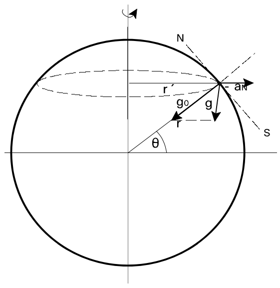
Cuestiones y problemas resueltos, Tema 1: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1. **CL-S96a) Razone cómo se puede obtener un valor de la aceleración de la gravedad g si se conoce la constante de Gravitación universal G, la masa de la Tierra y su radio.**
b)Realmente el valor así hallado es solo aproximado, pues varía con la latitud. Explique en base al mismo razonamiento del apartado anterior por qué sucede esto.
Respuesta:
a) La fuerza con la que la Tierra atrae a un cuerpo es, por definición, el peso de éste. Si se considera un cuerpo de masa *m* sobre la superficie de la Tierra, la fuerza que ejerce sobre él dirigida hacia el centro de la misma, vale, en módulo:

$$\left|\vec{F}\right| = m\left|\vec{g}_0\right| = \frac{GM_T m}{r_T^2} \Rightarrow \underline{\underline{\left|\vec{g}_0\right| = \frac{GM_T}{r_T^2}}}$$

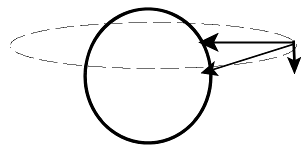
Se ha empleado el subíndice cero para la gravedad con el fin de indicar que se trata de la creada por la masa de la Tierra en un punto de su superficie

b) A la hora de medir la fuerza gravitatoria, DESDE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA, hay que considerar que nos encontramos en un sistema de referencia no inercial o acelerado de modo que mediremos la fuerza de inercia debida a la rotación terrestre. La gravedad medida es la resultante de la atracción gravitatoria y de la fuerza de inercia (ver gráfico). Como dicha fuerza de inercia depende de la latitud, también dependerá la gravedad medida.



2. **CLS02 Demuestre que el campo gravitatorio es un campo conservativo**
Ver teoría

3. **CLS03 ¿Qué se entiende por satélite geoestacionario?. ¿Sería posible colocar un satélite de este tipo en una órbita fuera del plano del ecuador terrestre?. Razone su respuesta**.
Respuesta:
Se llama satélite geoestacionario a aquel cuya órbita alrededor de la Tierra tiene un período igual al de rotación de la Tierra sobre su eje por lo que parece encontrarse fijo (estacionario) en relación a la Tierra.



NO es posible colocar un satélite en una órbita paralela a la del ecuador pues (ver figura) la componente del peso en dirección del radio de la órbita proporciona la fuerza centrípeta mientras que la componente normal (que no es nula) movería el satélite hacia la órbita ecuatorial en la que no existe esa componente al ser igual el peso a la fuerza centrípeta.

4. **BAL-J98¿Es posible que un satélite artificial describa una órbita circular alrededor de la Tierra si su velocidad es de 1 km/s? Razona la respuesta.**
Respuesta:
Cuando un cuerpo de masa *m* gira en órbita circular alrededor de otro de masa *M*, la fuerza de atracción gravitatoria nos proporciona la fuerza centrípeta. Se tiene, al particularizar al satélite y a la Tierra y operar:

$$\cancel{m_s}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_T \cancel{m_s}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow r = \frac{GM_T}{v^2}$$

, y siempre se obtiene un r no nulo para cada valor de v distinto de cero. Evidentemente, la velocidad debe de ser tal que el radio obtenido sea mayor que el terrestre (ya que no es admisible un radio menor al terrestre pues indicaría una órbita dentro de nuestro planeta). Si se sustituye y calcula en la igualdad anterior, operando, siempre, en el SI, resulta:

$$r = \frac{GM_T}{v^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{10^6} = 3,988 \times 10^8 \ \text{m}$$

,luego estaría en órbita a esa distancia del centro de la Tierra (es una órbita de radio algo mayor que el orbital de la luna. Es opinable la utilidad de un satélite artificial que orbite en esa distancia pero es posible. Desde luego , a esa distancia, ese satélite giraría alrededor de la Luna pero no se ha tomado en consideración su existencia en la respuesta dada, por cuanto no se dan datos de la misma.

5. **CL-J08 Velocidad de escape: definición y aplicación al caso de un cuerpo en la superficie terrestre**.
Respuesta:
Se entiende por velocidad de escape la mínima velocidad que hay que comunicar a un cuerpo (al que se supone inicialmente en reposo respecto al cuerpo del para astro que lo atrae gravitatoriamente) para alejarse "infinitamente" de él, es decir; para dejar de notar su atracción gravitatoria A partir de la definición se tiene:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}m_s\left|\vec{v}_e\right|^2}^{E_c\ \text{inicial} = \text{la que se le suministra}} + \overbrace{\left(-\frac{GM_T m_s}{r_T}\right)}^{E_p\ \text{inicial}}}_{E_M\ \text{en el instante del lanzamiento}} = \underbrace{\overbrace{E_{cf}}^{0} + \overbrace{E_{pf}}^{0}}_{E_M\ \text{final}} = 0 \rightarrow \left|\vec{v}_e\right| =$$

$$= \left|\vec{v}_e\right| = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,67.10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \times 5,98.10^{24}\text{kg}}{6,37.10^6\text{m}}} =$$

$$= 11190,7\text{ms}^{-1}$$

Hay que observar que la energía potencial final es nula por cuanto el cuerpo se ha separado “infinitamente” de la Tierra mientras que la energía cinética tiene que se nula pues si no lo fuera pudo lanzarse con una velocidad menor para alejarlo, contra la definición de “mínima velocidad...”

6. **CL-S97 En un satélite, que se mueve alrededor de la Tierra, un tornillo se va aflojando, y termina por desprenderse del satélite. Despreciando posibles resistencias atmosféricas, ¿cuál será el comportamiento dinámico de ese tornillo suelto? Razone la respuesta.**
Respuesta:
Seguiría girando alrededor de la Tierra igual que si no se hubiese desprendido pues al no existir rozamientos mantiene la energía mecánica que tiene y ésta depende del radio orbital, como sabemos :

$$\underline{\underline{E_M}} = Ec + Ep = \frac{GM_p m_s}{2r} + \left(-\frac{GM_p m_s}{r}\right) = \underline{\underline{-\frac{GM_p m_s}{2r}}}$$

,luego sigue orbitando a la misma distancia que antes de desprenderse. Además como la velocidad orbital depende del radio:

$$\cancel{m}_s \frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_T \cancel{m}_s}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

, como éste no varía, tampoco lo hará la velocidad del tornillo con lo que éste seguirá en reposo respecto a la nave

7. **CL-J05 Enuncie las leyes de Kepler**
Ver teoría

8. **CL-S01 Demuestre que la variación de la energía potencial de una partícula de masa m entre dos puntos, uno de los cuales está en la superficie de la Tierra y el otro a una altura h ($h << R_{Tierra}$), viene dada por: $\Delta E_p =$ m.g.h.**
Respuesta:
Se va a calcular APROXIMADAMENTE, la variación de energía potencial gravitatoria cuando un cuerpo asciende desde la superficie de la Tierra a un punto situado a una altura *h* sobre la misma, tal que $h << R_{Tierra}$, según impone el enunciado.

