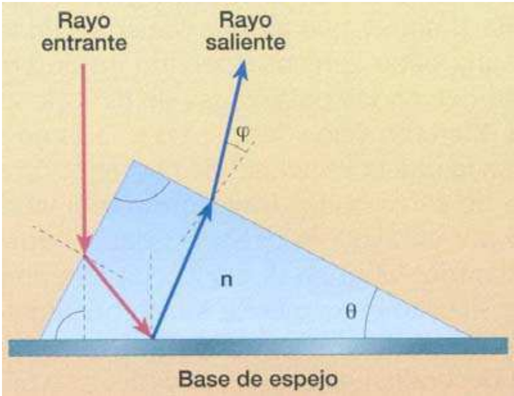
$n \, sen\varepsilon_2 = sen\varepsilon_2'$ $\quad sen\varepsilon_2' = 1,15 x sen60º = 0,9959$ $\quad \varepsilon_2' = 84,8284º$

El ángulo de desviación (ángulo determinado por el rayo incidente con el emergente) es:

$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \alpha = 0 + 84,8284 – 60 = 84,8284º =$ ***24º 49' 42''***

El ángulo de desviación mínima δ_{min} se obtiene despejándolo de $n = \dfrac{sen(\frac{\delta_{min} + \alpha}{2})}{sen(\frac{\alpha}{2})}$. Se tiene entonces: $\delta_{min} = 2 \text{ arc sen}[n \text{ sen}(\alpha/2)] - \alpha = 2\text{xarc sen}(1{,}15\text{xsen}30º) – 60º = 10{,}1993º =$ ***10º 11' 57''***

6.- El prisma de la figura tiene un índice de refracción de 1,5; su sección recta es un triángulo rectángulo 30º-90º-60º, y está situado como indica la figura. Un rayo entrante vertical, tras una primera refracción, incide sobre la cara inferior que está plateada. Hallar el ángulo φ que forma el rayo saliente con la normal a la cara de salida.



Refracción 1ª: $\varepsilon_1 = 60º$

$\text{sen}\varepsilon_1 = n\ \text{sen}\varepsilon_1' \rightarrow \text{sen}\varepsilon_1' = \dfrac{\text{sen}\varepsilon_1}{n} = \dfrac{\text{sen}60º}{1{,}5} = 0{,}57735$

$\rightarrow \varepsilon_1' = 35{,}26439º$

Reflexión en la base: Geométricamente, $\varepsilon_1' + \varepsilon_2 = 60º$

$\rightarrow \varepsilon_2 = 60º - \varepsilon_1' = 60º - 35{,}26439º = 24{,}73561º$

Refracción 2ª: Geométricamente, $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 30º$

$\rightarrow \varepsilon_3 = 30º - \varepsilon_2 = 30º - 24{,}73561º = 5{,}26439º$

$n\ \text{sen}\varepsilon_3 = \text{sen}\varepsilon_3' \rightarrow \text{sen}\varepsilon_3' = 1{,}5\text{xsen}(5{,}26439º) = 0{,}13763 \rightarrow \varphi = \varepsilon_3' = 7{,}91059º =$ ***7º 54' 38''***

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- El índice de refracción del agua para la luz amarilla del sodio es 1'33. ¿Cuál es la velocidad de propagación y la longitud de onda de dicha luz en el agua? En el vacío, la longitud de onda de la luz amarilla del sodio es de 589 nm. ¿Cuál es la frecuencia?
R.: 442'9 nm ***5'09x10^{14} Hz***

2.- Un rayo de luz de 500 nm de longitud de onda en el aire penetra en el agua (n = 1.333) ¿Cuál es su frecuencia en el agua? ¿Y su longitud de onda? ***R.: 6x10^{14} Hz*** ***375 nm***

3.- Una fuente luminosa puntual emite luz cuya longitud de onda en el vacío es de 600 nm. A 6 cm de ella se encuentra situada una pantalla y entre ambos se dispone una lámina de vidrio de 6 mm de espesor e índice de refracción 1.5. ¿Cuántas ondas habrá entre la fuente luminosa y la pantalla? ***R.: 105000 ondas***

4.- ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio respecto al agua, si el índice de refracción del agua respecto al aire es 4/3 y el del vidrio respecto al aire, 3/2? ***R.: n = 9/8***

5.- Un rayo de luz incide con un ángulo de 30º sobre la superficie de separación de dos medios cuyos índices de refracción son 1.60 y 1.33, respectivamente. La luz pasa del medio más refringente al menos refringente. Hallar el ángulo de refracción ***R.:* 37º**

6.- Un haz luminoso incide sobre una lámina de vidrio, de índice de refracción 1.50. ¿Cuál ha de ser el ángulo de incidencia φ para que el de refracción sea $\varphi/2$? ***R.:*** **φ = 82° 50'**

7.- Un rayo de luz se propaga en el aire e incide en una cubeta llena de agua, formando un ángulo de 45º con la superficie del agua. Calcular:
a) la dirección que tendrá el rayo luminoso al propagarse dentro del agua, sabiendo que el índice del agua es 1.33 y que se toma como índice del aire la unidad.
b) la velocidad de la luz en el agua. ***R.: 32º*** ***2.26x10^{8} m/s.***

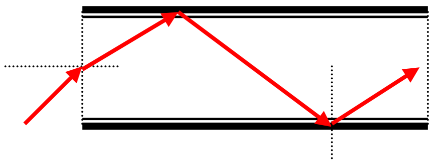
8.- Un cubo de vidrio de índice de refracción 1.5 se encuentra situado en el aire. Un haz de rayos paralelos penetra oblicuamente a través de la cara superior del cubo y después incide sobre una de sus caras laterales. ¿Pueden los rayos salir a través de esta cara? ***R.:* No**

9.- Un foco luminoso puntual se encuentra sumergido 40 cm por debajo de la superficie del agua. Hallar el diámetro del círculo mayor en la superficie del agua, a través del cual la luz puede salir al exterior. ***R.: D = 91 cm***

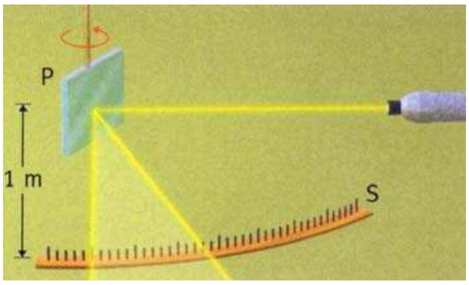
10.- En el fondo de un recipiente de con agua de 1 m de profundidad hay un foco que emite luz en todas direcciones. Si en la vertical del foco y en la superficie del agua se coloca un disco opaco, calcula el radio que debe tener el disco para que impida la visión de la luz que sale del foco por un observador situado en la superficie. Índice de refracción del agua, 1'33.
R.: 1.14 m.

11.- Se ha propuesto la siguiente regla para construir el rayo refractado: Usando unidades arbitrarias, se trazan con centro en el punto de incidencia dos circunferencias de radios n y n', respectivamente. El rayo incidente se prolonga hasta interceptar la circunferencia de radio n. Por este punto se traza la perpendicular a la superficie de separación de los medios y se halla su intersección con la circunferencia de radio n'. El rayo refractado pasa por este punto. Justificar esta regla. Aplicarla al caso aire-vidrio de índice 1'5 y ángulo de incidencia de 60º ***R.:*** **ε' = 35.26º**

12.- Establecer hasta qué máximo valor puede alcanzar el ángulo de incidencia de un rayo para que sea reflejado totalmente en el interior de la fibra óptica (n = 1.30). ***R.: 56.2º***



13.- Un rayo de luz incide sobre un espejo plano P, sujeto a un hilo vertical (fig.). El espejo refleja este rayo sobre una escala S, distante 1 m del espejo y paralela a éste. Por una acción exterior, el espejo gira 8º. ¿Qué distancia se desplaza la señal luminosa sobre la escala? ***R.: 28 cm***



14.- El diamante tiene un ángulo límite de 24º. Calcula el índice de refracción y la velocidad de propagación de la luz en él. ***R.: n = 2'46 v = 1'22x10⁸ m/s***

15.- Un vaso contiene aceite y agua. Como ambos líquidos no se mezclan, se forman dos capas perfectamente diferenciadas, la de arriba de aceite y la inferior de agua. El aceite tiene índice de refracción mayor que el agua.

a) Razona en qué líquido es mayor la velocidad de propagación de la luz, y dibuja la marcha de un rayo de luz que incide oblicuamente desde el aire sobre la capa de aceite y llega hasta el fondo.
b) ¿Qué relación hay entre las direcciones del rayo incidente y el que llega al fondo?
c) Caso práctico: n_{aire} = 1'00, n_{aceite} = 1'55, n_{agua} = 1'33; ángulo de incidencia, 30º

R.:22º

16.- Se tiene un prisma óptico (n = 1'62) cuyo ángulo del prisma es de 30º. Si un rayo de luz incide perpendicularmente en una de sus caras, calcular el ángulo con el que emerge la luz. ***R.: 54º***

17.- Un rayo de luz monocromática incide sobre una de las caras de un prisma de vidrio de índice de refracción 1'6 con un ángulo de incidencia de 40º. Si el ángulo del prisma es de 45º, calcular el ángulo de emergencia y el de desviación del rayo. ***R.:* 35'56º 30.56º**

18.- Determinar el índice de refracción de un prisma de ángulo 40º sabiendo que un rayo que incide con un ángulo de 40º sigue una trayectoria paralela a la base del prisma. ***R.:* 1'88**

19.- La sección de un prisma óptico tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles. ¿Cuál es el valor mínimo de su índice de refracción para que un rayo de luz se refleje totalmente en ángulo recto? ***R.:*** $n_{min} = \sqrt{2}$

20.- Un rayo luminoso incide sobre un prisma óptico con un ángulo de incidencia de 90° y tras refractarse en la segunda cara emerge del prisma con un ángulo de refracción de 9.25°. Hallar el índice de refracción del prisma, sabiendo que su ángulo es 50°. ***R.: n = 1'45 y n = 1'18***

21.- Un prisma óptico tiene un ángulo de 28º y se observa que al hacer incidir sobre él un rayo de luz con un ángulo de incidencia de 30º, el ángulo de desviación es de 18º. Calcular el índice de refracción del prisma. ***R.: n = 1'6***

22.- ¿Cuál es el ángulo de desviación mínima para un prisma de vidrio (n = 1'5) cuyo ángulo es de 60°? ***R.:*** δ_m **= 37'18°**

B.- REPRESENTACIÓN ÓPTICA

5.- DEFINICIONES

SISTEMA ÓPTICO:

Un conjunto de superficies que separa medios de distintos índices constituye un ***sistema óptico***, fig. 1. Los sistemas más usados en óptica son los ***sistemas centrados***, formados por superficies esféricas cuyos centros están alineados. La recta que contiene estos centros recibe el nombre de ***eje del sistema***.

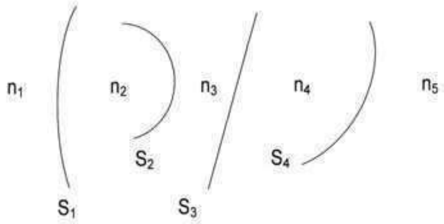


Fig. 1

Si el sistema está formado únicamente por superficies refractantes, se llama *dióptrico;* si sólo contiene espejos, *catóptrico,* y si participa de ambas, *catadióptrico*.

Mientras no se diga lo contrario, nos referiremos a sistemas centrados. Un sistema de esta especie, en general, lo representaremos como en la fig. 2.

Fig. 2

OBJETO E IMAGEN:

Si tenemos un punto emisor O, fig. 3, ante un sistema, puede ocurrir que después de reflejarse o refractarse en sus distintas superficies los rayos que partiendo de O penetran en él vuelvan a juntarse a la salida en otro punto O'. Si esto sucede, al punto O' se le llama ***punto imagen*** de O respecto del sistema, y a O ***punto objeto***.

Si, como en este caso, los rayos salen realmente de O y se cortan realmente en O', se dice que O es punto ***objeto real***, y O' punto **imagen real**.

Puede ocurrir, fig. 4, que los rayos a la salida sean divergentes, pero que sus prolongaciones en sentido contrario al de la propagación de la luz se corten en un punto O'; se llama en este caso a O' ***imagen virtual*** de O.

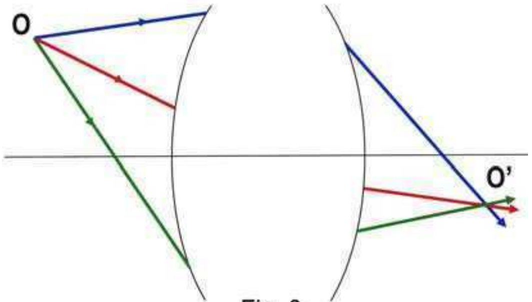


Fig. 3

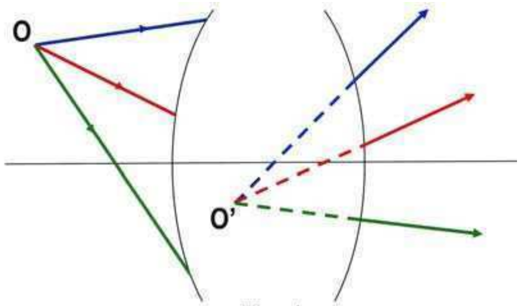


Fig. 4

Cuando se acoplan dos sistemas, la imagen que produce el primero sirve de objeto para el segundo.

Si, como sucede en la fig. 5, el objeto O_2 para el segundo sistema no llega a formarse realmente porque los rayos antes de concurrir en el punto $O_1' \equiv O_2$ son desviados por el sistema II, se dice que el segundo sistema trabaja con ***objeto virtual***. El objeto virtual sólo puede existir en caso de acoplamiento de sistemas, como sucede en la fig. 5.

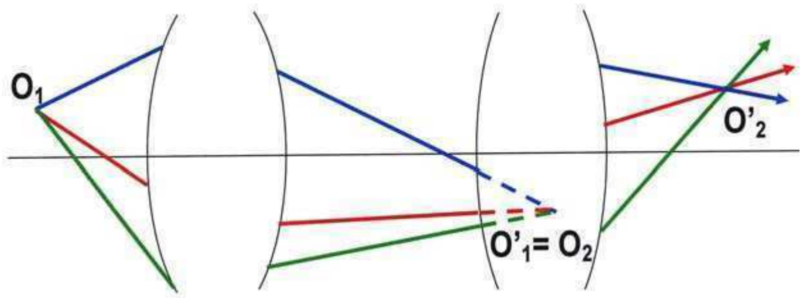


Fig. 5

Si en la fig. 4 hubiera otro sistema a la derecha, la imagen virtual O', dada por el primero, serviría de ***objeto real*** para el segundo, ya que los rayos entrarían en él como si realmente procedieran de O'.

ESPACIO OBJETO Y ESPACIO IMAGEN:

Se considera como ***espacio objeto*** de un sistema todo el espacio geométrico donde puede haber objetos, tanto reales como virtuales, y ***espacio imagen*** el espacio geométrico donde pueden existir imágenes, reales o virtuales; por tanto, todo el espacio es a la vez espacio objeto e imagen.

Aunque suele entenderse por espacio objeto toda la parte izquierda de un sistema, suponiendo que la luz va de izquierda a derecha, los objetos virtuales lo prolongan por la derecha, pero debe entenderse que aunque un objeto virtual quede a la derecha o aparentemente dentro del sistema, *siempre se considera sumergido en el medio de la izquierda*.

Los objetos, al igual que las imágenes, pueden ser *puntuales o extensos*. La imagen de un objeto extenso está formada por las imágenes puntuales de todos los puntos del objeto. En cualquier caso, el objeto y la imagen se dice que son ***conjugados*** respecto del sistema, o que el sistema ***representa*** al objeto en su imagen. Las relaciones geométricas existentes entre los objetos y sus imágenes, habida cuenta de la estructura de los sistemas ópticos, constituyen una parte de la Óptica Geométrica denominada *teoría de la representación óptica*.

SISTEMA ÓPTICO PERFECTO:

Lo ideal sería que un sistema óptico representara todo el espacio objeto en el correspondiente espacio imagen estableciendo una correspondencia homográfica completa punto a punto, recta a recta y plano a plano que fuera una semejanza para dos figuras conjugadas cualesquiera. Sin embargo, esto en general es imposible y sólo con grandes restricciones se puede pedir a un sistema una representación tan correcta.

En vista de esta imposibilidad se ha hecho necesario reducir las exigencias, y un sistema óptico centrado se considera perfecto con tal que cumpla las siguientes condiciones, establecidas por Maxwell:

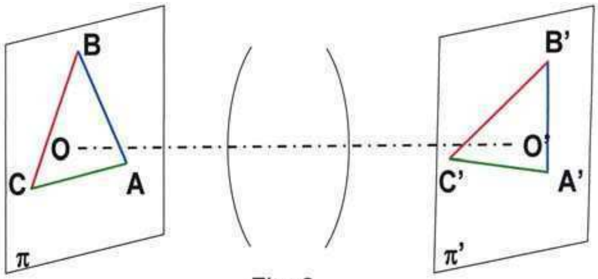


Fig. 6

Un sistema óptico es ***perfecto*** *para dos planos π y π' , normales al eje, cuando tiene el siguiente comportamiento (Fig. 6):*

- Todos los rayos que entran en el sistema procedentes de un punto cualquiera A del plano π concurren a la salida en un punto A' de otro plano π' (condición de estigmatismo).

- A los puntos de una recta cualquiera AB del plano π corresponden como imágenes los de otra recta A'B' contenida en π'.

- A toda figura ABC contenida en π corresponde otra A'B'C' contenida en π', *semejante* a la figura objeto, con *razón de semejanza constante* para cualquier par de figuras.

En general, en el estudio de los sistemas centrados que se comporten como perfectos en el sentido anteriormente indicado, operaremos en un plano meridiano, representando el objeto y la imagen por flechas normales al eje. Cuando la imagen tiene el mismo sentido que el objeto, se llama ***imagen directa****;* si el sentido de la imagen es contrario al del objeto, se dice que es una ***imagen invertida****.*

6.- DIÓPTRIO ESFÉRICO

Por lo común, los sistemas ópticos no son perfectos, salvo algunos casos especiales.

El caso de la esfera es especialmente interesante, debido a su simetría, su sencillez de tallado y fácil manejo matemático. Entra a formar parte de la mayoría de los sistemas ópticos: lentes, espejos, instrumentos ópticos...

Una superficie esférica que separa dos medios, no es en general un sistema óptico perfecto sino bajo ciertas condiciones, que veremos más adelante.

Supuestas dichas condiciones, consideremos la superficie esférica (Fig. 7) de centro C, que separa dos medios de índices *n* y *n'*, ante la cual colocamos un objeto lineal OP de tamaño *y*. Para hallar la imagen de *y* hallaremos primero la de O, por medio de dos rayos cualesquiera.

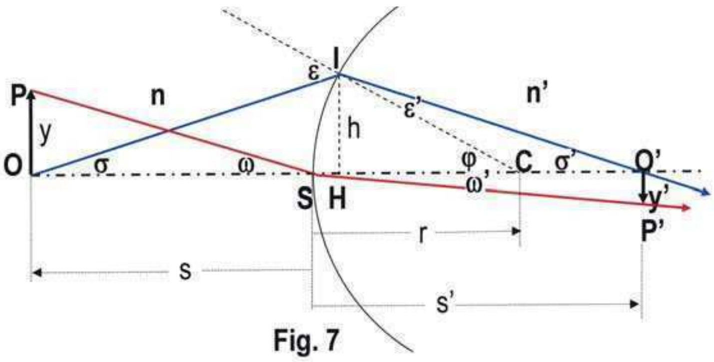


Fig. 7

Tomemos el OS (que no se desviará por ser normal a la superficie) y el OI. El punto O', donde se corten después de la refracción, será la imagen de O. La imagen *y'* estará en la perpendicular al eje óptico OC, por O', (al considerar el dioptrio como sistema perfecto). Para hallar el extremo P' de la imagen bastará trazar un rayo cualquiera desde P, por ejemplo, el PS. La intersección de su refractado con dicha perpendicular será P'. Y el tamaño de la imagen será *y'* = O'P'.

NORMAS DIN 1.335 para la utilización de las magnitudes en Óptica Geométrica.

La mayoría de los autores sigue estas normas en la resolución de los problemas ópticos, como convenio. Se recomienda encarecidamente su uso, con disciplina; de lo contrario, será muy difícil que al resolver problemas prácticos se llegue a resultados correctos.

> *"Al iniciarse el alumno en problemas de Óptica Geométrica, es muy importante que sea fiel a las normas de signos. No se permita nunca operar con los valores absolutos de las magnitudes. La experiencia enseña que si se permite esta indisciplina, jamás hará un problema correctamente, y que después de resolverlo "a su modo", tampoco sabrá dónde anda una imagen, si es real o virtual, directa o invertida." (Dr. J. Casas)*

Tomando como base la figura 7, veamos algunas magnitudes, su nombre y, en el caso de distancias, el segmento orientado que las define:

S	: vértice del dioptrio	C	: centro del dioptrio
O	: punto objeto en el eje	O'	: punto imagen en el eje
r = SC	: radio del dioptrio	h = HI	: altura de incidencia de un rayo
s = SO	: distancia frontal objeto	s' = SO'	: distancia frontal imagen
y = OP	: tamaño del objeto	y' = O'P'	: tamaño de la imagen

ε y ε' : ángulos de incidencia y de refracción del rayo que incide en I, procedente de un punto del eje (de O).

ω y ω' : ángulos de incidencia y de refracción del rayo que incide en S, procedente de un punto fuera del eje (de P).

σ y σ' : ángulos de abertura con el eje, objeto e imagen, del rayo que incide en I.

φ : ángulo central.

Como se ve, los puntos se nombran con letras mayúsculas, las distancias con minúsculas, y los ángulos con letras griegas.

1) Los elementos que hacen referencia al objeto se escriben con la misma letra que los correspondientes a la imagen, pero éstos últimos con apóstrofe.
2) Se supone siempre que la luz va de izquierda a derecha, mientras no se advierta lo contrario.
3) El origen de coordenadas se toma en S, vértice del dioptrio. Por ello, las distancias frontales s y s', desde el vértice S al objeto y a la imagen serán positivas si están a la derecha de S, y negativas si a la izquierda. Y los segmentos normales al eje serán positivos hacia arriba del eje y negativos hacia abajo de él.
4) Los ángulos de incidencia y refracción de un rayo, serán positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino angular más corto, se va en sentido horario.
5) Los ángulos con el eje son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir, por giro, con el eje se va en sentido antihorario.

En la fig. 8 se puede ver los signos de los diferentes elementos cuando corresponden a la construcción de la figura anterior, Fig. 7:

- son positivos: r, h, s', y, ε, ε', φ, σ'
- son negativos: s, y', σ, así como los ángulos ω y ω', bajo los cuales se ven el objeto y la imagen desde el vértice S, considerándose como ángulos de incidencia y refracción.

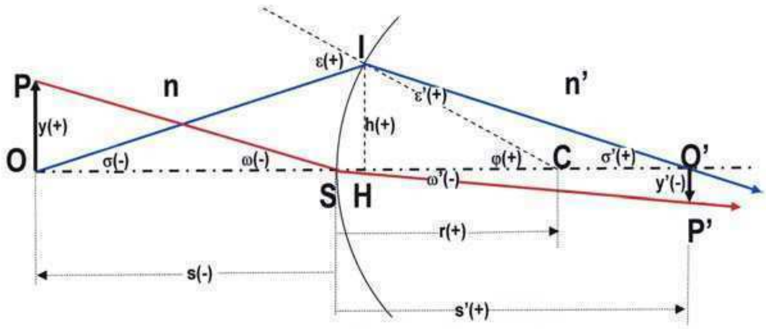


Fig. 8

Según los anteriores convenios, <u>en la reflexión</u>, ε y ε' serán siempre de signo contrario: $\varepsilon' = -\varepsilon$. Por tanto, con estas normas que utilizaremos en toda la Óptica Geométrica de ahora en adelante, la ley de Snell se escribirá:

$$n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon' = n' \operatorname{sen}(-\varepsilon) = -n' \operatorname{sen}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad n' = -n$$

por lo que *la reflexión equivale a una refracción en la que el rayo pasa de un índice n a otro – n.*

7.- ÓPTICA PARAXIAL

A.- ZONA PARAXIAL O DE GAUSS

Consideremos, Fig. 9, la primera superficie esférica de un sistema centrado, ante la que colocamos un objeto de tamaño *y* normal al eje y tan pequeño como queramos. Pongamos también ante el sistema, para más claridad, un diafragma D con un orificio de radio *p* muy pequeño; con ello conseguimos que las alturas de incidencia h de todos los rayos procedentes de puntos de *y* que penetran en el sistema sean también muy pequeñas.

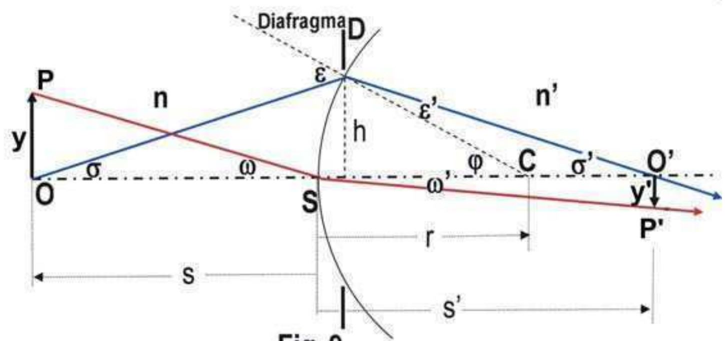


Fig. 9

En estas condiciones, si *y* es pequeño respecto a SO, todos los ángulos, σ y σ', ε y ε', ω y ω', y φ son también muy pequeños. En estas condiciones, sus senos y tangentes pueden sustituirse por dichos ángulos, en radianes. Por ejemplo: $\operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{tg}\varepsilon = \varepsilon$.

Cuando se dan estas condiciones (el tamaño de los objetos pequeño, el diámetro del diafragma pequeño, comparados con las distancias frontales) se dice que el sistema trabaja en ***zona paraxial*** o ***zona de Gauss***. Puede demostrarse que en esta zona todos los sistemas centrados son perfectos para cualquier par de planos, conclusión a la que se llega en la próxima sección, tras la obtención de los invariantes de Abbe y de Helmholtz.

El estudio de los sistemas ópticos en zona paraxial es muy importante y útil, ya que representa una primera aproximación de su comportamiento. Se hace uso de él en cualquier anteproyecto de diseño de instrumentos ópticos.

B.- ESTUDIO PARAXIAL DEL DIÓPTRIO ESFÉRICO

a) Invariante de Abbe

Sea O un punto objeto, cuya posición está dada por su distancia frontal *s* al vértice S de un dioptrio esférico. Tratemos de resolver el problema de hallar la posición de su imagen O', determinando su distancia frontal *s'*.

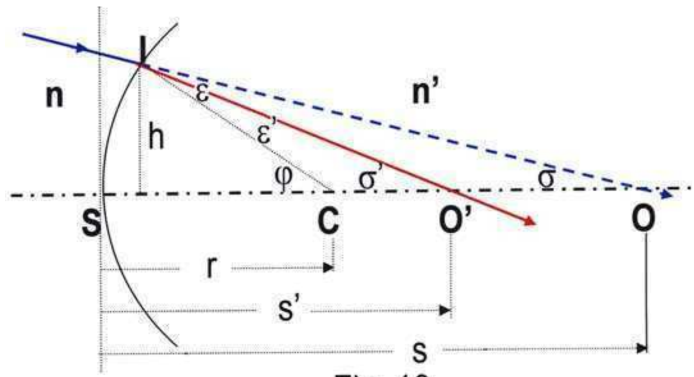


Fig. 10

En la Fig. 10 se toma, por sencillez, O como objeto virtual, pues así todas las magnitudes, lineales y angulares, son positivas, lo cual no resta generalidad a las conclusiones que se obtienen...

Teniendo en cuenta que operamos en zona paraxial, la ley de la refracción se reduce a:

$$n\,\varepsilon = n'\,\varepsilon'$$

De la figura, se deduce fácilmente que:

$\varepsilon = \varphi - \sigma$ $\qquad \varepsilon' = \varphi - \sigma'$ $\qquad \varphi = \frac{h}{r}$ $\qquad \sigma = \frac{h}{s}$ $\qquad \sigma' = \frac{h}{s'}$

Sustituyendo estos valores en la ley de la refracción, y simplificándola, resulta:

$$\boxed{n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right)}$$

La expresión *n(1/r – 1/s)* que no varía al escribirla para el espacio objeto o con los datos correspondientes del espacio imagen, recibe el nombre de ***invariante de Abbe***.

De esta fórmula se deduce muy fácilmente la siguiente ***fórmula de Gauss***:

$$\boxed{-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}}$$

mediante la cual se puede obtener más cómodamente el valor de *s'* (posición de la imagen).

Estas fórmulas nos demuestran que la esfera en la zona paraxial se comporta estigmáticamente para cualquier par de puntos conjugados, O y O', pues fijado O (o lo que es igual, *s*) dichas expresiones proporcionan un único valor de *s'*, y por tanto la posición bien definida de O'. Y esto independientemente de *h*, es decir, del rayo procedente de O utilizado en el estudio: cualquier rayo paraxial que sale de O y atraviesa el dioptrio pasa por O'.

b) Focos, planos focales y distancias focales

a) *Foco imagen F':*

- Hay rayos que llegan al dioptrio, procedentes del infinito, paralelos al eje (punto objeto O_∞). El dioptrio los concentra, real o virtualmente, en un punto llamado ***foco imagen*** F'. Por tanto, son puntos conjugados O_∞ y F'.

- La distancia f' = SF' se denomina ***distancia focal imagen***, o simplemente ***focal imagen*** del dioptrio. Su valor se obtiene haciendo en la fórmula de Gauss: s = $\propto$ y s' = f'. Resulta: $\boxed{f'=\frac{n'}{n'-n}r}$

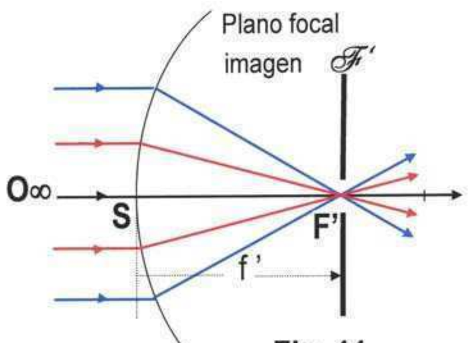


Fig. 11

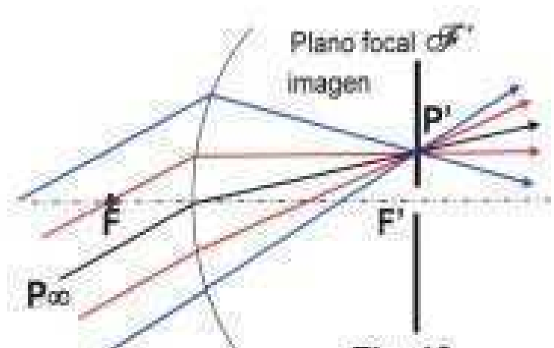


Fig. 12

- Se denomina ***plano focal imagen*** al plano normal al eje por F'. Es el conjugado del plano del infinito, en el espacio objeto, y tiene la propiedad de que cualquier haz de rayos paralelos entre sí (por tanto, como si procediesen de un punto objeto del infinito) se concentra en un punto de dicho plano focal: así pues, son conjugados el plano objeto del infinito y el plano focal imagen.

b) *Foco objeto F*: (Fig. 15 y 16)

- Existe asimismo un punto F sobre el eje tal que todos los rayos que, procedentes de él, atraviesan el dioptrio, salen paralelos al eje. La imagen de F es pues el punto del eje en el infinito, O'_∞ .

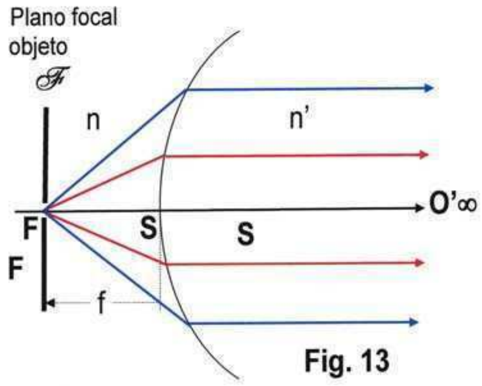


Fig. 13

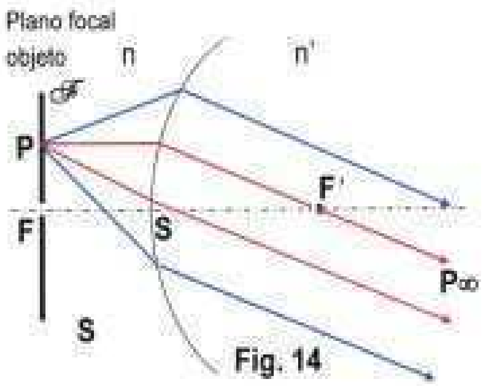


Fig. 14

- La distancia f = SF se denomina ***distancia focal objeto***, o simplemente ***focal objeto*** del dioptrio. Su valor se obtiene haciendo en la fórmula de Gauss: s = f y s' = ∞. Resulta

$$\boxed{f = -\frac{n}{n'-n} r}$$

- Se denomina ***plano focal objeto*** al plano normal al eje por el foco objeto F. Es el conjugado del plano del infinito, en el espacio imagen. Tiene la propiedad de que los rayos procedentes de un punto cualquiera P del plano focal objeto, tras el dioptrio, salen paralelos entre sí, formando su imagen en P'_∞, del plano imagen del infinito: así pues, son planos conjugados el plano focal objeto y el plano imagen del infinito.

c) Invariante de Helmholtz

Si hacemos uso de la fig. 9, y aplicamos la ley de Snell al rayo que se refracta en S, se tiene:

$$n \operatorname{sen}\omega = n' \operatorname{sen}\omega' \qquad \text{y en zona paraxial} \qquad n\,\omega = n'\,\omega'$$

Pero de la figura 9 se deduce que:

$$\omega = \frac{OP}{OS} = \frac{OP}{-SO} = \frac{y}{-s} = -\frac{y}{s} \qquad y \qquad s = \frac{h}{\sigma} \qquad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{y\sigma}{h}$$

$$\omega' = \frac{O'P'}{O'S} = \frac{O'P'}{-SO'} = \frac{y'}{-s'} = -\frac{y'}{s'} \qquad y \qquad s' = \frac{h}{\sigma'} \qquad \Rightarrow \quad \omega' = -\frac{y'\sigma'}{h}$$

Sustituyendo en la relación de Snell $n\,\omega = n'\,\omega'$ estos valores de ω y ω', y simplificando, queda:

$$\boxed{n\, y\, \sigma = n'\, y'\, \sigma'}$$

Como se ve, al atravesar el dioptrio, el producto n y σ se mantiene invariante. Este producto es asimismo invariante para cualquier sistema óptico formado por un conjunto de dioptrios esféricos centrados: su valor antes de atravesar el primer dioptrio es igual al que presenta tras el último.

d) Aumentos

Hemos visto cómo, en el ámbito de la Óptica Paraxial, una superficie esférica tiene un comportamiento perfecto, las figuras objeto e imagen son semejantes entre sí y están relacionadas por las ecuaciones invariantes de Abbe y Helmholtz .

Debido a esta relación de semejanza entre las figuras objeto e imagen, se definen los aumentos, teniendo en cuenta las relaciones paraxiales citadas:

* ***Aumento lateral***, β', o relación entre el tamaño de la imagen y del objeto. Viene dado por:

$$\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{n\sigma}{n'\sigma'} = \frac{n\frac{h}{s}}{n'\frac{h}{s'}} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s}}$$

* ***Aumento angular***, γ', o relación entre los ángulos de abertura imagen y objeto. Su valor es:

$$\gamma \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{ny}{n'y'} = \frac{n}{n'}\frac{1}{\beta'} = \frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\gamma \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'}}$$

La relación entre ambos aumentos es:

$$\boxed{\beta'\gamma' = \frac{n}{n'}}$$

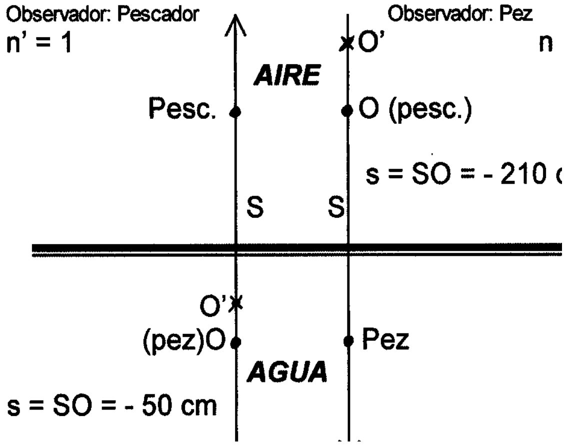
ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un pescador situado en su barca se encuentra a 2.1 m de altura por encima de la superficie del agua, mientras que un pez nada a 0.5 m debajo de la superficie. El índice de refracción del agua es 4/3. a) A qué distancia ve el pescador al pez?.- b) ¿Y el pez al pescador?

Ec. de Gauss, para un dioptrio: $-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$.

Para un dioptrio plano (la superficie del agua):

r = ∞. Por tanto, $s' = \frac{n'}{n}s$



a) El pescador es el observador, y el pez es el objeto: n_{agua} = n = 4/3 n_{aire} = n' = 1 s = - 50 cm.

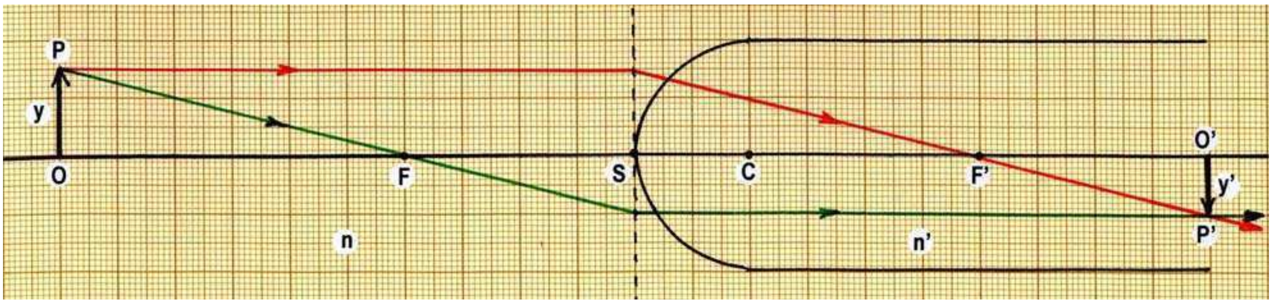
Por tanto: $s' = \frac{n'}{n}s = \frac{1}{4/3}(-50) = -37{,}5$ cm

b) El pez es el observador, y el pescador es el objeto: n_{aire} = n = 1 n_{agua} = n' = 4/3
s = SO = - 210 cm.

Por tanto: $s' = \frac{n'}{n}s = \frac{4/3}{1}(-210) = -280$ cm

El pescador ve al pez dentro del agua ***a 37,5 cm*** de la superficie; más cercano a ella que como realmente está. El pez en cambio ve al pescador por encima de la superficie del agua, en el aire, como si estuviera ***a 2,8 metros*** de la superficie.

2.- El extremo de una varilla cilíndrica de vidrio cuyo índice es 1.50 está limitado por una superficie semiesférica de 2 cm de radio. A la izquierda del vértice de esta superficie y a 10 cm de ella se encuentra situado un objeto de 3 mm de altura, perpendicular al eje y apoyado sobre él. a) Hallar la posición y el tamaño de la imagen, si la varilla se encuentra en el aire.- b) Hallar las focales del dioptrio. c) Resolver el problema geométricamente.



a) r = SC = 2 cm n = 1 n' = 1,5 s = SO = - 10 cm y = 3 mm

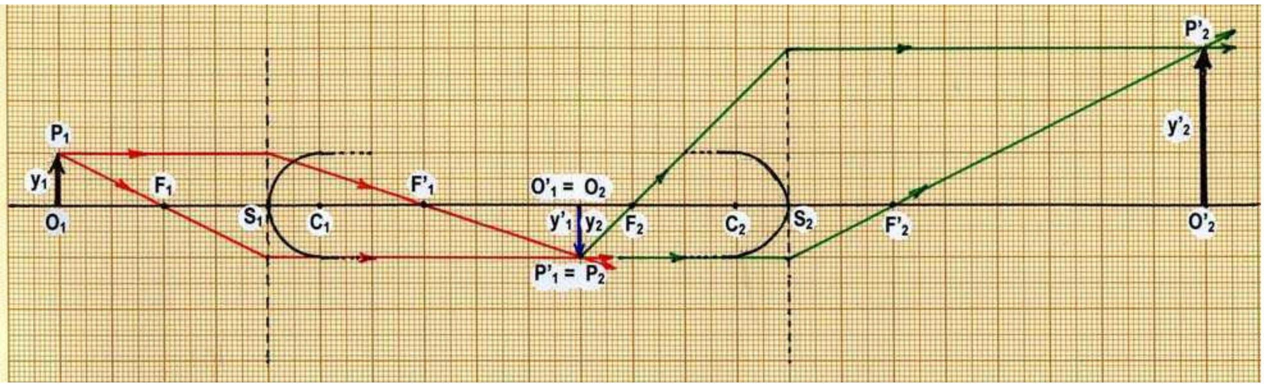
Ecuación de Gauss: $-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$ $-\frac{1}{-10}+\frac{1{,}5}{s'}=\frac{1{,}5-1}{2}$ s' = 10 cm

Aumento lateral: $\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{n}{n'}\frac{s'}{s}=\frac{1x10}{1{,}5x(-10)}=-2/3$ y' = β' y = (-2/3)x3 mm = - 2 mm

b) Focales: $f'=\frac{n'}{n'-n}r = \frac{1{,}5}{1{,}5-1}2 = 6$ cm $f = -\frac{n}{n'-n}r = -\frac{1}{1{,}5-1}2 = -4$ cm

Resumiendo: La imagen, real e invertida y de 2 mm, se halla 10 cm detrás del dioptrio. Las focales del dioptrio son f' = 6 cm y f = - 4 cm.