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = -\frac{GM_Tm}{R_T+h} - \left(-\frac{GM_Tm}{R_T}\right) = GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) =$$

$$\underbrace{= GM_Tm\frac{h}{R_T\left(R_T+h\right)} \simeq GM_Tm\frac{h}{R_T^2}}_{\text{Al ser } h<<<R_T \to R_T+h \simeq R_T \to R_T(R_T+h) \simeq R_T^2}$$

$$\text{como } \overbrace{g_0}^{\substack{\text{mod de g}\\ \text{en sup Tierra}}} = G\frac{M_T}{R_T^2}, \text{resulta finalmente: } \Delta E_p \simeq mg_0h$$

9. **CL-J09 Considere dos satélites de masas iguales en órbita alrededor de la Tierra. Uno de ellos gira en una órbita de radio R y el otro en una de radio 2R. Conteste razonadamente las siguientes preguntas:**
a) ¿Cuál de los dos se desplaza con mayor celeridad?.
b) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía potencial?.
c) ¿Cuál de ellos tiene mayor energía mecánica?
Resolución:
a) La velocidad orbital de un satélite se obtiene teniendo en cuenta que en la órbita la fuerza de atracción gravitatoria actúa como centrípeta:

$$\cancel{m}_s\frac{|\vec{v}|^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_T\cancel{m}_s}{r^{\cancel{2}}} \to |\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Luego tiene mayor celeridad el de menor radio orbital, el de radio R.
b) La energía potencial, tomando como origen de la misma cuando los dos cuerpos están separados “infinitamente” viene dada, como se sabe, por:

$$E_p = -G\frac{M_Tm_s}{r}$$

, siendo *r*, la distancia entre los centros de los dos cuerpos. En este caso, el radio de la órbita. A *mayor radio*, menor valor del cociente y *mayor valor de la energía potencial* (por el signo -), luego tiene más energía potencial el satélite que describe la órbita de radio 2*R*.
c) La energía mecánica, suma de cinética y potencial, viene dada por:

$$E_M = Ec + Ep = G\frac{M_Tm_S}{2r} + \left(-\frac{GM_Pm_s}{r}\right) = -\underline{\underline{\frac{GM_pm_s}{2r}}}$$

$$\text{pues } m_s\frac{|\vec{v}|^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_Tm_S}{r^{\cancel{2}}} \to \overbrace{m_s|\vec{v}|^2}^{2E_c} = G\frac{M_Tm_S}{r} \to E_c = G\frac{M_Tm_S}{2r}$$

, con lo que a *mayor radio* menor valor del cociente y *mayor valor* en consecuencia *de la energía mecánica* (por el signo -), luego tiene más energía mecánica el satélite que recorre la órbita de radio 2*R*.

10. **CL-S08 a) Escriba la expresión de la energía potencial gravitatoria terrestre de un objeto situado cerca de la superficie de la Tierra. ¿En qué lugar es nula?**
b) Considere ahora el caso de un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Escriba la expresión de su energía potencial gravitatoria terrestre e indique el lugar donde se anula
Respuesta:
a) Se acaba de deducir que:

$$\Delta E_p \simeq mg_0h$$

, pero aquí se pide la energía potencial, no el incremento. Si se toma como nula la energía potencial sobre la superficie de la Tierra, se tiene:

$$Ep_h - \overbrace{Ep_0}^{0} = mg_0h$$

Luego la expresión $Ep = mgh$ supone nula la energía potencial sobre la superficie de la Tierra
b) En teoría se deduce que la energía potencial de un par de cuerpos de masas respectivas m_1 y m_2, con una distancia entre sus centros, *r*, viene dada por:

$$Ep = -G\frac{m_1m_2}{r} + C$$

, siendo C una constante arbitraria (a la que se puede asignar cualquier valor), ya que lo que realmente se calculan son variaciones de energía potencial .
Si en la igualdad anterior se asigna ARBITRARIAMENTE el valor cero a la energía potencial de la pareja de cuerpos cuando están separados "infinitamente", también tiene que ser cero el valor de la constante ya que es nulo el miembro de la izquierda y el primer sumando del de la derecha, con lo que el valor de la energía potencial adopta la forma:

$$Ep = -G\frac{m_1m_2}{r}$$

Tal como se acaba de decir, dicha igualdad supone asignar el valor cero de la energía potencial a la situación física de la pareja de cuerpos "infinitamente" separados. Evidentemente, en dicha situación, sería nula la fuerza de atracción entre ambos cuerpos, o, de otro modo, cualquiera de ellos no notaría la presencia del otro.

11. **CL-J07 Un planeta sigue una órbita elíptica alrededor de una estrella. Cuando pasa por el periastro *P,* punto de su trayectoria más próximo a la estrella, y por el apoastro punto más alejado, explique y justifique las siguientes afirmaciones:**
a) Su momento angular es igual en ambos puntos y su celeridad es diferente
b) Su energía mecánica es igual en ambos puntos .
Respuesta:

a) El momento cinético o angular de una partícula es, por definición $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, es decir; el momento del momento lineal. Se ha demostrado que su variación con el tiempo se rige por: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. En nuestro caso dicho momento es nulo pues el ángulo que forman la fuerza y el vector de posición es de 180º (ver gráfico) . En consecuencia el momento anular permanece constante $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = Cte.$ Esta constancia del momento angular tiene como consecuencia, como se va a ver, que <u>la celeridad (módulo de la velocidad) del astro, es variable</u>:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = cte \Rightarrow (\vec{r} \times \vec{p})_A = (\vec{r} \times \vec{p})_B \Rightarrow \left|(\vec{r} \times \vec{p})_A\right| = \left|(\vec{r} \times \vec{p})_B\right| \rightarrow$$

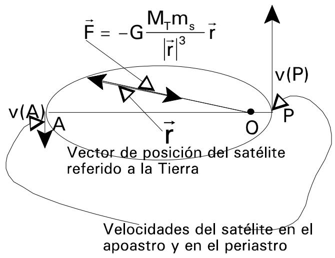
$$\rightarrow \underbrace{|\vec{r}_A|}_{=OA} m_s |\vec{v}_A| sen90º = \underbrace{|\vec{r}_P|}_{=OP} m_s |\vec{v}_P| sen90º \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{OA}|\vec{v}_A| = \overline{OP}|\vec{v}_P|$$

Como las distancias OA y OP no son iguales, tampoco lo son las celeridades.

b) Como la fuerza gravitatoria es la única fuerza que actúa sobre el cuerpo y es conservativa, su energía mecánica se conserva.