3.- Una varilla de vidrio (n = 1,5) termina en sus extremos en dos semiesferas de 5 cm de radio. Al situar un objeto sobre el eje de la varilla y a 20 cm de un extremo, la imagen final se forma a 40 cm del extremo opuesto. Hallar la longitud de la varilla.



Dioptrio 1º: $r_1 = S_1C_1 = 5$ cm $n_1 = 1$ $n'_1 = 1,5$ $s_1 = S_1O_1 = -20$ cm

$$-\frac{n_1}{s_1}+\frac{n'_1}{s'_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{-20}+\frac{1,5}{s'_1}=\frac{1,5-1}{5} \quad \rightarrow \quad s'_1 = 30 \text{ cm}$$

Paso del dioptrio 1º al 2º: $s_2 = S_2O_2 = S_2O'_1 = S_2S_1 + S_1O'_1 = -L + s'_1 = 30 - L$ donde $L = S_1S_2$

Dioptrio 2º: $r_2 = S_2C_2 = -5$ cm $n_2 = 1,5$ $n'_2 = 1$ $s_2 = S_2O_2 = 30 - L$ $s'_2 = 40$

$$-\frac{n_2}{s_2}+\frac{n'_2}{s'_2}=\frac{n'_2-n_2}{r_2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1,5}{30-L}+\frac{1}{40}=\frac{1-1,5}{-5} \quad \rightarrow$$ L = ***50 cm*** es la longitud de la varilla.

Para resolver gráficamente el problema, a escala, se precisa calcular las distancias focales:

$$f_1'=S_1F_1'=\frac{n_1'}{n_1'-n_1}r_1=\frac{1'5}{1'5-1}5=15 \text{ cm} \qquad f_2'=S_2F_2'=\frac{n_2'}{n_2'-n_2}r_2=\frac{1}{1-1'5}(-5)=10 \text{ cm}$$

$$f_1=S_1F_1=-\frac{n_1}{n_1'-n_1}r_1=-\frac{1}{1'5-1}5=-10 \text{ cm} \qquad f_2=S_2F_2=-\frac{n_2}{n_2'-n_2}r_2=-\frac{1'5}{1-1'5}(-5)=-15 \text{ cm}$$

4.- Una esfera de vidrio de paredes delgadas y radio r está llena de agua. A una distancia r/2 de su superficie se coloca un objeto. Hallar la posición de la imagen final tras la esfera, para el caso en el que su radio sea de 10 cm. Naturaleza de la imagen final, Resolución gráfica, previo cálculo de las focales de cada dioptrio.

Primer dioptrio: $r_1 = 10$ cm $n_1 = 1$ $n'_1 = 4/3$ $s_1 = -5$ cm

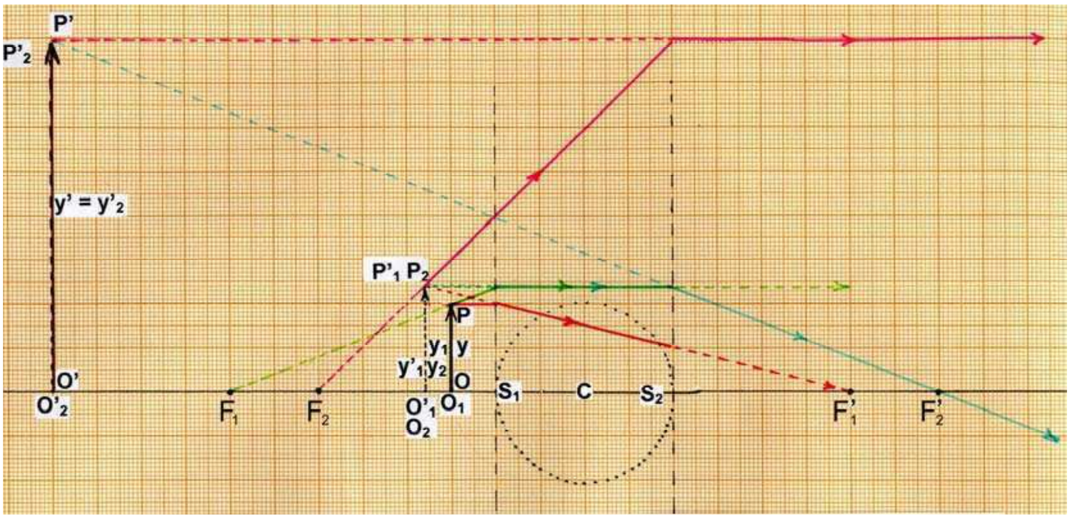
$$-\frac{n_1}{s_1}+\frac{n'_1}{s'_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{-5}+\frac{4/3}{s'_1}=\frac{4/3-1}{10} \quad \rightarrow \quad s'_1 = -8 \text{ cm}$$

Paso dioptrio 1º a dioptrio 2º : $d = S_1S_2 = 20$ cm
$s_2 = S_2O_2 = S_2O'_1 = S_2S_1 + S_1O'_1 = -d + s'_1 = -20 -8 = -28$ cm

Segundo dioptrio: $r_2 = -10$ cm $n_2 = 4/3$ $n'_2 = 1$ $s_2 = -28$ cm

$$-\frac{n_2}{s_2}+\frac{n'_2}{s'_2}=\frac{n'_2-n_2}{r_2} \quad \rightarrow \quad -\frac{4/3}{-28}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1-4/3}{-10} \quad \rightarrow \quad s'_2 = -70 \text{ cm}$$

Aumento lateral: $\beta' = \beta'_1\,\beta'_2 = \dfrac{n_1}{n'_1}\dfrac{s'_1}{s_1} \times \dfrac{n_2}{n'_2}\dfrac{s'_2}{s_2} = \dfrac{(-8)(-70)}{(-5)(-28)} = 4$



La imagen final está a la izquierda de la esfera, 60 cm de su centro ($s'_2 < -20$ cm)
es virtual ($s'_2 < 0$).
es directa ($\beta' > 0$)
es cuatro veces mayor que el objeto ($\beta' = 4$)

Para la resolución gráfica se precisan las focales f'_1 y f_1 que nos sitúan los focos F'_1 y F_1 y las focales f'_2 y f_2 para los focos F'_2 y F_2.

$f'_1 = \dfrac{n'_1}{n'_1 - n_1} r_1 = \dfrac{4/3}{4/3 - 1}\, 10 = 40$ cm $\qquad f_1 = -\dfrac{n_1}{n'_1 - n_1} r_1 = -\dfrac{1}{4/3 - 1}\, 10 = -30$ cm

$f'_2 = \dfrac{n'_2}{n'_2 - n_2} r_2 = \dfrac{1}{1 - 4/3}\,(-10) = 30$ cm $\qquad f_2 = -\dfrac{n_2}{n'_2 - n_2} r_2 = -\dfrac{4/3}{1 - 4/3}(-10) = -40$ cm

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Calcular la profundidad aparente de una piscina de agua (n = 1,33) de 2 m de profundidad cuando se la mira verticalmente al fondo desde el aire. ***R.:* 1,5 m**

2.- En el fondo de una jarra llena de agua (n = 1,33) hasta una cierta altura se encuentra una moneda. ¿Hasta qué altura se llenó la jarra si aparentemente la moneda se encuentra a 15 cm? ***R.: 20 cm***

3.- Un muchacho, que no sabe nadar, observa que a lo sumo la profundidad de un lago es de 1.5 m. Como es prudente, toma la precaución, antes de bañarse, de medir la profundidad introduciendo una vara hasta tocar el fondo. Hecho esto, decidió no bañarse. ¿Por qué? ***R.: La profundidad era de 2 m***

4.- ¿Dónde se encuentra la imagen de un punto situado 50 cm por delante de un dioptrio plano que separa dos medios de índices 1 y 1,33? ***R.: 66,5 cm por delante del dioptrio plano***

5.- Una pecera esférica de espesor despreciable y de 20 cm de radio está llena de agua (n = 4/3). ¿Dónde se formará la imagen de un pez que se encuentra en el centro de la pecera? ¿Cuál será su tamaño? ***R.: En el centro de la pecera, y su tamaño será 4/3 mayor***

6.- Un dioptrio esférico cóncavo de 10 cm de radio separa dos medios transparentes de índices 1 y 4/3, respectivamente. Calcular las distancias focales del dioptrio.
R.: f' = - 40 cm y f = 30 cm.

7.- Un dioptrio esférico convexo de 40 cm de radio separa dos medios de índices 1.5 y 1.75. Si se coloca un objeto delante del dioptrio y a 80 cm de él, ¿a qué distancia del vértice se forma su imagen?. ***R.: A 1,4 m por delante***.

8.- Un dioptrio esférico convexo de 20 cm de radio separa dos medios, cuyos índices de refracción son 1 y 1.6. Delante de la superficie de separación de los dos medios, a 25 cm de distancia, se sitúa un objeto de 2 cm de altura. ¿A qué distancia del dioptrio se forma la imagen, y cuál es su tamaño? ¿Cuáles son las focales del dioptrio? Haz un esquema, a escala, de la marcha de los rayos y de la formación de la imagen.
R.: A 160 cm, por delante; tamaño, 8 cm. Focales, f' = 53.3 cm y f = - 33.3 cm

9.- ¿Cuál ha de ser el índice de refracción de una esfera transparente para que los rayos paraxiales procedentes del infinito se concentren en el vértice de la segunda superficie?
R.: n = 2

10.- Un haz estrecho de rayos paralelos dirigidos en dirección radial penetra en una esfera de vidrio (n = 1,50) maciza, de 3 cm de radio. ¿En qué punto fuera de la esfera se reúnen estos rayos? ***R.: A 1.5 cm de la esfera***

11.- El extremo de una barra de vidrio, de índice 1.5, es una superficie esférica de 50 cm de radio. A 12 cm de dicho extremo se encuentra una burbuja de aire de 3 mm de diámetro. ¿En qué posición se la ve y con qué tamaño cuando se la observa de frente al extremo de la barra?
R.: Se la ve en el interior de la barra, a 8.7 cm del extremo; su tamaño es de 3.26 mm de diámetro.

12.- Delante de un dioptrio esférico cóncavo de 20 cm de radio y a 40 cm de distancia de él se encuentra situado un objeto de 5 cm de altura.

Los índices de refracción de los dos medios separados por el dioptrio son 1 y 1.5, respectivamente. Hallar la posición y el tamaño de la imagen.
R.: Imagen directa, de 2.5 cm, a 30 cm por delante del dioptrio.

13.- El extremo de una varilla cilíndrica de vidrio cuyo índice es 1.50 está limitado por una superficie semiesférica de 2 cm de radio. A la izquierda del vértice de esta superficie y a 10 cm de ella se encuentra situado un objeto de 3 mm de altura, perpendicular al eje y apoyado sobre él. a) Hallar la posición y el tamaño de la imagen, si la varilla se encuentra sumergida en disulfuro de carbono de índice 1.62.- b) Hallar las focales del dioptrio.
R.: La imagen, virtual, directa y de 2,19 mm, se halla 6,76 cm por delante del dioptrio. Las focales del dioptrio son f' = - 25 cm y f = 27 cm.

14.- Una esfera de vidrio de paredes delgadas y radio r está llena de agua. A una distancia 3r de su superficie se coloca un objeto. Hallar la posición de la imagen final.
R.: A una distancia 4r del centro de la esfera

15.- Un objeto se encuentra a 15 cm de distancia del centro de un vidrio esférico de 3 cm de radio que adorna un árbol de Navidad. Índice de refracción, n = 1,5 ¿Cuál es el aumento de la imagen? ***R.:*** β' ***= - 0.43***

16.- Una varilla larga de vidrio (n = 1.50) de 8 cm de diámetro termina en su extremo en una superficie semiesférica de 4 cm de radio. La varilla se sumerge en un líquido. Un objeto situado sobre el eje de la varilla a 60 cm del extremo forma su imagen en un punto situado 100 cm dentro de la varilla. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido? ***R.:*** **n = 1.35**

17.- Los índices de refracción de los medios que separa un dioptrio esférico cóncavo de 20 cm de radio son 1.33 y 1.54. Delante de la superficie, a 30 cm de ella, se sitúa un objeto de 2 cm de altura. Determinar la naturaleza de la imagen.
R.: La imagen, de 1,6 cm, se encuentra a 28,1 cm por delante del dioptrio, es virtual y directa.

18.- Un recipiente prismático, de base rectangular, contiene CS_2 cuyo índice de refracción es 1'62. En su interior, y en la forma que señala la figura, hay una lente de vidrio (índice, 1'50) tallada en forma de cilindro culminado por una semiesfera de igual radio, 5cm; la altura de la parte cilíndrica es asimismo de 5 cm. Delante del recipiente se sitúa un objeto de 5 mm de altura. Teniendo en cuenta la disposición y distancias de la figura, ¿en qué posición y qué tamaño tendrá la última imagen del objeto dado? ¿Podrá ser recogida en una pantalla? Figura 1ª de la página siguiente.
R.: A 0'29 cm detrás de la 1ª cara del prisma.- Su tamaño es 3'8 mm.- No puede recogerse en una pantalla.

19.- Un recipiente transparente, de pared lateral esférica (tipo pecera) de radio 20 cm, contiene agua (n = 4/3). Se coloca en su interior la lente del problema anterior, en la forma señalada en la figura, manteniendo las distancias y longitudes que se indican. Delante del recipiente se sitúa un objeto de 4 mm de altura. ¿En qué posición y de qué tamaño se verá la última imagen del objeto dado? ¿Podrá ser recogida en una pantalla? Figura 2ª de la página siguiente.
R.: A 139'2 cm por delante de la 1ª cara del prisma.- Su tamaño es 37 mm.- No puede recogerse en una pantalla.

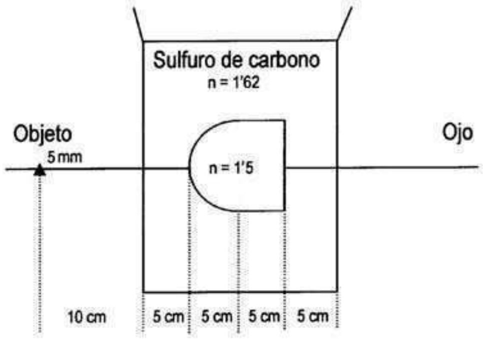


Figura 1ª

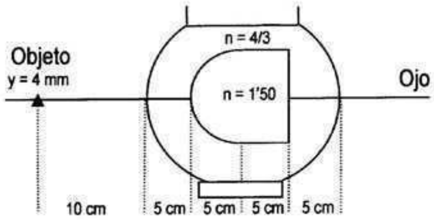


Figura 2ª

A.- ESPEJOS Y LENTES

1.- ESPEJOS

Son superficies en las que se produce la reflexión de los rayos que inciden sobre ellas. Consideraremos únicamente superficies esféricas (en zona paraxial) y planas.

A.- RELACIONES MÁS IMPORTANTES, EN LOS ESPEJOS

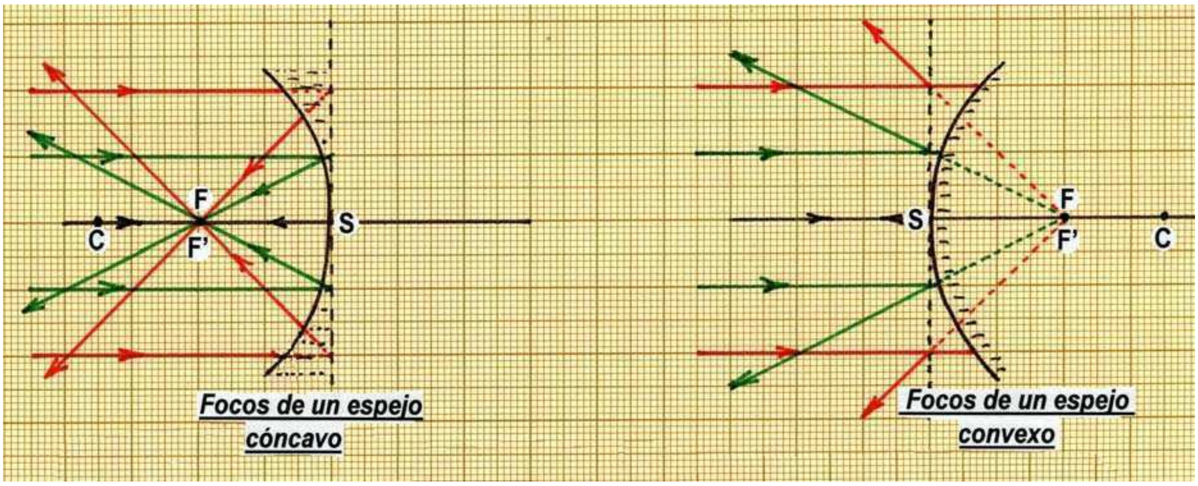
La reflexión puede ser estudiada (ya lo hemos demostrado) como una refracción en la que los rayos pasan de un medio de índice n a otro de índice n' = - n. Entonces;

* Fórmula de Gauss, $-\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{r}}$

* Distancias focales, $f'=\frac{n'}{n'-n}r \rightarrow f'=\frac{r}{2}$ $\qquad f=-\frac{n}{n'-n}r \rightarrow f=\frac{r}{2}$

Por lo tanto, para un espejo esférico: $\boxed{f = f' = \frac{r}{2}}$ y $\boxed{\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}}$

⇒ los focos F y F' coinciden y se sitúan a una distancia del vértice S igual a la mitad del radio.



* Aumento lateral, $\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s}$ $\rightarrow$ $\beta' \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

Aumento angular, $\gamma' \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'}$ $\rightarrow$ $\gamma' \equiv \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'}$

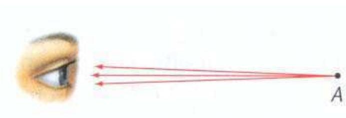
Relación, $\beta'\gamma' = \frac{n}{n'}$ $\rightarrow$ $\beta'\gamma' = -1$

* Los espejos esféricos pueden ser ***convexos*** (r > 0) o ***cóncavos*** (r < 0).

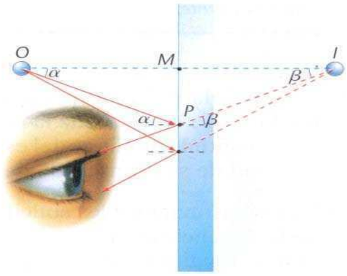
* Un ***espejo plano*** puede ser considerado como un espejo esférico de radio r = ∝. Entonces:

$$\boxed{s' = -s} \qquad \boxed{\beta' \equiv \frac{y'}{y} = 1}$$

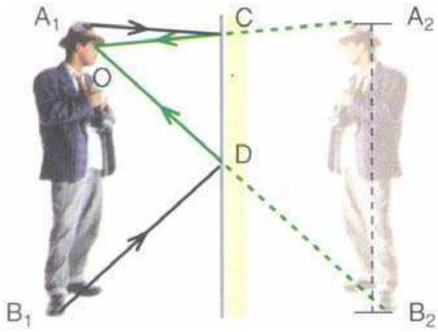
⇒ ***la imagen está situada siempre al otro lado del espejo (imagen virtual); es directa y de igual tamaño que el objeto.***



Rayos de luz divergentes. Se ve el punto A, del cual proceden.



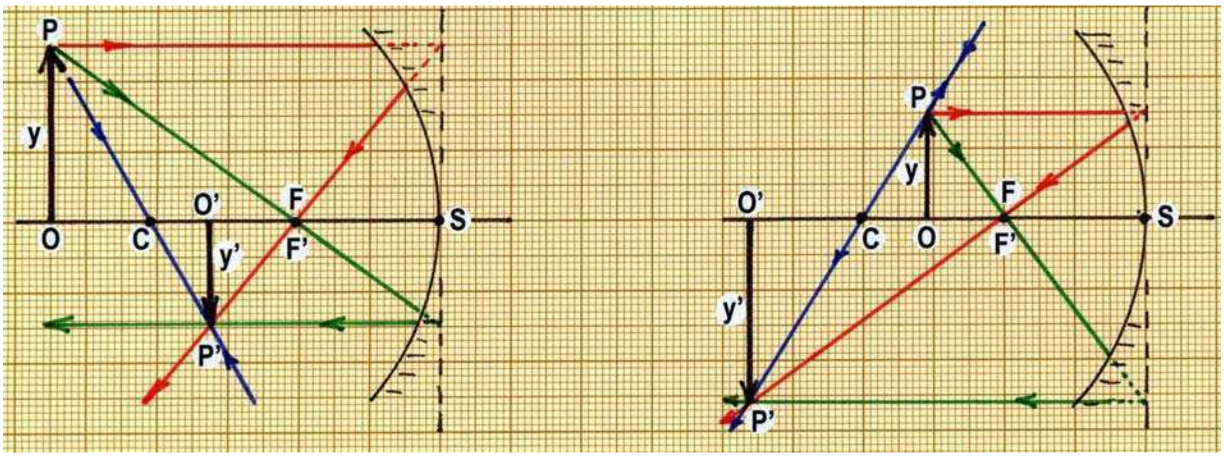
I es la imagen virtual de O.



B.- CONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES

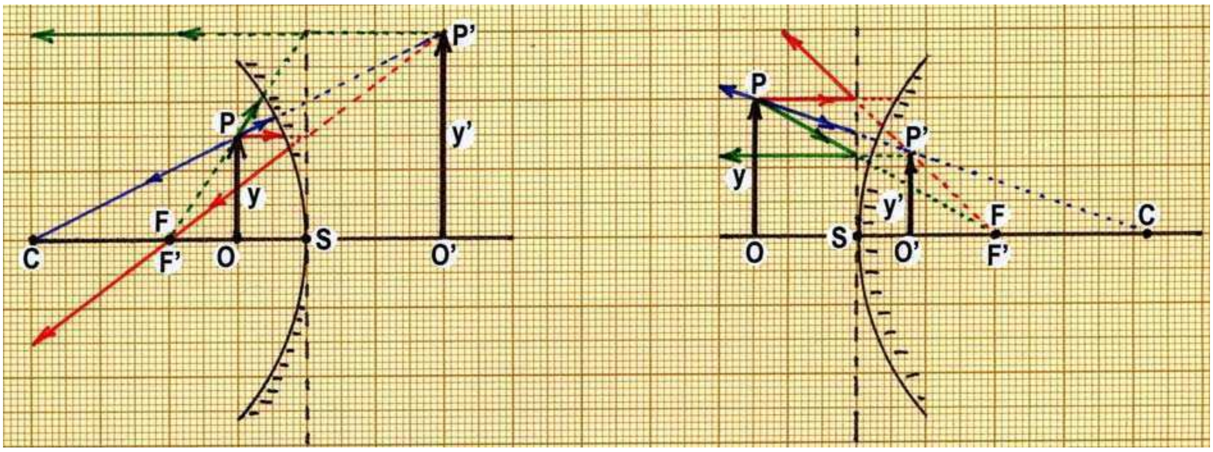
Es importante para el alumno aprender a trazar la marcha de los rayos a través de un dioptrio. En el caso de los espejos (generalizable a otros sistemas), se trata de que dado un objeto OP, de tamaño y, siguiendo la marcha de los rayos que proceden de él, podamos dibujar con precisión su imagen O'P', de tamaño y'. O bien, dado un punto O sobre el eje, seamos capaces de situar su imagen O'.

Caso 1º.- *Dado un objeto OP, dibujar su imagen O'P'*.
Desde P se toman dos rayos:



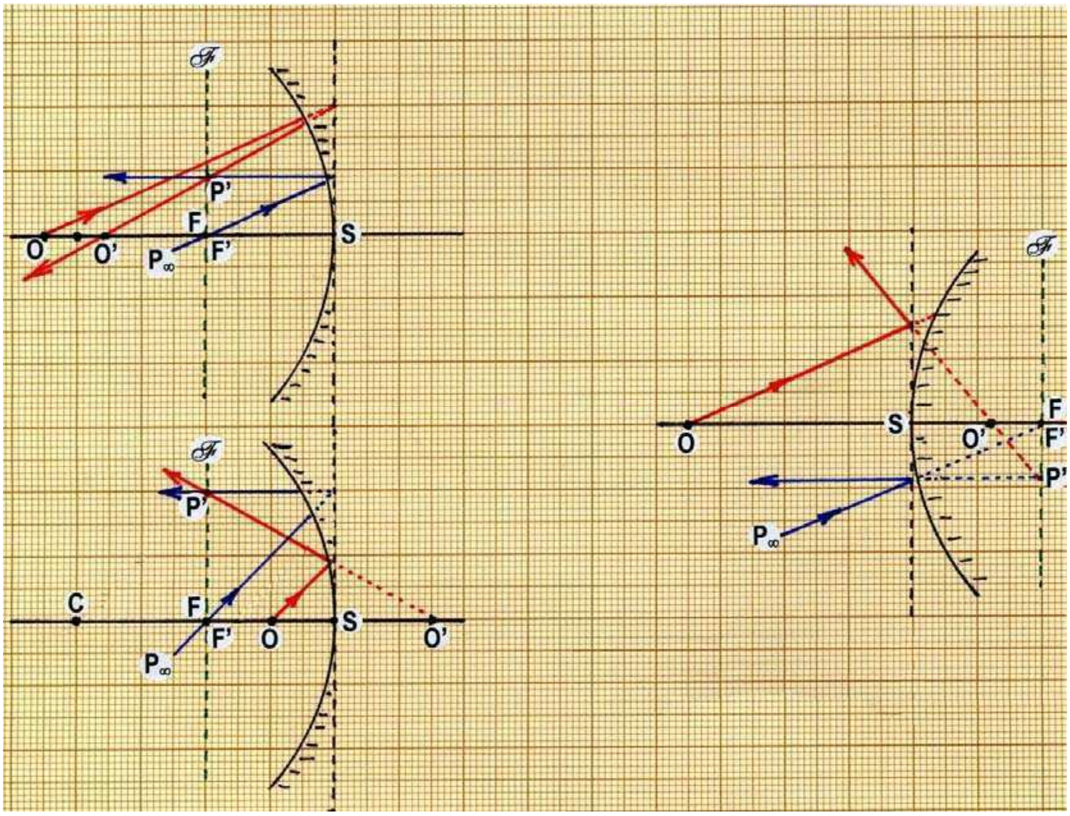
- Uno paralelo al eje; tras la incidencia en el espejo, el rayo reflejado debe pasar por el foco imagen F' (él o su prolongación).
- Otro apunta al foco objeto F; tras el espejo, el rayo reflejado debe salir paralelo al eje.

- La intersección de ambos rayos reflejados (o sus prolongaciones) determina P’.
- Un tercer rayo puede ayudarnos a comprobar la construcción anterior: el rayo que procede de P y pasa por el centro C del espejo no se desvía, por incidir en el espejo normalmente



Caso 2º.- *Dado un punto O del eje, dibujar la posición de su imagen O’.*

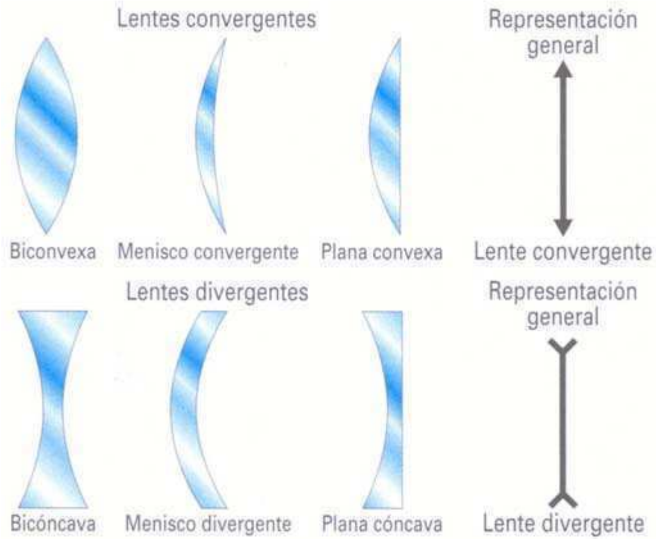
- Desde O, se traza un rayo cualquiera, hasta el espejo.
- Se traza por F un rayo paralelo al anterior, hasta el espejo. Este rayo se refleja, volviendo paralelo al eje, pues procedía de F; corta al plano focal imagen en un punto P’.
- Por dicho punto P’ debe pasar el primer rayo reflejado, pues los dos rayos incidentes son paralelos, como si procedieran de P_∞, debiendo formar su imagen en P’, del plano focal imagen.
- El primer rayo reflejado corta al eje en O’, imagen de O. En efecto, los dos rayos que proceden de O, el primero y el que va por el eje del espejo, tras la reflexión, se se focalizan en O’(ellos o sus prolongaciones).



2.- LENTES

Una lente es un sistema óptico centrado formado por la asociación de dos dioptrios esféricos que limitan un medio transparente.

Se clasifican en:



convergentes: Cuando un haz de rayos luminosos, que caminan paralelos al eje del sistema, atraviesa refractándose una lente convergente, se concentra realmente en un punto. Las lentes convergentes pueden ser (figura):

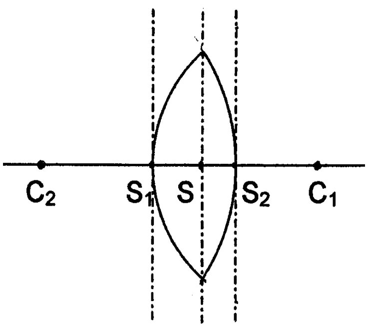
Lentes *biconvexas*, *meniscos convergentes* y *planoconvexas*.

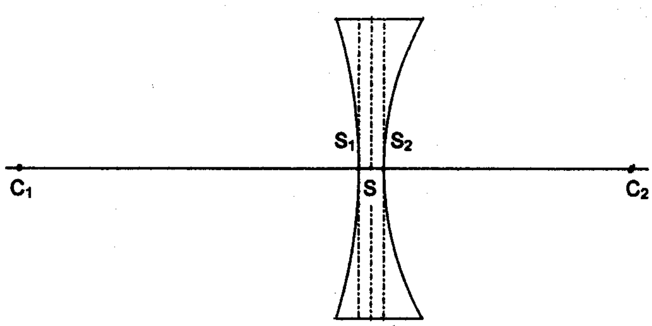
divergentes: Cuando el haz de rayos paralelos, que van paralelos al eje del sistema, atraviesa la lente divergente, tras ella salen divergentes. Pueden ser:

Lentes *bicóncavas*, *meniscos divergentes* y *planocóncavas.*

En la figura también pueden verse sus representaciones esquemáticas, especialmente cuando se trata de lentes delgadas.

A la distancia, en el eje, entre los vértices de los dioptrios que dan lugar a una lente se le denomina ***grosor*** de la lente, $e = S_1S_2$. Los radios de ambos dioptrios son $r_1 = S_1C_1$ y $r_2 = S_2C_2$.





Se denomina ***lente delgada*** a aquélla cuyo grosor es muy pequeño comparado con las distancias laterales que se utilizan (distancias focales, posiciones de objeto e imagen, radios, ...). En este caso, que será el único al que nos refiramos en adelante, se tiene:

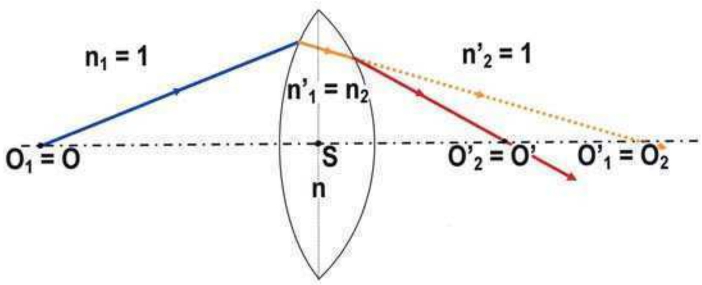
$$e \equiv S_1S_2 \rightarrow 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 \rightarrow S \leftarrow S_2 \qquad r_1 \equiv S_1C_1 \cong SC_1 \qquad r_2 \equiv S_2C_2 \cong SC_2$$

El plano por S, plano principal de la lente, es el que juntamente con el eje del sistema determina el sistema de coordenadas a utilizar. Por ello, las lentes delgadas se representan con una flecha de doble punta (en el caso de lentes convergentes).

A.- RELACIONES MÁS IMPORTANTES, EN LAS LENTES DELGADAS

Consideremos una lente delgada, de índice n, situada en el aire (figura). Respecto de los dos dioptrios, en la figura aparecen los diferentes índices: $n_1 = 1 = n'_2$ y $n'_1 = n = n_2$

Sea O un punto objeto, y O' su imagen tras la lente delgada. Entonces se tendrá que $O = O_1$ $O'_1 = O_2$ y $O'_2 = O'$. Asimismo, las diferentes posiciones de los objetos e imágenes dados por los dioptrios serán $s = s_1$ $s'_1 = s_2$ $s' = s'_2$, siempre teniendo en cuenta que estamos estudiando la zona paraxial y que la lente es delgada.



- Apliquemos la fórmula de Gauss a ambos dioptrios:

- dioptrio primero: $-\frac{n_1}{s_1}+\frac{n'_1}{s'_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{s}+\frac{n}{s_2}=\frac{n-1}{r_1}$

- dioptrio segundo: $-\frac{n_2}{s_2}+\frac{n'_2}{s'_2}=\frac{n'_2-n_2}{r_2} \quad \rightarrow \quad -\frac{n}{s_2}+\frac{1}{s'}=\frac{1-n}{r_2}$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$$\boxed{-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

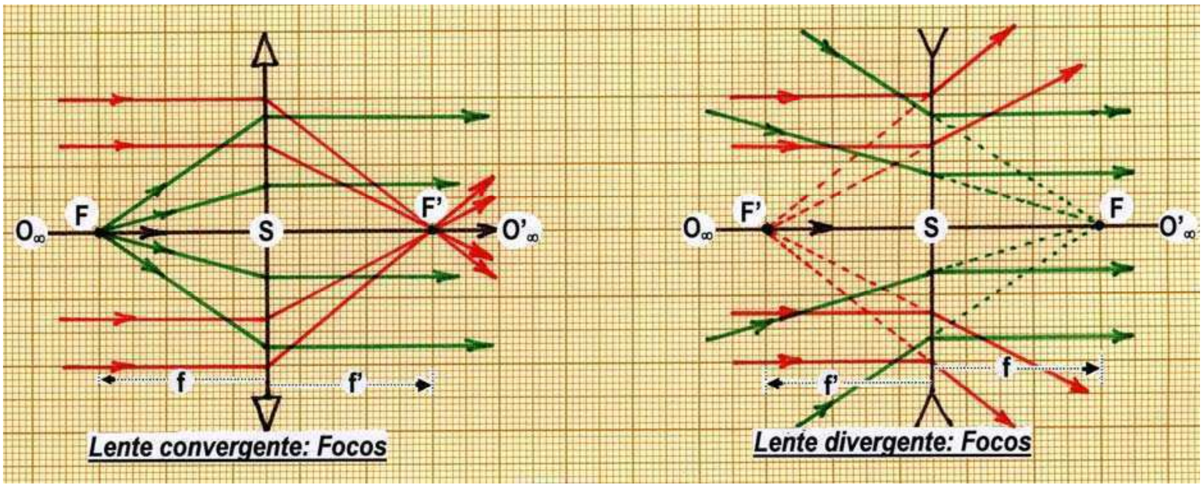
- ***Focos y distancias focales de las lentes delgadas.-***

+ IMAGEN.- Un haz de rayos paralelo al eje, incidente en la lente, tras ella, se concentra en un punto del eje. Lo llamamos ***foco imagen*** , F'. Por tanto, son conjugados O_∞ y F', es decir O_∞ es un punto objeto cuya imagen es F'. La distancia f' = SF' se denomina ***distancia focal imagen*** o simplemente ***focal imagen*** de la lente. Se calcula haciendo en la ecuación anterior (&), $s = \infty$ y $s' = f'$, resultando:

$$\boxed{\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

+ OBJETO.- Existe un punto F en el eje que verifica: todos los rayos procedentes de él que atraviesan la lente salen paralelos al eje. Este punto se denomina ***foco objeto***. Por tanto, son puntos conjugados el punto objeto F y su imagen O'_∞. La distancia f = SF se llama ***distancia focal objeto***, o simplemente ***focal objeto*** de la lente. Su valor se obtiene haciendo en la ecuación (&) s = f y $s' = \infty$, con lo que:

$$\boxed{\frac{1}{f}=-(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$



1) En las lentes delgadas: $\boxed{f = - f'}$ (mientras que en los espejos f = f')

⇒ *los focos se sitúan en puntos simétricos a la lente, sobre el eje:*

+ En las lentes convergentes, F y F' se sitúan a izquierda y derecha de la lente, respectivamente, puesto que f' > 0. Compruébese como ejercicio.
+ En las lentes divergentes, F y F' están respectivamente a derecha e izquierda de la lente, puesto que en ellas f' < 0. Compruébese como ejercicio.

2) ***Potencia*** de una lente.- Se define, P' = 1/f'. Es pues la inversa de la focal imagen. (En realidad se habla de potencia imagen y potencia objeto: P' = 1/f' y P = 1/f. Pero, en el caso de las lentes, P' = - P puesto que f' = - f . Basta por tanto un solo concepto: *potencia imagen* o simplemente *potencia de la lente*, P' = 1/f').

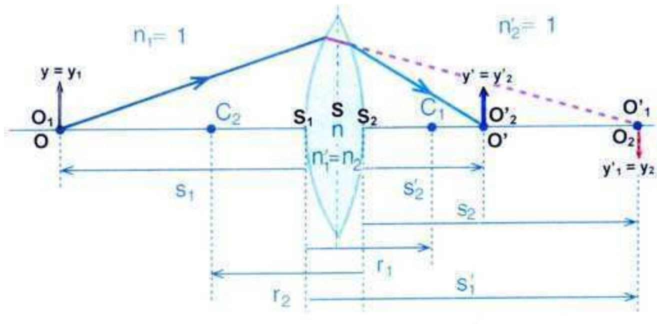
Si la focal de una lente se mide en *metros*, la potencia se expresa en *dioptrías*. Así pues,

$$1 \text{ dioptría} = 1 \text{ m}^{-1}$$

Por ejemplo, una lente divergente de -7dioptrías tiene una focal f' = -1/7 = - 0.14 m.