12. Supón que realizas un aterrizaje en un planeta de otro sistema solar que tiene la misma masa por unidad de volumen que la Tierra, pero su radio es 10 veces el de la Tierra. ¿Cuál sería tu peso en ese planeta ?



Respuesta:

El campo gravitatorio que crea un planeta en su superficie es, como sabemos:

$$|\vec{g}_P| \equiv g_P = \frac{GM_P}{r_P^2}$$

Por otra parte, la relación de la masa con la densidad y el volumen de un cuerpo esférico es:

$$M_P = \rho_P V_P = \rho_P \times \frac{4\pi r_P^3}{3}.$$

Se tiene al aplicar la primera ecuación tanto al planeta como a la Tierra y tener en cuenta la 2ª (además de la igualdad de densidades):

$$\underline{\underline{\frac{g_P}{g_T}}} = \frac{GM_P / r_p^2}{GM_T / r_T^2} = \frac{M_P r_T^2}{M_T r_P^2} = \frac{\rho_P \times \frac{4\pi r_P^3}{3} r_T^2}{\rho_T \times \frac{4\pi r_T^3}{3} r_P^2} = \frac{r_P}{r_T} = \underline{\underline{10}}$$

y como la masa del cuerpo es invariante, al ser la gravedad en el planeta 10 veces superior a la terrestre también pesará 10 veces más.

13. Explica la ingravidez de los astronautas en una nave espacial que gira alrededor de la Tierra

Respuesta:

Considera la cuestión 6 asignando al astronauta el papel del tornillo. Como tanto la nave como el astronauta se mueven de idéntica manera describiendo la misma circunferencia a la misma velocidad (están ambos sometidos a la misma aceleración centrípeta) el astronauta no ejerce fuerza sobre la nave y en consecuencia tampoco la nave sobre él por lo que "flota" respecto a ella. Se puede razonar de otro modo. ¿En que cambia la situación del tornillo al desprenderse de la nave?. En nada. Seguirá moviéndose como lo hacía ya que sigue actuando sobre él la atracción gravitatoria terrestre.

14. CL-S07 El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre y su masa la mitad. Calcule la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta, en función de sus correspondientes valores terrestres.

Resolución:

El campo gravitatorio o gravedad (el módulo) que crea un cuerpo, planeta, estrella, etc. en su superficie viene dado por:

$$\left|\vec{g}_P\right| \equiv g_P = \frac{GM_P}{r_P^2}$$

Si la relación anterior se aplica tanto al planeta (para lo que sirve la relación tal cual está) como a la Tierra y se relacionan ambas expresiones, se tiene:

$$\left|\vec{g}_P\right| \equiv g_P = \frac{GM_P}{r_P^2} \;\; ; \quad \left|\vec{g}_T\right| \equiv g_T = \frac{GM_T}{r_T^2} \xrightarrow[\text{igualdad entre la segunda}]{\text{dividiendo la primera}}$$

$$\rightarrow \frac{g_P}{g_T} = \frac{M_p r_T^2}{M_T r_P^2} = \frac{Mp}{M_T}\left(\frac{r_T}{r_p}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 3^2 \rightarrow \underline{g_P = g_T \times \frac{9}{2}}$$

En teoría se demuestra a partir del concepto de velocidad de escape que su valor (desde la superficie de un planeta) viene dado por:

$$\left|\vec{v}_{eP}\right| = \sqrt{\frac{2GM_P}{r_P}}$$

Siendo M_P y r_P la masa y el radio del planeta, respectivamente. Si, como en el apartado anterior, se aplica esa relación tanto al planeta como a la Tierra y se divide miembro a a miembro, resulta:

$$\left|\vec{v}_{eP}\right| = \sqrt{\frac{2GM_P}{r_P}}; \quad \left|\vec{v}_{eT}\right| = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}} \rightarrow \frac{\left|\vec{v}_{eP}\right|}{\left|\vec{v}_{eT}\right|} = \sqrt{\frac{M_P}{M_T} \times \frac{r_T}{r_P}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \times 3} \rightarrow \underline{\left|\vec{v}_{eP}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}}\left|\vec{v}_{eT}\right|}$$

15. **Consideremos la Tierra aislada y tomemos como valor del radio en el ecuador $R = 6380$ km y como velocidad de un punto de su superficie en el mismo lugar $v = 465$ m/s. Queremos que un satélite artificial de 65 kg describa una órbita circular de radio $R_1 = 3R_T$ y en el plano del ecuador.**

Se sabe que el lanzamiento se llevó a cabo en un punto del ecuador y hacia el este, y que $g_0 = 9{,}8$ m/s^2. Se pide:

a) Energía necesaria para lanzar y colocar en órbita el satélite

b) Período del satélite

c) Energía necesaria para mandarlo desde la órbita inicial a otra de $R_2 = 4R_T$

Resolución:

a) Este es un caso más realista que lo usual. Como norma, se supone que Tierra está en reposo (una manera sencilla de evitarse problemas, al no tener que contar su velocidad lineal debida a la rotación). En este caso tenemos que tener en cuenta la velocidad debida a la rotación terrestre. De hecho, las bases de lanzamiento de satélites (Guyana Francesa, Cabo Cañaveral) están próximas al ecuador (donde es máxima la velocidad Y se lanzan en dirección este (en el sentido de la rotación terrestre).