- ***Aumento lateral.-***

Del mismo modo que anteriormente, se delgada) que:



$n_1 = 1$	$n'_1 = n_2 = n$	$n'_2 = 1$
$y_1 = y$	$y'_1 = y_2$	$y'_2 = y'$
$s_1 = s$	$s'_1 = s_2$	$s'_2 = s'$

Aplicando la fórmula del aumento lateral a cada uno de los dos dioptrios de la lente, se tiene:

$$\beta'_1 = \frac{n_1}{n'_1}\frac{s'_1}{s_1} = \frac{1}{n}\frac{s_2}{s} \qquad \beta'_2 = \frac{n_2}{n'_2}\frac{s'_2}{s_2} = \frac{n}{1}\frac{s'}{s_2}$$

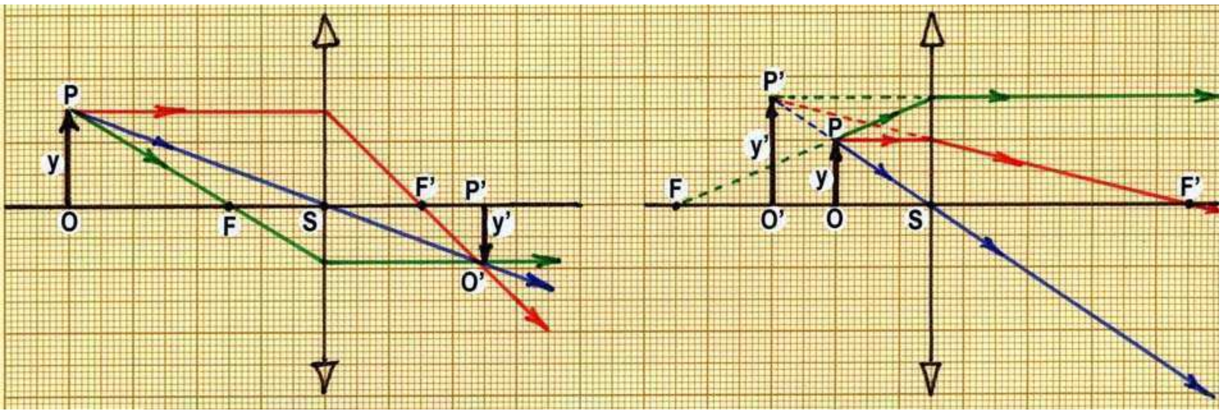
El aumento lateral producido por la lente viene dado por la razón entre el tamaño de la imagen final y el del objeto. O sea:

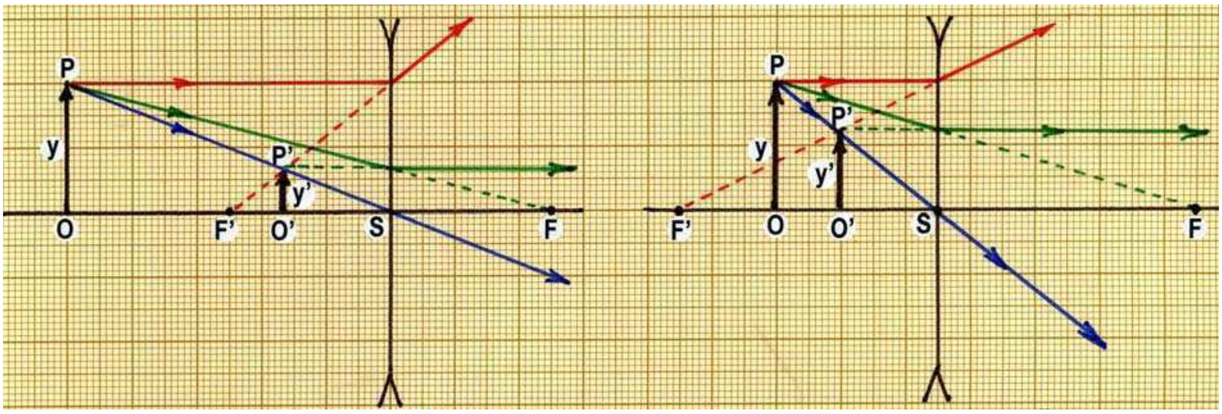
$$\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{y'_2}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2}\frac{y'_1}{y_1} = \beta'_1\,\beta'_2 = \frac{1}{n}\frac{s_2}{s}\,\frac{n}{1}\frac{s'}{s_2} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta' \equiv \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}}$$

B.- CONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES

Caso 1º.- *Dado un objeto OP, dibujar su imagen O'P'.*
Desde P se toman dos rayos:

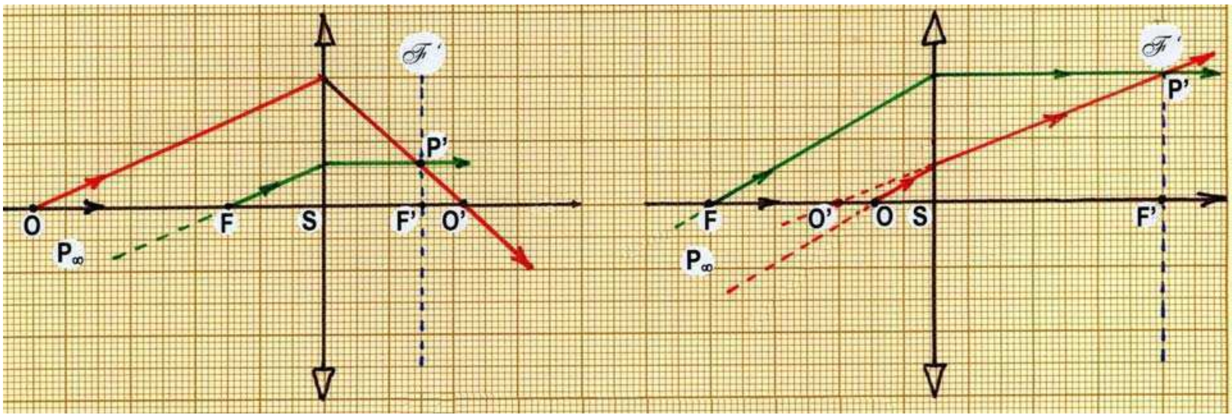
- Uno paralelo al eje; tras la incidencia en la lente, el rayo debe pasar por el foco imagen F' (él o su prolongación).
- Otro apunta al foco objeto F; tras la lente, el rayo debe salir paralelo al eje.
- La intersección de ambos rayos (o sus prolongaciones) determina P'.
- Un tercer rayo puede ayudarnos a comprobar la construcción anterior: el rayo que procede de P y pasa por el centro S de la lente no se desvía.



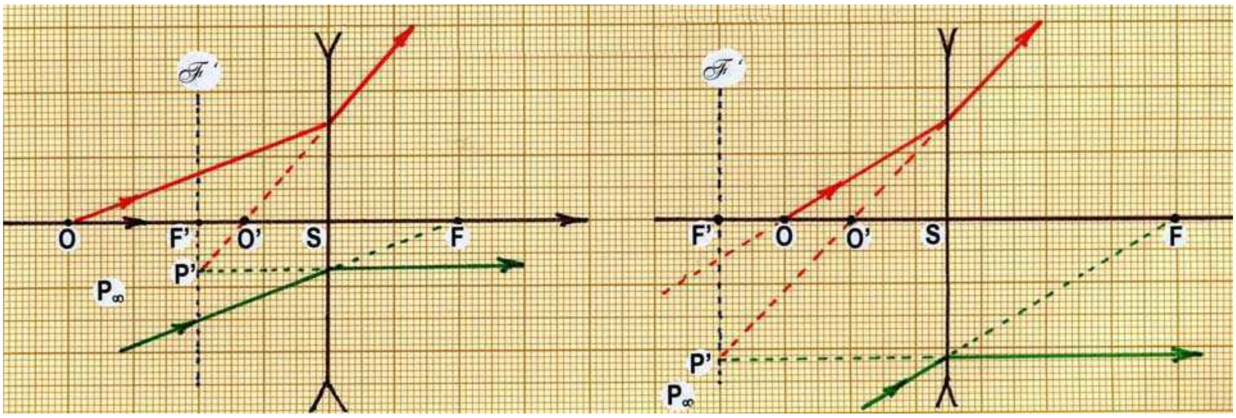


Caso 2º.- *Dado un punto O del eje, dibujar la posición de su imagen O'.*

- Desde O, se traza un rayo cualquiera, hasta la lente.
- Se traza por F un rayo paralelo al anterior, hasta la lente. Este rayo sale de la lente paralelo al eje, pues procedía de F; corta al plano focal imagen en un punto P'.
- Por dicho punto P' debe pasar el primer rayo, pues los dos rayos incidentes son paralelos, como si procedieran de P_∞, debiendo formar su imagen en P', del plano focal imagen.
- El primer rayo corta al eje en O', imagen de O. En efecto, los dos rayos que proceden de O, el primero y el que va por el eje de la lente, tras ella, se se focalizan en O'(ellos o sus prolongaciones).



O
P∞
F
S
F'
O'
P'
F
O'
O
S
F'
P'
P∞



O
F'
O'
S
F
P'
P∞
F'
O
O'
S
F
P'
P∞

ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Se tiene un espejo cóncavo de 1,2 m de radio. Hallar:

a) ¿A qué distancia hay que colocar un pequeño objeto en el eje para obtener una imagen cuatro veces mayor que el objeto?.

b) Comprobación mediante construcción gráfica.

Aumento lateral, en espejos: $\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \wedge \quad \beta' = \frac{y'}{y} = \pm 4 \quad \Rightarrow \; \exists$ dos casos $\begin{cases} \beta' = +1 \Rightarrow s' = -4s \\ \beta' = -1 \Rightarrow s' = 4s \end{cases}$

<u>Caso 1º: s' = - 4s</u>

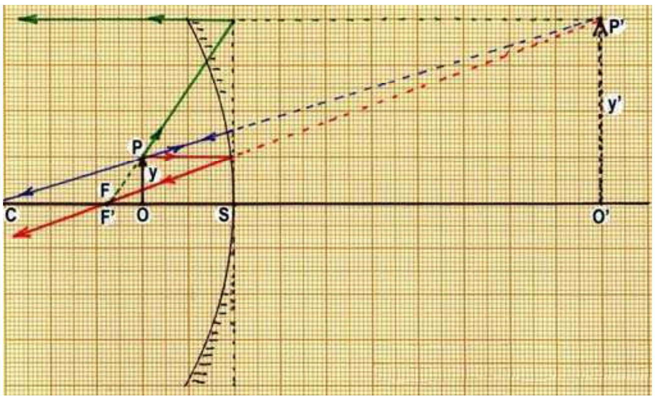
Ecuación de los espejos: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \; \wedge \;$ s' = - 4s $\wedge$ r = - 120 cm $\Rightarrow \begin{cases} s = -45cm \\ s' = 180cm \end{cases}$

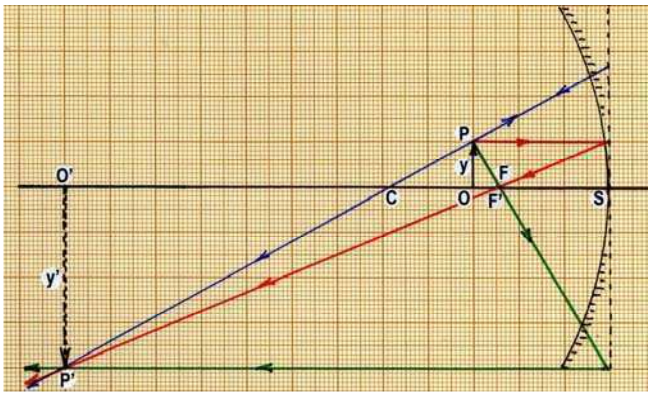
$\Rightarrow$ La imagen es virtual (s' > 0), situada detrás del espejo, directa (y'/y = 4 >0) y cuatro veces mayor que el objeto.

<u>Caso 2º: s' = 4s</u>

Ecuación de los espejos: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \; \wedge \;$ s' = 4s $\wedge$ r = - 120 cm $\Rightarrow \begin{cases} s = -75cm \\ s' = -300cm \end{cases}$

$\Rightarrow$ La imagen es real (s' < 0), situada a tres metros por delante del espejo; está invertida (y'/y = - 4 < 0) y es cuatro veces mayor que el objeto.





2. Se tiene un espejo convexo de 1,2 m de radio. Hallar:

a) ¿A qué distancia hay que colocar un pequeño objeto en el eje para que su imagen tenga la mitad de tamaño?

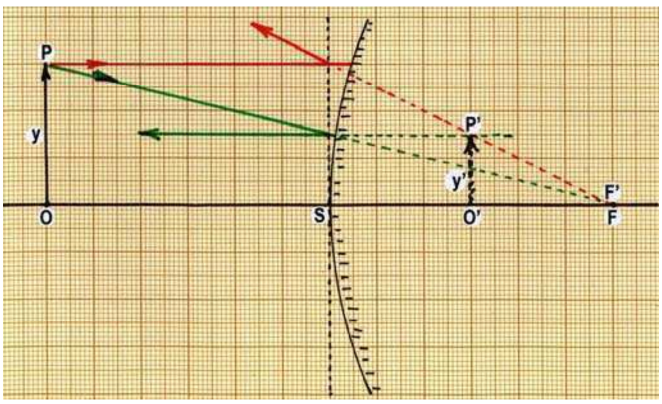
b) Comprobación mediante construcción gráfica.

Aumento lateral, en espejos: $\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$

Además: $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}$ Por tanto: s = - 2s'

Sustituyendo este valor en la ecuación de los espejos, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$, siendo r = 120 cm resulta

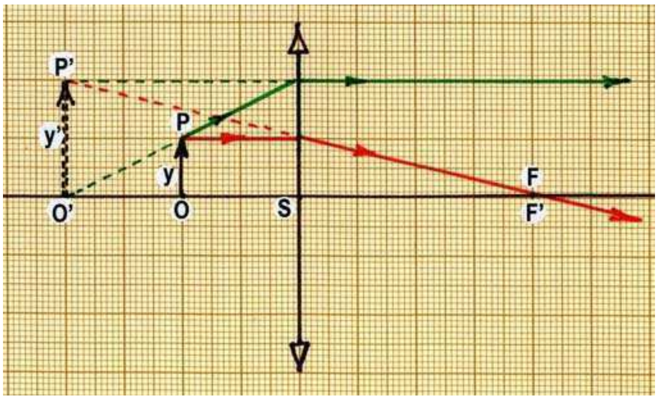
$\begin{cases} s = -60cm \\ s' = 30cm \end{cases}$ Es, por tanto, una imagen virtual y directa, pues s' > 0 y β' = ½ > 0, y de tamaño la mitad del tamaño del objeto.



3.- La potencia de una lente es de 5 dioptrías.

a) Si a 10cm a su izquierda se coloca un objeto de 2 mm de altura, hallar la posición y el tamaño de la imagen.

b) Si dicha lente es de vidrio, de índice 1.5, y una de sus caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la otra?



a) Potencia y focal: $P' = 1/f' = 5 \Rightarrow f' = 20$ cm

Ecuación de las lentes delgadas: $-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$

donde s = - 10 cm y f' = 20 cm permite hallar la posición de la imagen:

$$-\frac{1}{-10}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad s' = -20 \text{ cm}$$

Aumento lateral: $\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{-20}{-10}=2$

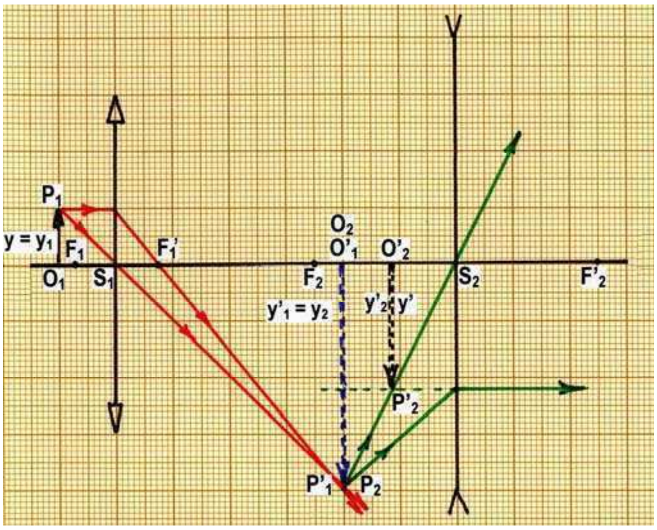
$y' = \beta'\, y = 2\text{x}2 = 4$ mm

$\Rightarrow$ La imagen es virtual ($s' < 0$), directa ($\beta' > 0$), y de doble tamaño que el objeto. Se sitúa en la posición del foco objeto F

b) Focal, en lentes delgadas: $\frac{1}{f'}=(n-1)(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$ donde f' = 20 cm, n = 1,5 y r_1 = 10 cm conducen

a que $\frac{1}{r_2}=0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \infty \quad \Rightarrow$ la lente es planoconvexa.

4.- Dos lentes, de focales respectivas f'_1 = 4 cm y f'_2 = - 12 cm, están separadas 30 cm. Un objeto de 7 mm se sitúa 5 cm por delante de la primera. ¿Dónde se forma la imagen? ¿Cuál es su tamaño?



+ Lente 1ª: $-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{f'_1}$ donde s_1 = - 5 cm

y f'_1 = 4 cm $\Rightarrow$ s'_1 = 20 cm

+ Paso de una lente a la otra: en este problema es inmediato ver que s_2 = - 10 cm (figura). En otros no lo es tanto. Es bueno planteárselo así:

$$s_2 = S_2O_2 = S_2O'_1 = S_2S_1 + S_1O'_1 = -d + s'_1$$

siendo $d = S_1S_2$ la distancia entre las lentes. En nuestro caso: $s_2 = -30 + 20 = -10$ cm

+ Lente 2ª: $-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f'_2}$ donde s_2 = - 10 cm y f'_2 = - 12 cm $\Rightarrow$ s'_2 = - 5,46 cm

+ Tamaño de la imagen final: $\beta' = \frac{y'_2}{y_1}=\frac{y'_2}{y_2}.\frac{y'_1}{y_1}=\beta'_2\,\beta'_1=\frac{s'_2}{s_2}.\frac{s'_1}{s_1}=\frac{-5.45}{-10}\frac{20}{-5}=-2{,}18$

$y' = \beta'\, y = -2{,}18\text{x}7 = 15{,}3$ mm.

Resumiendo: la imagen final es invertida, virtual, se encuentra entre ambas lentes, a 5,46 cm a la izquierda de la segunda lente, y su tamaño es 15,3 mm.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Un objeto de 5 cm de altura se coloca delante de un espejo plano y a 60 cm de él. ¿A qué distancia del espejo se forma la imagen?.- ¿Cuál es su tamaño?
R.: A 60 cm, por detrás del espejo.- Imagen virtual, directa y de 5 cm.

2.- Delante de un espejo esférico convexo de 50 cm de radio de curvatura se sitúa un objeto de 4 cm de altura, perpendicular al eje óptico del espejo y a 75 cm de distancia de su vértice. Calcular la distancia focal del espejo y la naturaleza de la imagen.
R.: f' = 25 cm. La imagen se halla a 18.75 cm por detrás del espejo; es virtual, directa y mide 1 cm.

3.- Un espejo esférico tiene un radio de curvatura de 120 cm. Si a una distancia de 90 cm de él se coloca un objeto de 5 cm de altura, calcular la posición y el tamaño de la imagen si el espejo es cóncavo.- Idem, si es convexo.
R.: Cóncavo: Imagen a 180 cm por delante del espejo, real e invertida, de 10 cm de altura.- Convexo: Imagen a 36 cm por detrás del espejo, virtual y directa, de 2 cm de altura.

4.- ¿A qué distancia por delante de un espejo convexo de 30 cm de radio de curvatura y perpendicularmente a su eje debe colocarse un objeto para que el tamaño de la imagen se reduzca a la mitad? ¿Dónde aparece su imagen y cuál es su naturaleza? Realizar la construcción gráfica de la marcha de rayos y obtención de la imagen, según los resultados obtenidos.
R.: El objeto debe colocarse a 15 cm delante del espejo; la imagen resulta virtual, directa y situada a 7,5 cm por detrás del espejo

5.- A 35 cm de distancia de un espejo cóncavo de 60 cm de radio de curvatura se encuentra un objeto. Determinar a qué distancia hay que colocar un espejo plano perpendicular al eje del sistema para que la imagen formada después de reflejarse los rayos en este espejo quede situada en el centro de curvatura del espejo cóncavo. ***Resultado: d = 135 cm***

6.- Si delante de un espejo esférico podemos vernos en cualquier posición en la que nos situemos, ¿de qué clase de espejo se trata? ¿Y si a cierta distancia la imagen desaparece?

7.-Se dispone de un espejo cóncavo de 20 cm de radio y se desea que la imagen se forme a 1 m del espejo. ¿A qué distancia se deberá colocar el objeto? ***R.: Dos posibilidades: con imagen real a 1 m delante del espejo, objeto real a 11.1 cm delante del espejo; y con imagen virtual a 1 m tras el espejo, objeto real a 9.1 cm por delante del espejo***.

8.- La distancia focal de un espejo cóncavo es 0.2 m. ¿Cuánto mide su radio de curvatura? ¿A qué distancia se formará la imagen si el objeto está situado a 2 m del espejo?
R.: Radio de curvatura, 40 cm. Posición de la imagen, 22 cm por delante del espejo.

9.- ¿A qué distancia por delante de un espejo convexo de 30 cm de distancia focal habrá que colocar un objeto de 2 cm de altura para que su imagen tenga una altura de 0,2 cm? Posición y naturaleza de la imagen.
R.: Posición del objeto: 270 cm por delante del espejo. Posición de la imagen, virtual y directa: 27 cm por detrás del espejo.

10.- Sobre una pantalla se desea proyectar mediante un espejo esférico cóncavo que dista de ella 10 m, la imagen de un objeto, de modo que la imagen sea cuatro veces mayor. Determinar la distancia del espejo a la que se debe colocar el objeto, así como el radio de curvatura del espejo. ***R.: A 2.5 m por delante. El radio debe valer 4 m***

11. Un espejo esférico cóncavo, para afeitarse, tiene un radio de curvatura de 30 cm. ¿Cuál es el aumento lateral del espejo cuando el rostro del observador está a 10 cm del vértice del espejo? ***R.:*** **$\beta' = 3$**

12.- Un objeto de 5 cm de altura está situado a 60 cm de distancia de una lente convergente de 40 cm de focal. Calcular la potencia de la lente, la posición de la imagen y su tamaño.
R.: 2'5 dptr.- Imagen real, invertida, de 10 cm y situada a 120 cm detrás de la lente.