Hay que tener especial cuidado a la hora de operar con velocidades cuando el cuerpo que se considera ya tiene velocidad inicial (ver nota final "Velocidad y energía comunicada a un cuerpo"). La aplicación del principio de conservación de la energía adopta, en este caso, la forma:

Energía potencial gravitatoria inicial + Energía cinética inicial debida a la rotación terrestre + Energía cinética suministrada (quemando el combustible) = Energía mecánica final (la que tiene en la órbita)

$$-\frac{GM_Tm_s}{r_T}+\frac{1}{2}m_sv_L^2+E_{suministrada}=-\frac{GM_Tm_s}{\underbrace{2r_{orbita}}_{6r_T}}\Rightarrow \underline{\underline{E_{suministrada}}}=$$

$$=m_s\left(\frac{GM_T}{r_T}-\frac{GM_T}{6r_T}-\frac{v_L^2}{2}\right)=m_s\left[\frac{\overbrace{GM_T}^{g_0r_T^2}}{r_T}\left(1-\frac{1}{6}\right)-\frac{v_L^2}{2}\right]=m_s\left(\frac{5}{6}g_0r_T-\frac{v_L^2}{2}\right)=$$

$$=65\left(\frac{5}{6}9,8\times 6,3810^6-\frac{465^2}{2}\right)J=\underline{\underline{3,3810^9\,J}}$$

b) El período orbital se puede a partir de que, como es conocido, la fuerza de atracción gravitatoria nos proporciona la fuerza centrípeta:

$$\frac{GM_Tm_s}{r^2}=ms\frac{v^2}{r}\Rightarrow \underline{\underline{v^2=\frac{GM_T}{r}\overset{Cinematica}{=}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2r^3}{\underbrace{GM_T}_{g_0r_T^2}}}=$$

$$=\frac{2\pi r}{r_T}\sqrt{\frac{r}{g_0}}=\frac{2\pi 3r_T}{r_T}\sqrt{\frac{3r_T}{g_0}}=6\pi\sqrt{\frac{3r_T}{g_0}}=6\pi\sqrt{\frac{3\times 6,3810^6}{9,8}}=$$

$$=6.10^3\pi\sqrt{\frac{3\times 6,38}{9,8}}=26343\text{ s}$$

c) Este apartado se resuelve por consideraciones energéticas: la energía mecánica que el satélite posee en la órbita inicial más la que se le suministra tiene que ser igual a la que posee en la órbita final:

$$\overbrace{\frac{-GM_Tm_s}{2\underbrace{r_i}_{3r_T}}}^{\text{Energia mecanica inicial}} + E_{suministrada} = \overbrace{\frac{-GM_Tm_s}{2\underbrace{r_f}_{4r_T}}}^{\text{Energia mecanica final}} \Rightarrow \underline{\underline{E_{suministrada}}} = \frac{\overbrace{GM_T}^{g_0r_T^2}m_s}{2r_T}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{g_0r_Tm_s}{24} = \frac{9{,}8\times 6{,}3810^6\times 65}{24}\,J = \underline{\underline{1{,}6910^8\,J}}$$

16. **CL-J98 Supón que la órbita de la Tierra en torno al Sol es una circunferencia de radio 1,5 10^{11} m y que la Tierra tarda 3,15 .10^7 s en completar dicha órbita. Determina:**
a)La masa del Sol.
b) El potencial gravitatorio debido al Sol en el punto en que se halla la Tierra.
Resolución:
a) El punto de partida es que, ,como sabemos, siempre sucede que cuando un cuerpo gira alrededor de otro debido a la atracción gravitatoria es debido a que la fuerza centrípeta es proporcionada precisamente por la referida atracción gravitatoria.:

$$G\frac{M_S\cancel{m_T}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_T}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_S}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2r^3}{T^2G} =$$

$$= \frac{4\pi^2\times\left(1{,}5.10^{11}\right)^3}{\left(3{,}15.10^7\right)^2\times 6{,}67.10^{-11}}\,kg = 1{,}34\times10^{30}\,kg$$

b) El cálculo de potencial gravitatorio que crea el Sol a una distancia de el igual al radio de la órbita terrestre es inmediato:

$$V = -G\frac{M_S}{r} \overbrace{=}^{\text{en funcion de los datos}} -\frac{4\pi^2r^2}{T^2} = -8{,}95\times10^7\,J/kg$$

17. **CL-J07 Dos satélites de igual masa orbitan en tomo a un planeta de masa mucho mayor siguiendo órbitas circulares coplanarias de radios *R* y *3R* y recorriendo ambos las órbitas en sentidos contrarios. Deduzca y calcule:**
a) la relación entre sus periodos.
b) la relación entre sus momentos angulares (módulo, dirección y sentido)
Resolución:
a) Se obtiene directamente a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = Cte.R^3 \rightarrow \begin{cases} T_1^2 = cteR_1^3 \\ T_2^2 = cteR_2^3 \end{cases} \xrightarrow[\text{a miembro y operando}]{\text{dividiendo miembro}} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3/2} =$$

$$= \left(\frac{\cancel{R}}{3\cancel{R}}\right)^{3/2} \simeq 0{,}19$$

b) EL momento angular $\vec{L}$, de una partícula de masa *m* que se mueve con velocidad *v* respecto de un punto desde el cual la partícula se localiza mediante el vector $\vec{r}$ es, por definición:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \underbrace{\vec{p}}_{m\vec{v}}$$

, siendo su módulo: $\left|\vec{L}\right| = m\left|\vec{r}\right| \times \left|\vec{v}\right| = m\left|\vec{r}\right|\omega\left|\vec{r}\right| = \dfrac{2\pi}{T} m\left|\vec{r}\right|^2$

Aplicando la relación anterior a los dos satélites, se tiene:

$$\left|\vec{L}_1\right| = \frac{2\pi}{T_1} m\left|\vec{r}_1\right|^2 \qquad \left|\vec{L}_2\right| = \frac{2\pi}{T_2} m\left|\vec{r}_2\right|^2 \rightarrow \frac{\left|\vec{L}_1\right|}{\left|\vec{L}_2\right|} = \frac{\dfrac{\cancel{2\pi}}{T_1}\cancel{m}\left|\vec{r}_1\right|^2}{\dfrac{\cancel{2\pi}}{T_2}\cancel{m}\left|\vec{r}_2\right|^2} = \frac{\overbrace{T_2}^{\left(\frac{\left|\vec{r}_2\right|}{\left|\vec{r}_1\right|}\right)^{3/2}}}{T_1}\left(\frac{\left|\vec{r}_1\right|}{\left|\vec{r}_2\right|}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\left|\vec{r}_2\right|}{\left|\vec{r}_1\right|}\right)^{3/2}\left(\frac{\left|\vec{r}_1\right|}{\left|\vec{r}_2\right|}\right)^2 = \left(\frac{\left|\vec{r}_1\right|}{\left|\vec{r}_2\right|}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} \simeq 0,58$$

, donde se ha tenido en cuenta la relación entre los períodos obtenida en el apartado anterior. Observa que se ha obtenido la relación entre los MÓDULOS del momento angular. La dirección es la misma en ambos casos (perpendicular al plano de las órbitas que describen, que es el mismo). Como los sentidos de los giros son opuestos, lo son las velocidades lineales y en consecuencia, los respectivos momentos angulares.

18. CL-S07 La masa de la Luna es 0,0123 veces la de la Tierra y su radio mide 1,74.10^6 m. Calcule:

a) La velocidad con que llegará al suelo un objeto que cae libremente desde una altura de 5 m sobre la superficie lunar.

b) El período de oscilación en la Luna de un péndulo cuyo período en la Tierra es de 5 s.

Resolución:

a) Como la altura desde la que cae el objeto es mucho menor que el radio lunar, la gravedad es constante e igual a la que crea la Luna en su superficie que hay que calcular. Se ha visto reiteradamente que el valor de la gravedad que crea un astro en su superficie viene dado por:

$$\left|\vec{g}_P\right| \equiv g_P = \frac{GM_P}{r_P^2}$$

Aplicando la igualdad anterior a la Luna y teniendo en cuenta la relación de su masa con la terrestre, resulta:

$$g_L = \frac{GM_L}{r_L^2} = \frac{G\times 0,0123M_T}{r_L^2} = \frac{6,67\times 10^{-11}Nm^2kg^{-2}\times 0,0123.5,98.10^{24}kg}{\left(1,74.10^6\right)^2 m^2} =$$

$$= 1,62\ Nkg^{-1} = \ 1,62\ ms^{-2}$$

Calculado el valor de la aceleración lunar, estamos ante un sencillo ejercicio de cinemática:

$$\begin{cases} v = \cancel{v_0} + at \\ \overbrace{y}^{0} = \overbrace{y_0}^{5m} + \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}\overbrace{a}^{-1,62ms^{-2}} t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\times 5}{1,62}} = 2,48s \end{cases}$$

Al sustituir el valor del tiempo obtenido en la segunda ecuación en la primera, se tiene para la velocidad con la que el objeto llega a la superficie de la Luna:

$$v = -1,62 \times 2,48 = -4,02\ m/s$$

Los datos son SI y se ha tenido en cuenta criterio cartesiano de signos para la aceleración y la velocidad.

b) El período de oscilación de un péndulo simple o matemático viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Siendo *l* su longitud y *g* el valor de la gravedad en el lugar en el que está situado el péndulo. Como en este apartado el dato es el período terrestre del péndulo y se pide el lunar, los cálculos son inmediatos, pues no hay más que relacionar, a partir de la fórmula anterior, los períodos del pénculo en ambos astros:

$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}}\ (1);\quad T_T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_T}}\ \ (2)\ \xrightarrow[\text{(1) entre (2)}]{\text{dividiendo}} \frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_L = T_T \times \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = 5s\times\sqrt{\frac{9,8\cancel{ms^{-2}}}{1,62\cancel{ms^{-2}}}} = 12,3s$$

19. CL-S04 Se eleva un objeto de masa *m* = 20 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura *h* = 100 km.

a) ¿Cuánto pesa el objeto a esa altura?

b) ¿Cuánto ha incrementado su energía potencial?

Resolución:

a) El peso de un objeto (en la Tierra o sus proximidades) es, por definición, la fuerza con la que la Tierra lo atrae, con lo que se tiene:

$$\underline{\underline{|\vec{p}|}} = m|\vec{g}| = G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_T m}{(r_t + h)^2} =$$

$$= \frac{6,67\times10^{-11}N\cancel{m^2}\,\cancel{kg}^{-2} - 5,98\times10^{24}\,\cancel{kg}.20\cancel{kg}}{6,47\times10^{-6}\,\cancel{m^2}} = \underline{\underline{190,57N}}$$

b) La expresión de la energía potencial gravitatoria de un par de cuerpos con una distancia *r* entre sus centros (si se ha asignado arbitrariamente el valor cero a la situación de los dos cuerpos separados "infinitamente") viene dada por:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

Como se pide el incremento de esa energía (valor en la situación final menos en la inicial), resulta:

$$\underline{\underline{\Delta E_p}} = -GMm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_t + h}\right) = GMm\left(\frac{h}{r_T(r_t + h)}\right) =$$

$$= \frac{6,67\times10^{-11}N\cancel{m^2}\,\cancel{kg^{-2}}.5,98\times10^{24}\,\cancel{kg}.20\cancel{kg}.10^5 m}{6,37\times10^6\,\cancel{m}.6,47\times10^6\,\cancel{m}} = \underline{\underline{1,94.10^7 J}}$$

20. CAN-J98 La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días. La masa de la Tierra es 6,0 - 10^{24} kg y G = 6,67. 10^{-11} Nm^2kg^{-2}.
a) Calcula la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna.
b) Calcula el valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia de] centro de la Tierra de 3,4$10^8$ m.
e) Sí en la Luna, cuyo radio es de 1,7 10^6 m, se deja caer sin velocidad inicial un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

Resolución:

a) Como siempre, considerar que la fuerza de atracción gravitatoria nos proporciona la fuerza centrípeta y a partir de esa igualdad relacionaremos con el período orbital, que es el dato

$$G\frac{M_T \cancel{m_L}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_L}\frac{v^2}{\cancel{r}} \to v^2 = \underline{\underline{\frac{GM_T}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}} \to r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6.6710^{-11}\times6.10^{24}\times(28.24.3600)^2}{4\pi^2}} = 3,910^8 m$$

b) En el referido punto, tal como se dice, el cuerpo de masa m es atraído con igual fuerza tanto por la Tierra como por la Luna:

$$\cancel{G}\frac{M_T \cancel{m}}{\left(3,4.10^8\right)^2} = \cancel{G}\frac{M_L \cancel{m}}{\left(3,910^8 - 3,4.10^8\right)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_L = M_T \frac{\left(3,910^8 - 3,4.10^8\right)^2}{\left(3,4.10^8\right)^2} =$$

$$= M_T \left(\frac{0,5}{3,4}\right)^2 = 610^{24}\left(\frac{0,5}{3,4}\right)^2 = 1,310^{23}\text{kg}$$

c) Se trata ahora de calcular el valor de la gravedad lunar para poder seguir vía cinemática:

$$g_0 = G\frac{M_L}{r_L^2} = 6,6710^{-11}\frac{1,310^{23}}{\left(1,710^6\right)^2} = 3\ \text{ms}^{-2} \rightarrow \begin{cases} V_F = 0 + 3t \\ h = \dfrac{1}{2}3t^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_F = 6\sqrt{5/3}\ \text{ms}^{-1}\ ;t = 2\sqrt{5/3}\ \text{s}$$

21. CANT-J98 Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Sabiendo que su periodo de revolución es $T_1 = 5665$ s, determina:

a) Velocidad del satélite en la órbita.

b)Energía cinética, energía potencial y energía total del satélite en la citada órbita.

c)Energía necesaria para transferirlo a otra órbita de $T_2 = 7\ 200$ s

Datos: $g_0 = 9,8$ ms-^{2}. Radio de la Tierra 6370 km.