13.- Un objeto de 5 cm de altura se sitúa a 25 cm de distancia de una lente delgada de 50 cm de focal. Hallar la posición y el tamaño de la imagen, a) si es convergente.- b) si es divergente.
R.: a) Imagen virtual, directa, de 10 cm, a 50 cm delante de la lente.
b) Imagen virtual, directa, de 3.33 cm, situada a 16.7 cm delante de la lente.

14.- ¿Cuál es la potencia y la focal de un sistema óptico constituido por una lente convergente de 2 dioptrías en contacto con otra divergente de – 6 dioptrías? ***R.: - 4 dioptrías f' = - 25 cm***

15.- ¿A qué distancia de una lente convergente se ha de colocar un objeto para que su imagen sea de igual tamaño? ***R.: s' = 2f'***

16.- ¿Varía la distancia focal de una lente si se invierte su orientación respecto al sentido de propagación de la luz? Razona la respuesta, examinando las siguiente lentes:
a) Una lente biconvexa, cuyos radios miden 30 y 45 cm, e índice 1,45. Calcular su potencia y su focal. ***R.: P' = 2,5 dptr f' = 40 cm***
b) Una lente bicóncava, cuyos radios miden 30 y 45 cm, e índice 1,45. Calcular su potencia y su focal. ***R.: P' = - 2,5 dptr f' = - 40 cm***

17.- En un cine se desea aumentar el tamaño de la imagen proyectada sin modificar las dimensiones de la sala y para lograrlo se cambia el objetivo del proyector. ¿Cómo ha de ser la distancia focal del nuevo objetivo: mayor o menor que la del anterior? ***R.: Menor***

18.- Con una lente convergente se obtiene una imagen real a 5 cm de la lente si el objeto está situado a 25 cm de la lente. Calcular la distancia focal imagen. ***R.: f' = 4,17 cm***

19. Se coloca un objeto a 36 cm de una pantalla.
a) ¿En qué puntos entre el objeto y la pantalla ha de colocarse una lente de 8 cm de distancia focal para obtener una imagen sobre la pantalla?
b) ¿Cuál es el aumento de la imagen para estas posiciones de la lente?
R.: a) A 12 cm y a 24 cm del objeto; b) **$\beta' = -2$; $\beta' = -1/2$.**

20.- Una lente tiene radios de 30 y 45 cm, e índice de refracción 1,45. Hallar:
a) La potencia de la lente bicóncava correspondiente, y su focal
b) La potencia de la lente biconvexa correspondiente, y su focal
R.: Bicóncava: P' = - 2,5 dptr f' = - 40 cm Biconvexa: P' = + 2,5 dptr f' = + 40 cm

21.- Una lente biconvexa delgada, de radios de curvatura iguales a 12 cm y de 8,33 dioptrías de potencia, proyecta sobre una pantalla una imagen de tamaño 20 veces mayor que el del objeto. Determinar a qué distancia de la lente es necesario colocar el objeto y la pantalla, así como el índice de refracción de la lente.
R.: El objeto a 12,6 cm y la pantalla a 2,52 m; n = 1,5

22.- A una lente delgada biconvexa de radios 20 y 25 cm e índice de refracción 1,4 se le pega por detrás una lente delgada bicóncava de radios 25 y 30 cm e índice 1,6. Hallar la focal del doblete óptico formado.

Y hallar la posición y naturaleza de la imagen de un objeto situado a 1,5 m por delante del doblete.

R.: Focal f' = - 1,25 metros.- La imagen se sitúa a 68 cm por delante del doblete; es directa, virtual y de menor tamaño (β' = 0,45)

23.- Una lente biconvexa delgada, cuyas caras tienen radios de curvatura de 20 cm, está situada a 25 cm de una pantalla. Si lleva acoplada una lente planocóncava, de índice de refracción 1.5, el sistema forma sobre la pantalla la imagen del infinito del eje. Si se quita la segunda lente, para que la imagen se siga formando en la pantalla es necesario aproximar ésta 8.34 cm. Calcular el índice de refracción de la primera lente, las potencias de ambas lentes y el radio de curvatura de la cara cóncava de la segunda.

R.: n = 1.6 P'_1 = 6 dioptrías; P'_2= -2 dioptrías ; r = 25 cm

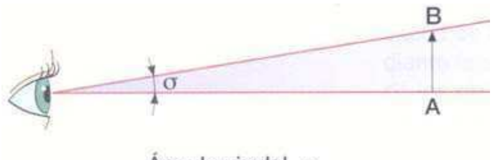
B.- INSTRUMENTOS ÓPTICOS

Las lentes y espejos, estudiados en el apartado anterior, son elementos fundamentales para la creación de sistemas ópticos más complejos, de gran utilidad para la observación visual, captura de imágenes, o transformación de éstas: son los ***instrumentos ópticos***.

Según la naturaleza de la imagen que producen, se pueden clasificar en:

a) **Instrumentos de proyección**: forman una **imagen real** sobre un receptor.
- El ***ojo***, que forma en la retina imágenes reales de objetos exteriores.
- La ***cámara fotográfica***. Forma imágenes reales sobre placas fotográficas, que son superficies con una emulsión fotosensible, o sobre fotosensores digitales.
- El ***aparato de proyección***, que proporciona imágenes reales de objetos pequeños sobre una pantalla.

b) **Instrumentos de observación**: son auxiliares del ojo (o de otros sistemas receptores de información óptica), el cual entra a formar parte del sistema completo, como parte última. Estos instrumentos producen una **imagen virtual**, la cual es observada, tras ellos, por el ojo. Pueden ser:
- ***Instrumentos de visión cercana***, que tiene por misión proporcionar la observación de objetos cercanos bajo ángulos visuales mayores que a simple vista. Son fundamentalmente: la *lupa* y el *microscopio* .
- ***Instrumentos de visión lejana***. Con ellos se observan objetos de grandes dimensiones, pero lejanos. El ángulo subtendido por un objeto lejano con el ojo (ángulo visual σ) es pequeño; pues bien, el instrumento óptico permite ver dicho objeto bajo un ángulo visual σ' mayor.
  Los más importantes son: el *anteojo astronómico*, el anteojo terrestre (catalejo), el anteojo de Galileo (gemelos), los prismáticos y el telescopio.

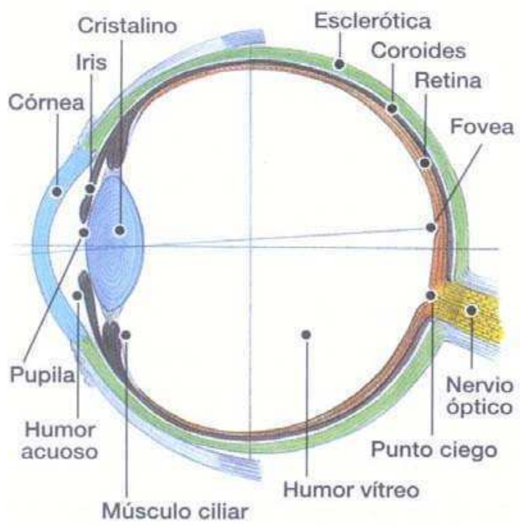


Ángulo visual, σ.

3.- EL OJO HUMANO

El ojo humano es un sistema óptico constituido por un conjunto de medios transparentes que forman sobre la retina una imagen real e invertida de los objetos.

La forma del ojo es aproximadamente esférica, con un diámetro aproximado de 2,5 cm. Su pared está formada por tres capas concéntricas, que son:



+ La ***esclerótica***, la más exterior, de color blanco, que en su parte anterior forma un casquete transparente, llamada ***córnea***.

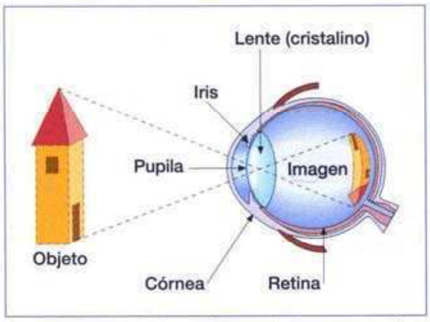
+ La ***coroides***, capa intermedia de color oscuro. Frente a la córnea se aplana, formando el ***iris***, que es una especie de disco de colores variados, en cuyo centro posee un orificio de abertura variable, llamado ***pupila***, a través del cual penetra la luz en el interior del ojo.

+ La ***retina***, que es la capa más interna en la que se encuentran las células receptoras de la luz - *conos* y *bastones* -, las cuales transmiten la información al cerebro por medio del ***nervio óptico***. En el punto de la retina situado detrás de la pupila existe una región llamada *mancha amarilla* en la que la visión es mucho más aguda; mientras que en el punto por donde el nervio óptico entra en el ojo no existen conos ni bastones, por lo que las imágenes que se formen en dicho punto no resultan visibles, denominándose por esta razón *punto ciego*.

Detrás del iris se encuentra el ***cristalino***, que es una lente biconvexa con un índice de refracción variable, desde 1.41 en el centro hasta 1.38 en la periferia; sus radios de curvatura, en reposo, son para un ojo normal r_1 = 10 mm y r_2 = - 6 mm. Esta curvatura puede ser modificada mediante la acción de los llamados *músculos ciliares*, para así permitir la visión de los objetos próximos y lejanos *(acomodación).*

El *humor vítreo* y el *acuoso*, de índice de refracción 1.336 (muy semejante al del agua) rellenan, respectivamente, los espacios del globo ocular situados detrás y delante del cristalino.

La luz penetra en el ojo a través de la córnea, encargándose el cristalino de enfocarla sobre la retina, donde se forman las imágenes de los objetos. Si todos los elementos constituyentes del ojo fuesen rígidos, habría una única distancia objeto para la cual se formaría una imagen nítida sobre la retina. Sin embargo, en la práctica el ojo normal puede enfocar con nitidez cualquier objeto situado entre el infinito (*punto remoto*) y unos 25 cm del ojo (*punto próximo*), lo que resulta posible gracias al proceso de ***acomodación*** antes mencionado.



En la retina del ojo se forma la imagen real e invertida de los objetos.

Con la edad el cristalino va perdiendo flexibilidad, y el alcance de la acomodación disminuye, alejándose el punto próximo del ojo. Este alejamiento del punto próximo con la edad se denomina presbicia o vista cansada, y no se trata realmente de un defecto de la visión, ya que se produce en la misma proporción en todas las personas. La presbicia, al igual que el defecto llamado hipermetropía, se corrige con lentes convergentes.

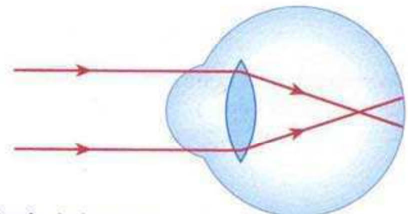
DEFECTOS DE LA VISIÓN

El ojo es un sistema óptico en el que la relación entre sus diversas partes no siempre es la correcta. Esto da lugar a una serie de defectos de funcionamiento que se traducen en una variación del intervalo de acomodación.

El ojo normal (*emétrope*) forma sobre la retina la imagen de un objeto situado en el infinito. Pero si no puede situar dicha imagen en ella, sino delante, se dice que el ojo es *miope*. Si la forma detrás, el ojo es *hipermétrope*.

a) Miopía

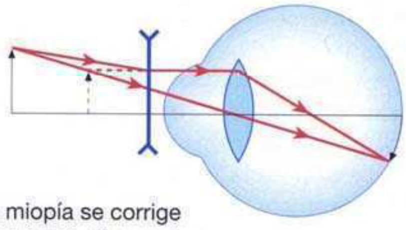
La miopía puede deberse o a que el globo ocular es demasiado largo comparado con el radio de curvatura de la córnea o a que el cristalino es excesivamente convergente; en cualquier caso, la imagen de un objeto situado en el infinito se forma delante de la retina.



Miopía: la imagen se forma delante de la retina.

El punto remoto del ojo se acerca y los objetos lejanos se ven borrosos. Por regla general, el punto próximo de un ojo miope también se encuentra más cercano que lo que corresponde a una persona con vista normal, pudiendo llegar a ser de sólo 5 cm.

La miopía se corrige mediante el uso de *lentes divergentes* que formen la imagen de objetos lejanos a una distancia del ojo no superior al punto remoto, es decir, tales que su foco imagen coincida con el punto remoto del ojo. De esta manera se consigue que los rayos paralelos al eje y procedentes del infinito entren en el ojo, tras refractarse en la lente, como si procedieran del punto remoto.



La miopía se corrige con lentes divergentes.

Como ejemplo, un problema.-

El punto remoto de un ojo miope se encuentra situado a 50 cm por delante del mismo. ¿Cuál ha de ser la potencia de la lente necesaria para corregir la miopía?

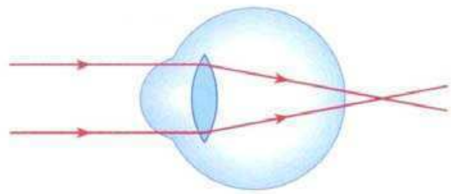
Se supone que la imagen de los objetos situados en el infinito se forma en el punto remoto del ojo. Por tanto, s = ∞ y s' = - 50 cm

$$-\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{-50}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = -50\text{ cm} = -0.5\text{ m} \quad \Rightarrow \quad P' = 1/f' = -2\text{ dioptrías}$$

⇒ la lente ha de ser divergente, de –2 dioptrías.

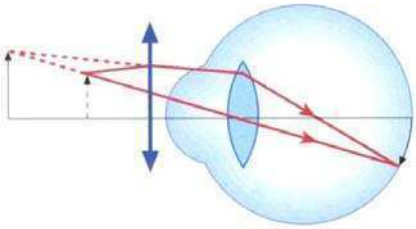
b) Hipermetropía

Es el defecto opuesto a la miopía. Se debe a que el globo del ocular es demasiado corto, o bien el radio de curvatura de la córnea es demasiado elevado, o también porque el cristalino no es suficientemente convergente. En consecuencia, la imagen de un objeto situado en el infinito se forma sin acomodación detrás de la retina.



Hipermetropía: la imagen se forma detrás de la retina.

Por la misma razón, el punto próximo del ojo hipermétrope se encuentra más lejos de lo normal. De esta forma, los objetos lejanos se ven perfectamente con acomodación, pero para la visión de los objetos próximos es necesaria la utilización de *lentes convergentes* tales que formen la imagen del objeto en el punto próximo o más allá de él.



La hipermetropía se corrige con lentes convergentes.

Como ejemplo, un problema.-

El punto próximo de un ojo hipermétrope se encuentra situado a 1 m por delante del mismo. Si se desea leer colocando el libro a 25 cm de distancia, ¿cuál ha de ser la potencia de la lente necesaria para conseguirlo?

La lente ha de formar la imagen de un objeto situado a 25 cm del ojo a una distancia de 1 m. Por tanto se debe verificar: objeto (libro), s = - 25 cm; imagen, s' = - 100 cm.

Aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas, resulta:

$$-\frac{1}{-25}+\frac{1}{-100}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = 33.33 \text{ cm} = \frac{1}{3}\text{ m} \quad \Rightarrow \quad P' = \frac{1}{f'} = 3 \text{ dioptrías}$$

$\Rightarrow$ la lente tiene que ser convergente, de + 3 dioptrías.

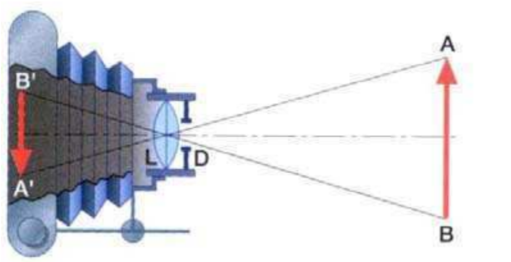
c) __Astigmatismo__

Es un defecto debido a la falta de esfericidad de las superficies que limitan los diversos medios refringentes del ojo, en especial la córnea. Éstas no son perfectamente esféricas, sino que tienen una curvatura mayor en un plano axial que en otro. Se pone de manifiesto en que no se pueden ver simultáneamente y con claridad dos rectas perpendiculares situadas en el mismo plano frontal.

El astigmatismo se corrige mediante *<u>lentes cilíndricas</u>* de convergencia adecuada.

4.- LA CÁMARA FOTOGRÁFICA

La cámara fotográfica está constituida, a grandes rasgos, por un sistema convergente de lentes que recibe el nombre de ***<u>objetivo</u>***, situada en el interior de una estructura de paredes opacas (***<u>cámara</u>*** oscura). La longitud de esta cámara puede variar para conseguir el *<u>«enfoque»</u>* de los diversos objetos AB, de manera que su imagen correspondiente A'B' (real e invertida) se forme en el plano posterior, donde se coloca una placa o ***<u>película fotosensible.</u>***



Marcha de los rayos en una cámara fotográfica.

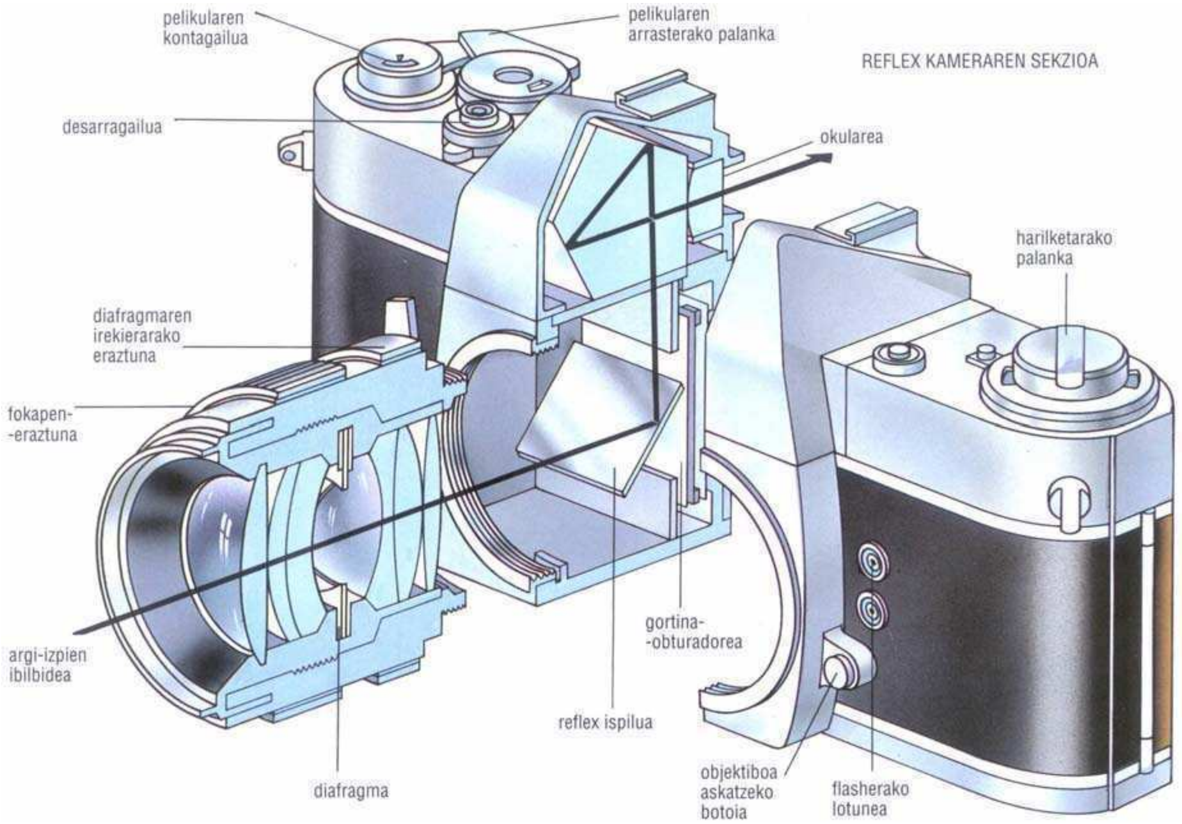
El cono luminoso que atraviesa el objetivo se regula por medio del *<u>diafragma</u>* D, que es una pantalla opaca provista de un orificio de diámetro variable.

Se llama *<u>tiempo de exposición</u>* el intervalo durante el cual permanece abierto el orificio del diafragma, una vez que se ha «disparado» su mecanismo de apertura u obturador

La ***<u>iluminación</u>*** de la imagen se puede regular modificando el *<u>tiempo de exposición</u>* o la *<u>apertura del diafragma</u>*, de modo que se pueden conseguir niveles de iluminación semejantes con grandes aperturas de diafragma y tiempos de exposición pequeños, o con pequeñas aperturas y exposiciones largas.