Resolución:

a) Hay que considerar que cuando un cuerpo gira alrededor de otro, el periodo orbital, velocidad orbital y radio de la órbita son datos equivalentes por cuanto el conocimiento de uno de ellos lleva asociado el de los otros dos según las siguientes relaciones:

$$G\frac{M_T \cancel{m_L}}{r^2} = \cancel{m_L}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v^2 = \left\langle \begin{array}{l} 1)\ \dfrac{GM_T}{r} \\ \qquad\qquad\qquad \overbrace{\text{relacion de Cinematica}} \Rightarrow\ 3)\ T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}r^3 \\ 2)\ \left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2 \end{array}\right.$$

El apdo a) es de solución inmediata pues si se aplica la relación 3) se obtiene r y, a partir de él mediante 1) o 2) se halla v:

$$r = \sqrt[3]{GM_T\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{GM_T\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{\overbrace{GM_T}^{g_0 r_T^2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{g_0\left(\frac{r_T T}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{9{,}8\left(\frac{6{,}3710^6 \times 5665}{2\pi}\right)^2} = 6{,}863.016 \text{ m}$$

y ahora, v:

De 1)

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\frac{\overbrace{GM_T}^{g_0 r_T^2}}{r}} = r_T\sqrt{\frac{g_0}{r}} = 6{,}3710^6\sqrt{\frac{9{,}8}{6{,}86310^6}} = 7612 \text{ m/s}$$

b) Aunque se ha evaluado la velocidad orbital y a partir de ella se puede calcular la energía cinética, es más cómodo calcular todas las energías en función del radio orbital:

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = \dfrac{\overbrace{GM_T}^{g_0 r_T^2}}{r} = \dfrac{g_0 r_T^2}{r} \rightarrow E_K = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{mg_0 r_T^2}{2r} = \dfrac{10^2 \times 9.8 \times \left(6{,}3710^6\right)^2}{2 \times 6{,}86310^6} = 2{,}89710^9 \text{ J} \\ E_P = -\dfrac{\overbrace{GM_T}^{g_0 r_T^2} m_s}{r} = -\dfrac{g_0 r_T^2 m_s}{r} = -\dfrac{9.8 \times \left(6{,}3710^6\right)^2 \times 10^2}{6{,}86310^6} = -5{,}79410^9 \text{ J} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_M = E_K + E_P = -2{,}89710^9 \text{ J}$$

c) Se acaba de calcular, entre otras cosas, la energía mecánica des satélite en la órbita inicial. Si calculamos la que tiene en la órbita final (lo que obliga a evaluar el radio de ésta última), la diferencia representa la energía suministrada para transferirlo a la mencionada órbita final. Calculemos en primer lugar, conociendo el período, el radio de esta última órbita y proseguiremos según lo anterior:

$$r = \sqrt[3]{GM_T\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{GM_T\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{\overbrace{GM_T}^{g_0 r_T^2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{g_0\left(\frac{r_T T}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{9,8\left(\frac{6,3710^6 \times 7200}{2\pi}\right)^2} = 8_1052.611,225\ \text{m} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow E_M = -\frac{\overbrace{GM_T}^{g_0 r_T^2} m_s}{2r} = -\frac{g_0 r_T^2 m_s}{2r} = -\frac{9,8 \times \left(6,3710^6\right)^2 \times 10^2}{2 \times 8,05310^6} = -2,46910^9\ \text{J}$$

.. luego, $\underline{\underline{E_{suministrada}}} = E_{MF} - E_{MI} = \left[-2,46910^9 - (-2,89710^9)\right]\text{J} = \underline{\underline{4,2810^8\ \text{J}}}$

22. **CL-J009 Júpiter, el mayor de los planetas del sistema solar y cuya masa es 318,36 veces la de la Tierra, tiene orbitando doce satélites. El mayor de ellos, Ganimedes (descubierto por Galileo), gira en una órbita circular de radio igual a 15 veces el radio de Júpiter y con un período de revolución de 6,2·10^5 s. Calcule:**
a) la densidad media de Júpiter .
b) el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter.
Resolución:
a) Habrá que obtener el radio de la órbita para, a partir de él, calcular el de Júpiter y sabiendo su masa y volumen, evaluar su densidad. Por supuesto, el dato es la masa de la Tierra.
Sabemos que la fuerza gravitatoria actúa como centrípeta:

$$G\frac{M_J \cancel{m_G}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_G}\frac{v^2}{\cancel{r}} \rightarrow v^2 = \begin{cases} 1)\ \dfrac{GM_J}{r} \\ 2)\ \overbrace{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2}^{\text{relación de Cinematica}} \end{cases} \rightarrow\ 3)\ r = \sqrt[3]{\frac{GM_J}{4\pi^2}T^2} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6,67.10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\text{x}318,36.5,98.10^{24}\text{kg}}{4\pi^2}\left(6,2.10^5\text{s}\right)^2} =$$

$$= 1,073\text{x}10^9\text{m}$$

Ahora es inmediato el cálculo de la densidad joviana:

$$\rho_J = \frac{M_J}{V_J} = \frac{318,36M_T}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_{orb}}{15}\right)^3} = \frac{318,36\text{x}5,98.10^{24}\text{kg}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1,073.10^9}{15}\text{m}\right)^3} = 1240,6\text{kg}/\text{m}^3$$

b) El cálculo del (módulo) del campo gravitatorio en la superficie de Júpiter se realiza mediante..

$$\left|\vec{g}\right|_0 = G\frac{M_J}{r_J^2} = 6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2} \times \frac{318,36.5,98.10^{24}kg}{\left(\frac{1,073.10^9}{15}m\right)^2} =$$

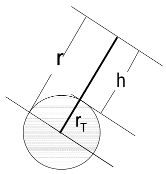
$$= 24,8\ N/kg$$

23. CL-S99 Los meteoritos procedentes del espacio exterior alcanzarían la superficie de la Tierra con una velocidad de 1,12 km/s si no existiese rozamiento con la atmósfera.

a) ¿Desde qué altura aparente caerían, si se considerase constante el valor de la gravedad de g = 9,8 m/s²?

b) ¿De qué distancia proceden en realidad, si se tiene en cuenta la variación de g con la altura?