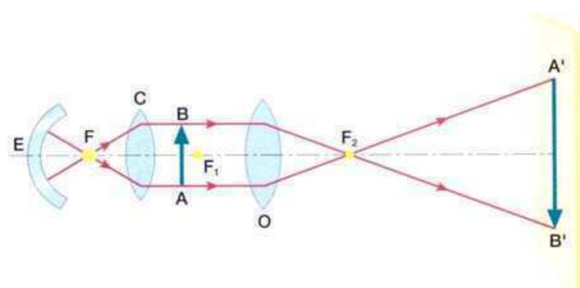
Sin embargo, hay que tener también en cuenta la propiedad llamada _profundidad de campo_ o **_profundidad de enfoque_**, consistente en el enfoque simultáneo de otros objetos situados a distancias diferentes del enfocado principal. Aunque esto resulta rigurosamente imposible, se puede obtener una nitidez aceptable en las fotografías eligiendo adecuadamente la abertura del diafragma.

La iluminación de la imagen es proporcional al cuadrado del diámetro del diafragma, mientras que *la profundidad de enfoque es tanto mayor cuanto menor es dicho diámetro.* Por tanto, hay que llegar a un compromiso entre ambas magnitudes, *abertura del diafragma y tiempo de exposición.* Hoy día, las cámaras fotográficas compactas resuelven dicho compromiso, regulando electrónicamente ambos factores de modo adecuado en cada caso concreto.



5.- EL APARATO DE PROYECCIÓN

Consta básicamente de una lente convergente u **_objetivo_**, O. El objeto que se va a proyectar (una diapositiva, por ejemplo) se sitúa entre el foco y el doble de la distancia focal, pues de esta manera se consigue una imagen real y de mayor tamaño. Pero como esta imagen es invertida con respecto al objeto, éste ha de colocarse en sentido contrario a como se le ha de observar, para que la imagen sea directa.



El _enfoque_ se consigue variando levemente la distancia objeto-objetivo, por desplazamiento del objetivo, acercándolo o alejándolo del objeto.

Como, en general, la distancia L de la pantalla al objetivo es grande en comparación con la distancia focal f', puede considerarse que el objeto se encuentra prácticamente en el foco de la lente y, por tanto, el aumento del aparato de proyección, que es la relación entre los tamaños de la imagen y del objeto, será igual a la relación entre la distancia de la pantalla al objetivo y su distancia focal (s' = L y s = - f'):

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \approx -\frac{L}{f'}$$

(signo – : imagen invertida)

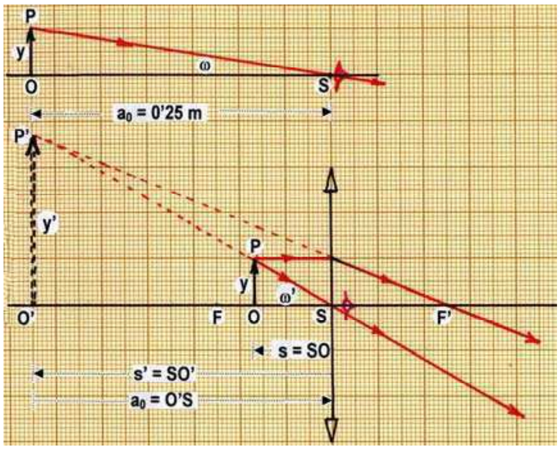
Para observar en buenas condiciones la imagen proyectada en la pantalla se requiere una gran iluminación, que se consigue mediante un ***foco luminoso*** potente (lámpara de incandescencia, F) y un ***condensador*** C (lente convergente en cuyo foco se sitúa el foco luminoso); para aprovechar al máximo la luz se coloca detrás del foco un ***espejo*** cóncavo, E, centrado en el foco luminoso).

6.- LA LUPA

Es el instrumento óptico más sencillo: es una lente convergente. Tiene como misión proporcionar al ojo una imagen virtual y directa de un objeto cercano que se vea bajo un ángulo mayor que el correspondiente a la visión sin la lente. Para ello es necesario que el objeto se coloque entre el foco objeto y la lente, pues sólo así la imagen resulta virtual y directa.

Como para todos los instrumentos auxiliares de ojo, el *aumento visual,* o simplemente ***aumento***, se define por el cociente entre las tangentes de los ángulos bajo los cuales se ve el objeto con y sin instrumento (figura):

$$A \equiv \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega}$$



+ ***Imagen en el punto próximo:***

Cuando queremos observar un objeto cercano sin ningún instrumento auxiliar y queremos obtener de él la mayor cantidad de información, deberemos observarlo lo más cerca posible para que los detalles a captar subtiendan el mayor ángulo con el ojo. Pero esto tiene un límite, ya que más cerca del *punto próximo* no vemos con nitidez. Por ello, tomaremos como distancia de observación sin instrumento la *"distancia mínima de visión distinta"*. Para un ojo normal, se conviene en tomar, como tal distancia, a_0 = 0.25 m.

Para observar con la lupa en condiciones comparables, pongamos el mismo objeto *y = OP* en un punto O de modo que la imagen virtual *y' = O'P'* se forme en la posición s' = - a_0 = - 0.25 m respecto de la lupa. Si en estas condiciones suponemos el ojo inmediato a la lente junto al punto S, veremos la imagen *y'* bajo un ángulo ω'. De acuerdo con la figura anterior:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{OP}{OS} = \frac{y}{a_0} \qquad \operatorname{tg}\omega' = \frac{O'P'}{O'S} = \frac{OP}{OS} = \frac{OP}{-SO} = \frac{y}{-s} = -\frac{y}{s}$$

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{s} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{f'} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{s} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{f'}$$

Sustituyendo en la fórmula que define el aumento de la lupa:

$$A \equiv \frac{tg\,\omega'}{tg\,\omega} = \frac{-y/s}{y/a_0} = -\frac{a_0}{s} = a_0\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{f'}\right) = 1 + \frac{a_0}{f'} \rightarrow \boxed{A = 1 + \frac{0.25}{f'} = 1 + P'/4}$$

en donde recordamos que P'= 1/f' es la potencia de la lente, y ha de expresarse en dioptrías.

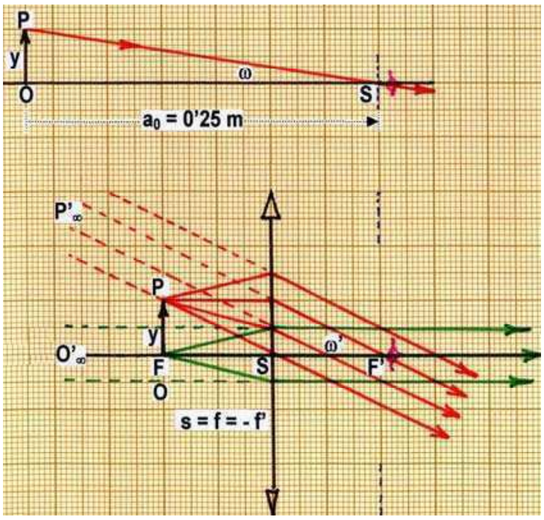
+ ***Imagen en el punto remoto (en el ∞):***

Otro modo de mirar con lupa es fijar la posición del objeto sobre su foco anterior, de modo que entonces la imagen virtual se forme en el infinito, con lo que el ojo normal la ve sin acomodación. En este caso los rayos procedentes del extremo P del objeto salen paralelos entre sí, formando un ángulo común con el eje, ω', tal que:

$$tg\,\omega' = \frac{FP}{FS} = \frac{FP}{-SF} = \frac{y}{-f} = \frac{y}{f'}$$

En este caso, el aumento se denomina *aumento comercial* de la lupa, y su valor es:

$$A_c \equiv \frac{tg\,\omega'}{tg\,\omega} = \frac{y/f'}{y/a_0} = \frac{a_0}{f'} \rightarrow \boxed{A_c = \frac{0.25}{f'} = P'/4}$$



Como vemos, según se sitúe la lupa al utilizarla, su aumento varía desde el valor A_c , para la visión sin acomodación, en el punto remoto, hasta el valor A para la visión a la mínima distancia de visión distinta, en el punto próximo, verificándose que $A = A_c + 1$.

Nótese que las lentes convergentes para que puedan ser utilizadas como lupas requieren tener al menos cuatro dioptrías de convergencia. En efecto, A_c debe ser mayor que la unidad para que ω' > ω, y pueda obtenerse una imagen mayor que el objeto.

Entonces: $A_c = P'/4 > 1 \Rightarrow P' > 4$ dioptrías.

7.- EL MICROSCOPIO

El microscopio consta de tres partes esenciales: ***sistema de iluminación***, ***objetivo*** y ***ocular***. El sistema de iluminación está formado por una lámpara y una lente-condensador para iluminar fuertemente la preparación a observar. No hablaremos de este sistema.

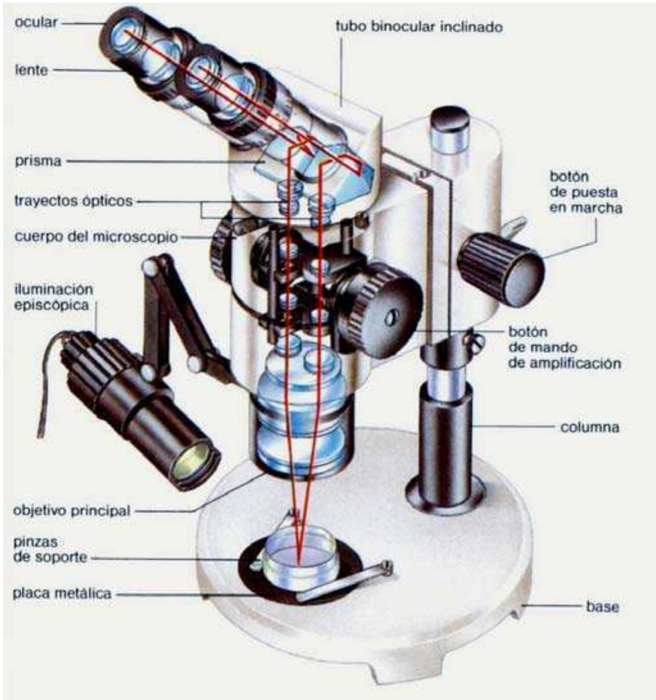
Los objetivos y los oculares de un microscopio son sistemas convergentes, muy complejos; un estudio elemental los sustituye por dos lentes convergentes, que llamaremos asimismo objetivo y ocular del microscopio.

El papel del objetivo es obtener de un objeto muy pequeño una imagen real muy grande, que luego ha de ser observada a través del ocular, que actúa como una lupa. Véanse las figuras.

La distancia $\Delta \equiv F'_1 F_2$ (distancia entre el foco imagen del objetivo y el foco objeto del ocular) se denomina ***intervalo óptico*** del microscopio. Suele ser constante, e igual a 16 cm para la mayoría de los fabricantes

Observación: El objeto y_1 debidamente iluminado se sitúa delante del objetivo, y algo más alejado que su foco F_1.

El objetivo produce una imagen real y'_1 que es observada a través del ocular, al modo como una lupa observa un objeto: y'_1 es pues igual a y_2, y su imagen y'_2 será virtual. La observación por el ocular puede ser como señala la figura 1, o bien (como suele ser más común) situando y'_2 en el infinito, con lo cual el ojo no necesita esfuerzo de acomodación por lo que puede observar durante largo tiempo sin fatiga (figura 2).

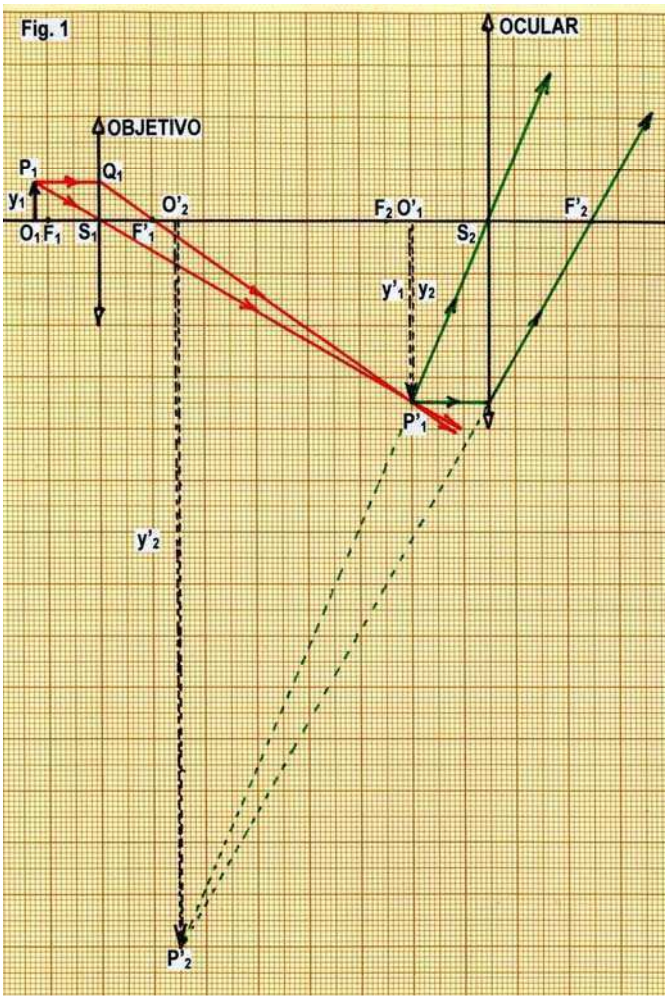


Aumento: Funcionando el microscopio en las condiciones dichas en segundo lugar, el aumento total del microscopio será:

$$A = \beta'_{0bj}\,\beta'_{oc} = \beta'_{obj}\,A_c = \frac{y'_1}{y_1}\frac{0.25}{f'_2}$$

Teniendo en cuenta las igualdades

$S_1Q_1 = y_1$ $S_1F'_1 = f'_1$ $F_2P'_1 = y'_1$ $F_2F'_1 = -\Delta$



y que los triángulos $Q_1S_1F'_1$ y $P'_1F_2F'_1$ son semejantes, resulta:

$$\beta'_{obj} = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{F_2F'_1}{S_1F'_1} = \frac{-\Delta}{f'_1}$$

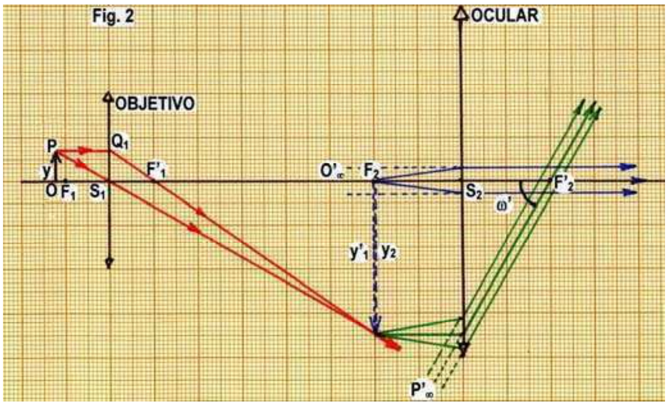
Y sustituyendo arriba (llamando previamente $f'_1 = f'_{obj} = 1/P'_{obj}$ y $f'_2 = f'_{oc} = 1/P'_{oc}$), se llega a:

$$\boxed{A = -\frac{\Delta}{f'_{obj}}\frac{0.25}{f'_{oc}} = -0.25\,\Delta\;P'_{obj}\,P'_{oc}}$$

El signo menos señala que la imagen proporcionada por el microscopio es invertida, lo cual carece de importancia.

El valor numérico del factor Δ/f'_{obj} suele estar inscrito en los objetivos, seguido por un aspa, y el del factor $0.25/f'_{oc}$ lo está en los oculares precedido del mismo signo. Un microscopio con un objetivo de 50x y un ocular de x10 opera con 500 aumentos. El aumento lateral de los objetivos varía entre 1 y 500, y el de los oculares entre 1 y 20, aproximadamente.

+ _Enfoque:_ La distancia objetivo-ocular en un microscopio es constante. Por tanto, para enfocar el objeto iluminado se debe desplazar mediante una cremallera el cuerpo completo del microscopio, variando su distancia O_1F_1 al objeto. Estos movimientos siempre son muy finos, para un enfoque perfecto, por lo que también los microscopios suelen llevar un tornillo micrométrico de avance muy lento para el afinado del enfoque.

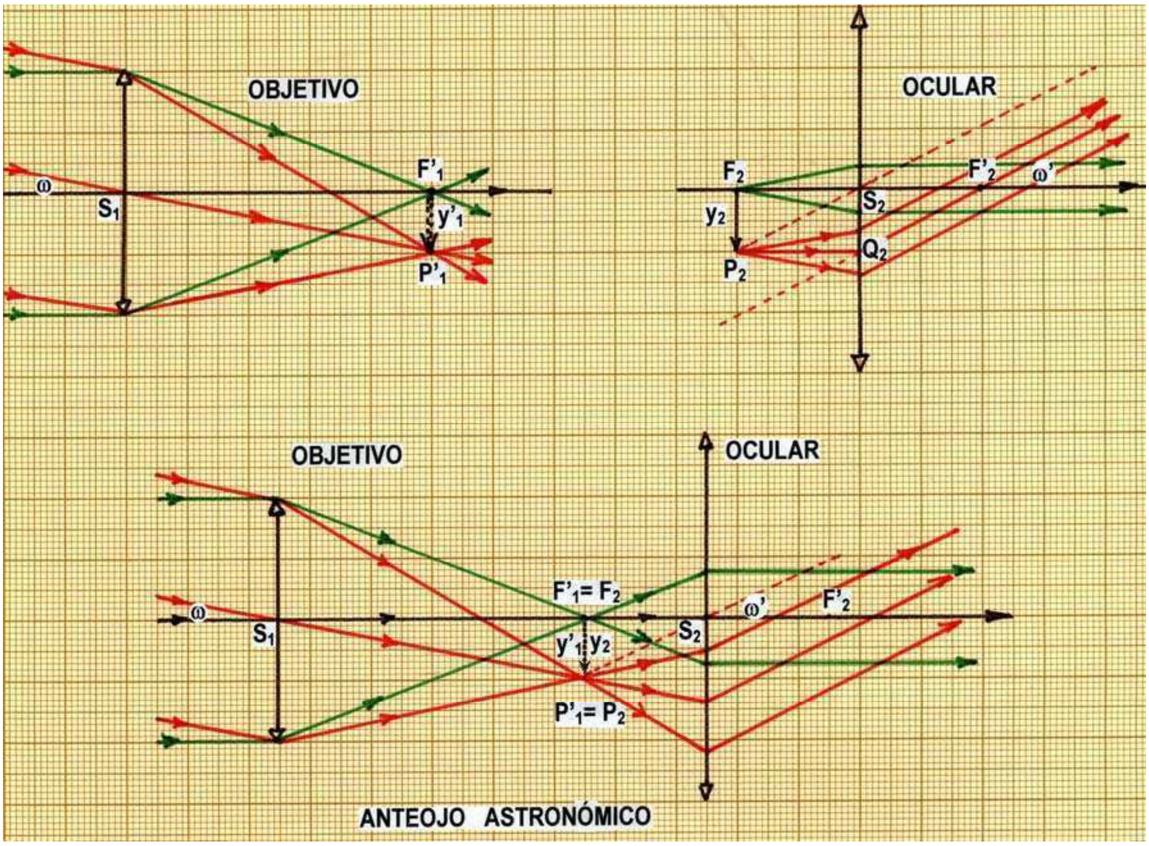


8.- EL ANTEOJO ASTRONÓMICO

El anteojo astronómico consta de dos sistemas convergentes, que en nuestro estudio elemental van a ser sustituidos por dos lentes convergentes:

+ **_el objetivo_**: recibe los rayos procedentes de un objeto lejano (en el infinito), por ejemplo, la luna, el firmamento..., y forma en su plano focal imagen una imagen real e invertida.

+ **_el ocular_**: la imagen dada por el objetivo se sitúa en el plano focal objeto del ocular, que actuando como una lupa, proporciona una imagen virtual, situada en el infinito, para ser observada por el ojo.



+ *Observación:* El conjunto de ambos sistemas (figura inferior) se acopla de modo que coincidan el foco imagen del objetivo con el foco objeto del ocular. De este modo, un objeto real en el infinito, que subtiende con el observador un ángulo visual ω, es visto por el ojo bajo un ángulo ω', mayor, procedente de una imagen virtual e invertida.

+ *Aumento:* El aumento producido por el anteojo es, como en casos anteriores:

$$A \equiv \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega}$$

Según la figura: $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{F'_1P'_1}{F'_1S_1} = \dfrac{F'_1P'_1}{-S_1F'_1} = \dfrac{y'_1}{-f'_1} = -\dfrac{y_2}{f'_1}$ $\qquad \operatorname{tg}\omega' = \dfrac{F_2P_2}{F_2S_2} = \dfrac{F_2P_2}{-S_2F_2} = \dfrac{y_2}{-f_2} = \dfrac{y_2}{f'_2}$

teniendo en cuenta que $y'_1 = F'_1P'_1 = F_2P_2 = y_2$. Por tanto.

$$A \equiv \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega} = \frac{-y_2/f'_2}{y_2/f'_1} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A \equiv -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} = -\frac{P'_{oc}}{P'_{obj}}}$$

donde se ha tomado $f'_1 = f'_{obj} = 1/P'_{obj}$ y $f'_2 = f'_{oc} = 1/P'_{oc}$.