Datos: G = 6,67.1 0⁻¹¹ N. m²/kg². Radio de la Tierra 6370 km. Masa de la Tierra: 5,98 x 10²⁴ kg



Resolución:

a) Suponiendo que caen SIN velocidad inicial el cálculo en este apdo es inmediato:

$$V_F^2 - \underbrace{V_o^2}_{0} = 2gh \Rightarrow h = \frac{V_F^2}{2g} = \frac{\left(1,210^3\right)^2}{2.9,8} = 64000\ m$$

b) La conservación de la energía mecánica resuelve este apdo, empleando para la energía potencial la expresión correcta:

$$E_{Mi} = E_{MF} \Rightarrow \overbrace{E_{Ci}}^{0} + E_{Pi} = E_{CF} + E_{PF} \rightarrow -G\frac{M_T\cancel{m}}{r} = \frac{1}{2}\cancel{m}\overbrace{V_F^2}^{dato} + \left(-G\frac{M_T\cancel{m}}{r_T}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r}\right) = \frac{V_F^2}{2GM_T}}$$

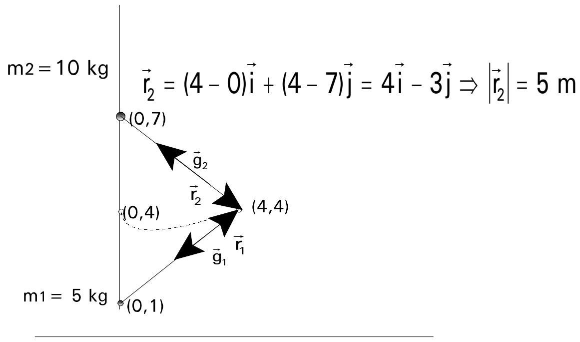
El cálculo es inmediato al sustituir en la igualdad subrayada. Hay que tener en cuenta que lo que se pide es $h = r - r_T$. Si operas adecuadamente obtendrás: r = 6.444,098 km, luego h = 6.444,098-6370 = 74,098 km = 74098 m.

Este resultado es coherente con el del apartado anterior: en efecto; el valor medio de la gravedad es menor que 9,8 que es el que se tomó en el primer apartado luego para llegar con esa velocidad necesitará caer desde MÁS altura

24. **CL-J00 Dos masas puntuales, $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 10$ kg, se encuentran situadas en el plano XY en dos puntos de coordenadas $(x_1,y_1) = (0,1)$ y $(x_2,y_2) = (0,7)$ respectivamente, Determine:**

a) Intensidad del campo gravitatorio debido a las dos masas en el punto de coordenadas (x,y) = (4,4)

b) Trabajo necesario para trasladar una masa de 1 kg situada en el punto (0,4) hasta el punto (4,4) en presencia de las otras dos masas, indicando la interpretación física que tienen el signo del trabajo calculado.



Todas las coordenadas están expresadas en metros. Datos: G = 6,67.1 0^{-11} N. m^2/kg^2.

Resolución.

Sabemos que el campo gravitatorio creado por un cuerpo de masa m a una distancia r de él viene dado por:

$$\vec{g} = -G\frac{m}{|\vec{r}|^2}\vec{u}_r = -G\frac{m}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

, siendo $\vec{r}$ el vector con origen en la masa, m, que crea el campo y extremo en el punto en el que se desea calcular el valor del campo.

Si aplicamos la ecuación vectorial anterior al campo creado por las dos masas en (4,4) y tenemos en cuenta el principio de superposición, resulta, considerando los valores de los vectores calculados en el gráfico:

$$\underline{\underline{\vec{g}_{(4,4)}}} = \vec{g}_{1(4,4)} + \vec{g}_{2(4,4)} = -G\frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{r}_1 + \left(-G\frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{r}_2\right) = -G\left(\frac{m_1}{|\vec{r}_1|^3}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{|\vec{r}_2|^3}\vec{r}_2\right) =$$

$$= -6,67\times10^{-11}\left[\frac{5}{5^3}(4\vec{i}+3\vec{j}) + \frac{10}{5^3}(4\vec{i}-3\vec{j})\right]\text{N / kg} =$$

$$= -\frac{6,67\times10^{-11}}{5^2}\left[(4\vec{i}+3\vec{j}) + 2(4\vec{i}-3\vec{j})\right] = -\frac{6,67\times10^{-11}}{5^2}(12\vec{i}-3\vec{j}) =$$

$$= -\frac{3\times6,67\times10^{-11}}{5^2}(4\vec{i}-\vec{j})\text{ N/kg} = \underline{\underline{-8,004\times10^{-12}(4\vec{i}-\vec{j})\text{ N/kg}}}$$

Para evaluar el trabajo necesario para trasladar un cuerpo de un punto a otro en el seno del campo gravitatorio, hay que recordar que al ser éste conservativo se puede definir la función potencial. Sabemos que el cálculo del trabajo realizado por las fuerzas del campo para trasladar un cuerpo de masa m de un una posición inicial a otra final se realiza mediante la expresión:

$$\underline{\underline{W_{FC}}} = -\Delta E_p = E_{p(i)} - E_{p(f)} = mV_i - mV_f = \underline{\underline{m(V_i - V_f)}} \quad \Bigg\| \, V = -G\frac{M}{r}$$

, donde V es el potencial gravitatorio que crea el cuerpo de masa M en un punto que dista r de él

Se sabe que *m* es la masa que se desplaza de la posición inicial a la final y V_i y V_f el potencial gravitatorio en la posición inicial y final debido a la(s) masa(s) que actúan sobre la que se desplaza. Al se un escalar se calculará, como se va a ver, mediante una suma numérica:

$$V_{INICIAL} = V_{(0,4)} = \sum_{i=1}^{2} V_i = \sum_{i=1}^{2} -G\frac{m_i}{r_i} = -G\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i}{r_i} = -G\left(\frac{5}{3} + \frac{10}{3}\right) = -5G \text{ J/kg}$$

$$V_{FINAL} = V_{(4,4)} = \sum_{i=1}^{2} V_i = \sum_{i=1}^{2} -G\frac{m_i}{r_i} = -G\sum_{i=1}^{2}\frac{m_i}{r_i} =$$

$$= -G\left(\frac{5}{\sqrt{(4-0)^2 + (4-1)^2}} + \frac{10}{\sqrt{(4-0)^2 + (4-7)^2}}\right) =$$

$$= -3G \text{ J/kg} = -2{,}001.10^{-10} \text{ J/kg}$$

Ya es inmediato el cálculo del trabajo:

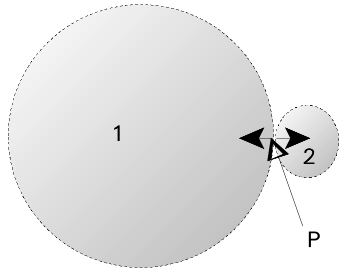
$$W_{FC} = m(V_i - V_f) = 1 \text{ kg} \times \left[-5G - (-3G)\right] \text{J/kg} = -2G \text{ J} = -1{,}334 \times 10^{-10} \text{ J}$$

El signo menos del trabajo nos indica que realmente el trabajo no lo hace el campo. *Debemos hacerlo contra él* para mover la masa de 1 kg desde (0,4) a (4,4) venciendo la fuerza de atracción gravitatoria que las masas de 5 y 10 kg ejercen sobre la de 1 kg.