Vemos que el aumento es negativo, como cabe esperar del hecho, gráficamente comprobado, de que el anteojo invierte las imágenes. Esto carece de importancia al observar estrellas, pero no así en la observación de objetos terrestres.

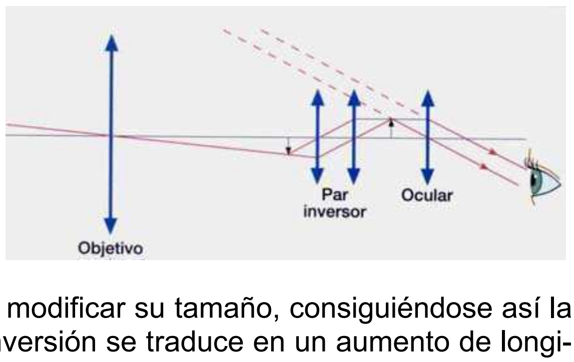
+ *Enfoque:* Teóricamente, el anteojo astronómico está enfocado. Pero ello sólo para objetos en el infinito y observación con ojo normal. En caso contrario (objeto no tan lejano y ojo no emétrope) será preciso buscar el mejor enfoque para cada situación; para conseguirlo, el ocular puede ser desplazado ligeramente en el tubo del anteojo.

9.- LOS ANTEOJOS TERRESTRES

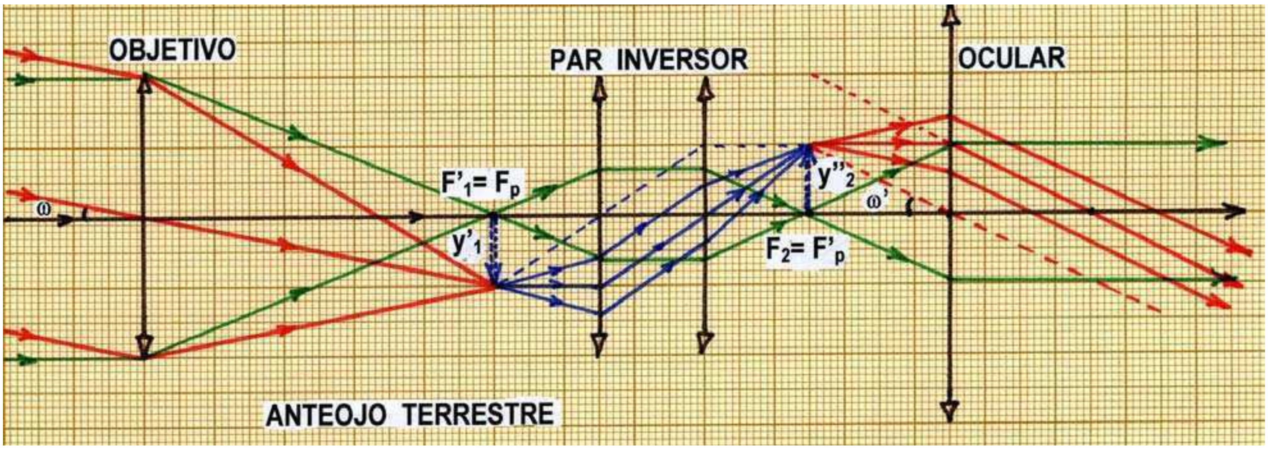
El anteojo astronómico produce imágenes invertidas. Por ello, no resulta apropiado para la observación de objetos terrestres, de los cuales conviene que la imagen sea directa. Hay diversas formas de invertir la imagen dada por el anteojo astronómico, con el fin de obtener una imagen final directa, las cuales dan lugar a otros tantos instrumentos de observación terrestre.

A.- ANTEOJO TERRESTRE (Catalejo).-

Lleva incorporado entre el objetivo y el ocular un ***par inversor*** consistente en un conjunto de dos lentes convergentes de igual distancia focal, tales que cada una de ellas está colocada en el foco de la otra.



Este par modifica la orientación de la imagen sin modificar su tamaño, consiguiéndose así la visión directa del objeto observado. Este proceso de inversión se traduce en un aumento de longitud del tubo del catalejo, problema éste que se puede solucionar diseñando el dispositivo de manera que conste de varios tubos que pueden penetrar uno en otro, formando un conjunto plegable.

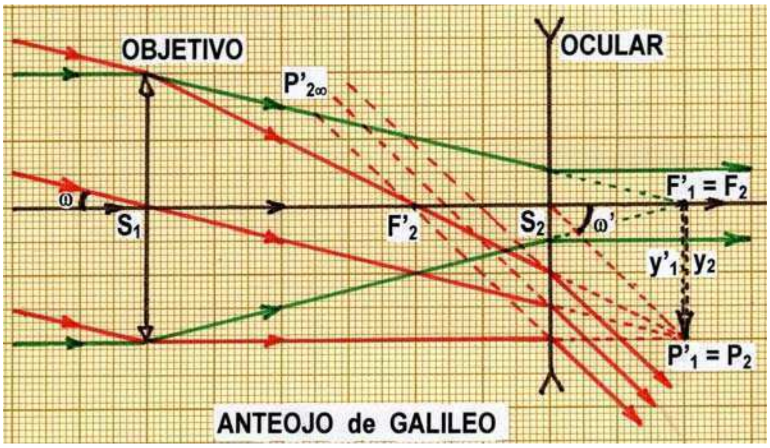


B.- ANTEOJO DE GALILEO (Gemelos de teatro).-

Utiliza como ocular una lente divergente, que produce una imagen virtual directa de la imagen real $y'_1 = y_2$ dada por el objetivo. Ésta última no llega a formarse, pues los rayos correspondientes son desviados por el ocular antes de que converjan.

Como el objeto está siempre muy alejado y los rayos que salen del ocular lo hacen prácticamente paralelos, el aumento del anteojo de Galileo viene dado por la misma expresión deducida para el anteojo astronómico:

$$\boxed{A \equiv -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} = -\frac{P'_{oc}}{P'_{obj}}}$$



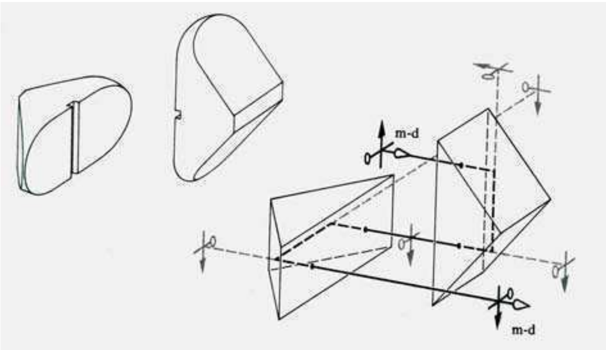
Este aumento es positivo, porque la focal y la potencia del ocular son negativas.

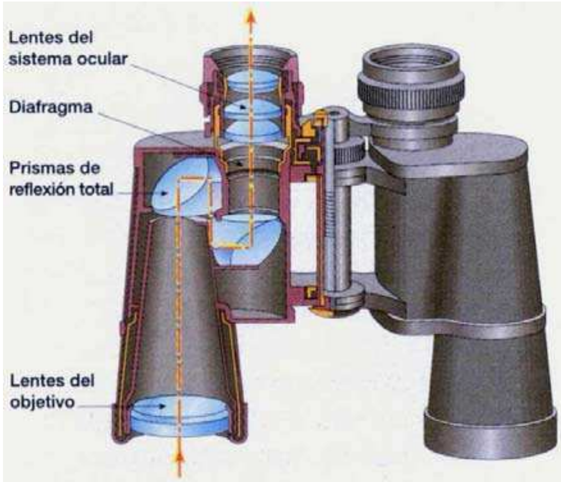
La longitud de este anteojo es relativamente pequeña debido a que los focos del ocular (lente divergente) están intercambiados, primero el foco imagen y más a la derecha el foco objeto, como se puede observar en la figura.

Sin embargo, su aumento es muy pequeño y sus aberraciones difíciles de corregir. Por este motivo, su uso se encuentra limitado en la actualidad a los llamados gemelos de teatro. Se llaman así por estar constituidos por dos anteojos de Galileo iguales y paralelos, con los que se consigue la visión binocular. La corta longitud del tubo (unos 10 cm) hace que el aumento sea pequeño, compensándose este defecto por su gran claridad.

C.- LOS PRISMÁTICOS.-

Los prismáticos consiguen la inversión de la imagen por medio de cuatro reflexiones que tienen lugar en dos prismas de reflexión total colocados entre el objetivo y el ocular, cruzados entre sí, como señala la figura. Como los rayos tienen un recorrido mayor, se logra reducir la longitud del tubo sin disminuir la longitud óptica; por lo tanto, puede utilizarse un objetivo de distancia focal muy grande, con el consiguiente incremento del aumento del anteojo.





Si se unen dos prismáticos simétricos para la visión binocular se obtienen los llamados gemelos prismáticos, que tienen la ventaja de que, por estar más separados los objetivos que los oculares, se favorece el efecto estereoscópico, consiguiéndose así mayor sensación de relieve. Esta modificación del anteojo astronómico fue ideada por Porro, por lo que el anteojo prismático se conoce también con el nombre de *anteojo de Porro.*

Los prismáticos de uso corriente se suelen especificar con dos números separados por un aspa. Es un error creer que su aumento venga dado por el producto de ambos números. El primero de ellos es el aumento, y el segundo es el diámetro del objetivo, en mm. Los tipos más usuales son: 4x20, 6x30, 8x30, 7x50, 12x60, ... Es importante el conocimiento de ambas especificaciones a la hora de elegir instrumento para hacer una observación determinada, si se tiene en cuenta que la iluminación de la imagen obtenida es tanto mayor cuanto mayor es el segundo número. Por ejemplo, para visión diurna bastaría unos prismáticos 4x20. Sin embargo, éstos darían imágenes pobremente iluminadas en visión nocturna, para la que iría mejor un 7x50.

10.- LOS TELESCOPIOS

Reciben este nombre aquellos instrumentos astronómicos cuyo objetivo, en vez de ser una lente convergente, está constituido por un espejo cóncavo, esférico o parabólico, construido de vidrio plateado o aluminado. Este espejo forma una imagen real de los objetos lejanos, la cual es observada luego por el ocular.

Existen distintos tipos de telescopios reflectores, cuyo diseño esquemático, así como la marcha de los rayos luminosos, se puede apreciar en las figuras que concluyen esta exposición.

Todos ellos presentan múltiples ventajas, entre las que se pueden citar las siguientes:

+ Mientras que una lente debe ser transparente y estar libre de burbujas internas, ha de tener un índice de refracción muy constante, etc... tal problema no existe en el caso de un espejo.

+ Mientras que en el caso de una lente se han de pulir dos superficies con la precisión mayor posible, en el caso de un espejo sólo se ha de pulir una superficie.

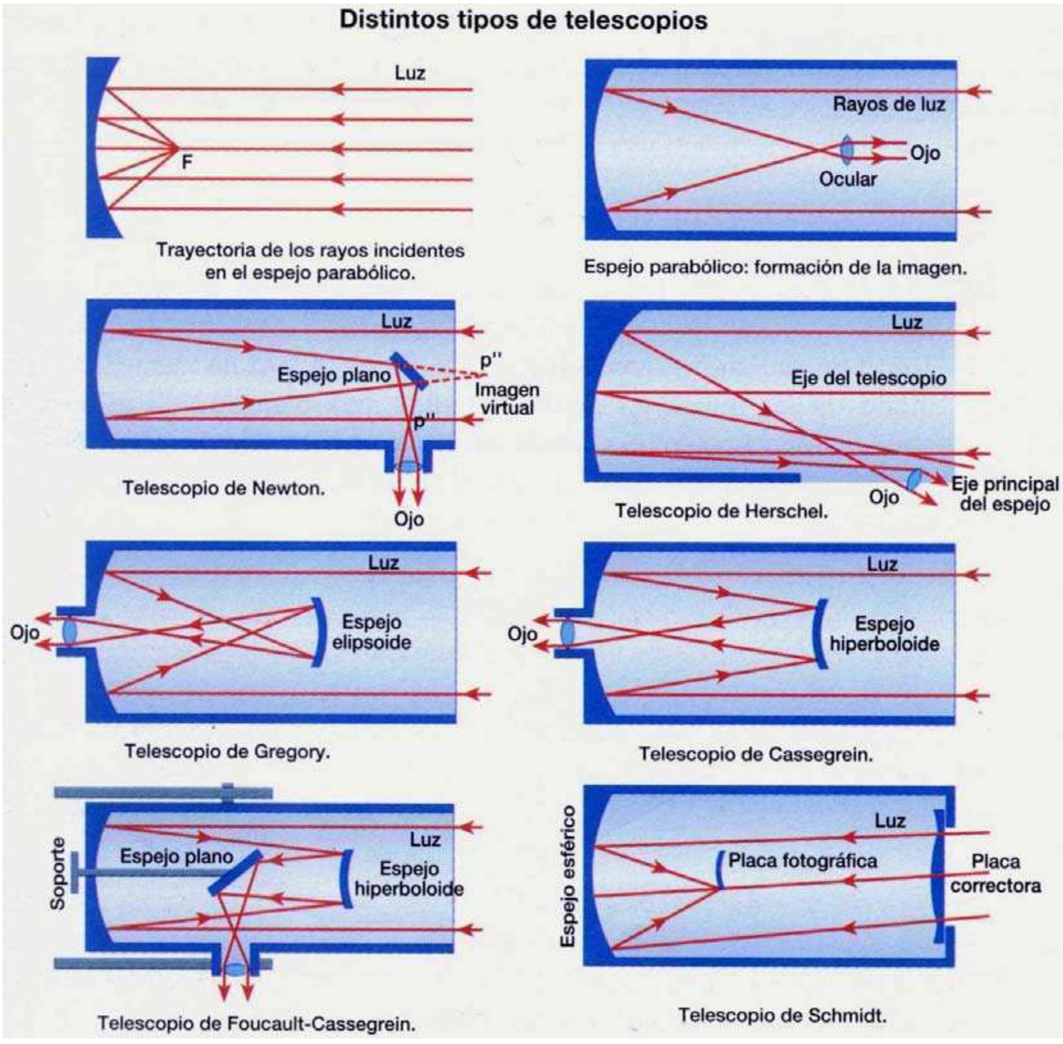
+ Las imágenes formadas no se ven afectadas de aberración cromática.

+ El tamaño de los espejos puede ser mucho mayor que el de las lentes, pues mientras éstas han de ser apoyadas sólo por su periferia, los espejos se apoyan haciendo uso de su cara posterior. Así, el instrumento refractor más grande es el telescopio de 40 pulgadas de Yekes en Williams Bay, Wisconsin, mientras que el reflector en el Monte Palomar, EE.UU., tiene 200 pulgadas de diámetro. Y en el Observatorio de Crimea (Ukrania) se dispone de un reflector de 236 pulgadas.

+ Debido al gran tamaño del espejo, pueden captar una gran cantidad de luz, concentrándola en el foco, lo que permite fotografiar con larga exposición estrellas que resultan invisibles incluso a través del telescopio.

+ Son más manejables y económicamente mucho menos costosos que los anteojos astronómicos (refractores).

Así pues, los telescopios reflectores predominan en todos los casos de telescopios grandes.



ACTIVIDADES DESARROLLADAS

1.- Un ojo miope tiene el punto remoto a 150 cm. ¿Qué lente habrá que colocar delante para que los rayos procedentes del infinito converjan en la retina del ojo?

El ojo emétrope o normal tiene su punto remoto en el infinito; su cristalino enfoca los rayos procedentes del infinito en la retina, sin acomodación.

El ojo del miope del problema tiene su punto remoto en s = - 150 cm. Los rayos procedentes de este punto el ojo miope los enfoca en la retina.

Hay que conseguir mediante una lente que los rayos procedentes del infinito se enfoquen en el punto remoto del miope; así luego su cristalino los enfocará en la retina, sin acomodación. Así pues la lente debe tener una focal tal que de un objeto situado en s = ∞ dé una imagen en s' = - 150 cm.

$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$ donde s = ∞ y s' = - 150 cm $\Rightarrow$ $-\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{-150}=\frac{1}{f'}$ $\Rightarrow$ f' = - 150 cm

$\Rightarrow$ P' = $\frac{1}{f'}=\frac{1}{-1{,}5}=-0{,}67$ dioptrías. Se precisa una lente divergente de 0,67 dioptrías

2.- Con una cámara fotográfica cuyo objetivo tiene 10 dioptrías se retrata a una persona situada a 2,10 m de distancia. ¿A qué distancia del centro óptico del objetivo debe colocarse la placa fotográfica? Si la persona tiene 1,70 m de estatura, ¿qué altura mínima debe tener la placa para formar una imagen de cuerpo entero?

El objetivo fotográfico es considerado como una lente delgada situada en su centro óptico. Esta lente verifica: f' = $\frac{1}{P'}=\frac{1}{10}=0{,}1$ m = 10 cm

Posición de la persona, s = - 210 cm. Posición de su imagen, s'.

Ecuación de las lentes delgadas: $-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$ Por tanto, sustituyendo resulta s' = 10,5 cm

$\Rightarrow$ La placa fotográfica hay que colocarla 10,5 cm detrás del centro óptico del objetivo.

Aumento lateral, $\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{10{,}5}{-210}=-0{,}05$ $\rightarrow$ y' = β' y = - 0,05x170 = - 8,5 cm

Prescindiendo del signo (cuyo significado es que la imagen es invertida), 8,5 cm representa el tamaño mínimo de la placa en vertical para que la persona salga en fotografía de cuerpo entero.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- A una persona que padece miopía el oftalmólogo le ha prescrito gafas de -2.50 dioptrías. ¿Cuál es el punto remoto de sus ojos?.- Si dicha persona utiliza gafas de -2.00 dioptrías, ¿cuál sería su máxima distancia de visión distinta***?*** ***R.: El punto remoto está a 40 cm delante de sus ojos.- Su máxima distancia de visión distinta es 50 cm.***

2.- Una persona de vista normal tiene un campo de acomodación desde 25 cm hasta el infinito. Si se coloca las gafas de un amigo que poseen una convergencia de +2 dioptrías, ¿entre qué distancias podrá ver claramente los objetos? R.: Entre 16.7 cm y 50 cm.

3.- ¿Qué gafas necesita para leer una persona cuyo punto próximo se encuentra a 200 cm?.- ¿Qué gafas precisa para «ver de lejos» una persona cuyo punto remoto está situado a 50 cm del ojo? ***R.: +3,5 dioptrías - 2 dioptrías***

4.- Al graduar la vista de una persona, el oftalmólogo extendió la receta adjunta. ¿Qué defectos visuales presenta ese paciente?

	Esférica	Cilíndrica	Eje
Ojo derecho	- 3.0	- 0.5	90º
Ojo izquierdo	- 3.5	- 1.0	125º

R.: Miopía y astigmatismo, en mayor medida en el ojo izquierdo que en el derecho.

5.- Para un observador cuyo punto próximo es de 25 cm, el aumento de un microscopio enfocado al infinito es 1250. Sabiendo que el ocular tiene una convergencia de 40 dioptrías y que la longitud del microscopio es 18'628 cm, calcular la focal del objetivo y el intervalo óptico del instrumento. ***R.:*** f'_{obj} ***= 1'28 mm*** Δ ***= 16 cm***

6.- Las distancias focales del objetivo y del ocular de un microscopio son, respectivamente, 1 cm y 0,8 cm, y la distancia entre ambas lentes es 17,8 cm. ¿Cuál es el aumento del microscopio? ***R.: A = - 500***

7.- Si cuando observamos con un anteojo todo el disco de la Luna tapamos la mitad del objetivo, ¿qué sucederá a la imagen? Razona tu contestación.
R.: La imagen se ve entera, pero con menos intensidad luminosa.

8.- En un anteojo de Galileo las distancias focales del objetivo y del ocular son 8 cm y - 2 cm, respectivamente. ¿Cuánto se debe desplazar el ocular para que de un objeto situado 2 m delante del objetivo se forme una imagen real sobre una placa situada a 30 cm de distancia del ocular? ***R.: d = 0,46 cm***

9. El objetivo de una cámara fotográfica barata es una lente delgada de 25 dioptrías de potencia. Con esta cámara queremos fotografiar a una persona de 1,75 m de estatura, situada a 1,5 m de la lente. a) ¿Cuál debe ser la distancia entre la lente y la película fotográfica?.- b) Si la película tiene una altura de 35 mm, ¿nos saldrá una foto «de cuerpo entero»?
R.: a) s'= 4'11 cm b) No.