25. CVAL-J08 Disponemos de dos masas esféricas cuyos diámetros son 8 y 2 cm, respectivamente. Considerando únicamente la interacción gravitatoria entre estos dos cuerpos, calcula:

1) La relación entre sus masas m_1/m_2 sabiendo que si ponemos ambos cuerpos en contacto el campo gravitatorio en el punto donde se tocan es nulo.

2) El valor de cada masa sabiendo que el trabajo necesario para separar los cuerpos, desde la posición de contacto hasta otra donde sus centros distan 20 cm, es: W = 1,6 10^{-12} J .Dato: G = 6,7$10^{-11}$ Nm^2/kg^2.



Resolución:

1) Sea P el punto de tangencia de los dos cuerpos. Al ser la fuerza

gravitatoria atractiva, el campo gravitatorio que en dicho punto crea la masa 1 se representa por el vector dirigido a izquierda. Evidentemente, el debido al cuerpo 2 tiene sentido opuesto (ver figura). Como el enunciado dice que el campo en P es nulo, los módulos de los campos creados por ambas masas son iguales, es decir;

$$G\frac{m_1}{r_1^2} = G\frac{m_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 4^2$$

, donde r_1 representa el radio del primer cuerpo y r_2 el del segundo. La relación de radios igual a la de diámetros es de 4 a 1, en el orden en el que se citan.

2) La situación inicial es la anteriormente dibujada: los centros de los cuerpos separados 5 cm (la suma de los radios), mientras que la final, es la de ambos cuerpos separados (sus centros) 20 cm. Dado que la fuerza gravitatoria es atractiva, el proceso de alejar los cuerpos entre sí requiere de un agente externo que lo haga, es decir; el trabajo a considerar es - $1{,}6.10^{-12}$ J ateniéndonos al criterio de $W>0$, si lo hace el sistema y $W<0$ si se hace contra el sistema, como es el caso. La masa del primer cuerpo es 16 veces la del segundo. Si se aplica la relación entre el trabajo del campo y el incremento de energía potencial, se tiene:

$$W = -\Delta E_p = E_{pi} - E_{pf} = -\frac{Gm_1m_2}{r_i} - \left(-\frac{Gm_1m_2}{r_f}\right) = G\overbrace{m_1m_2}^{16m_2^2}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow -1{,}6.10^{-12}\text{J} = 6{,}7.10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}16m_2^2\underbrace{\left(\frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{0{,}05}\right)}_{-15m^{-1}}m^{-1} \rightarrow$$

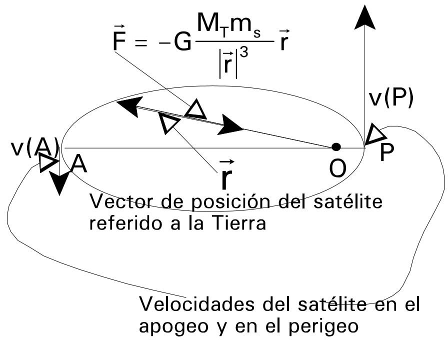
$$\rightarrow m_2 = \sqrt{\frac{-1{,}6.10^{-12}\text{J}}{6{,}7.10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}16\times(-15)m^{-1}}} \simeq 10^{-2}\text{kg} = 10\text{g}$$

La masa del primer cuerpo, 16 veces mayor, es, en consecuencia, 160 g

26. CL-J00 Un satélite artificial de la Tierra orbita alrededor de la misma describiendo una elipse. El punto A que está más alejado del centro O terrestre se denomina apogeo; el perigeo P es el punto más próximo.

a) Demostrar que el momento angular del satélite con respecto a O permanece constante

b) Usando la constancia de ese momento angular, demostrar que OA.v(A) = OP.v(P), donde v(A) y v(P) son las velocidades del satélite en A y P, respectivamente.



Resolución:

El momento cinético o angular de una partícula es, por definición $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, es decir; el momento del momento lineal. Se ha demostrado que su variación con el tiempo se rige por: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. En nuestro caso dicho momento es nulo pues el ángulo que forman la fuerza y el vector de posición es de 180º (ver gráfico) . En consecuencia el momento anular permanece constante $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = Cte$ ...y se puede seguir razonado como se hace a continuación:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = cte \rightarrow (\vec{r} \times \vec{p})_A = (\vec{r} \times \vec{p})_B \rightarrow |(\vec{r} \times \vec{p})_A| = |(\vec{r} \times \vec{p})_B| \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{|\vec{r}_A|}_{=OA} m_s |\vec{v}_A| sen90º = \underbrace{|\vec{r}_P|}_{=OP} m_s |\vec{v}_P| sen90º \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{OA}|\vec{v}_A| = \overline{OP}|\vec{v}_P| \quad c.q.d$$

27. CL-S00 Un satélite artificial de comunicaciones de masa 500 kg describe una órbita circular de 9000 km de radio en torno a la Tierra. En un momento dado, un investigador de la NASA decide variar su radio de órbita, para lo cual enciende uno de los cohetes propulsores del satélite, comunicándole un impulso tangente a su trayectoria antigua. Si el radio de la nueva órbita descrita por el satélite es de 13000 km, en torno a la Tierra, calcule:

a) Velocidad orbital del satélite en cada órbita.

b) ¿Qué energía se habrá gastado para llevarlo a la nueva órbita?

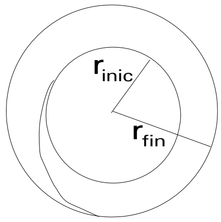
Datos: G = 6,67.1 0^{-11} N. m^2/kg^2; M_T = 5,98.1024 kg

Resolución:

a) La velocidad en cada órbita se calcula teniendo en cuenta que la fuerza de atracción gravitatoria proporciona la centrípeta. Una vez que se tiene la expresión que permite calcular la velocidad se aplica a las dos órbitas, operando siempre en el SI:

$$m_s \frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m_s}{r^2} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \left\langle \begin{array}{l} = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_{inic}}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67\,10^{-11}\times 5{,}98.10^{24}}{9\,10^{6}}} = 6657{,}2\ ms^{-1} \\ = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_{fin}}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67\,10^{-11}\times 5{,}98.10^{24}}{13\,10^{6}}} = 5539{,}1\ ms^{-1} \end{array}\right.$$

b) Para resolver este apartado, basta aplicar el principio de conservación de la energía: la energía mecánica en la órbita inicial más la comunicada al satélite por los cohetes debe de ser igual a la energía mecánica en la órbita final (en la figura se ha intentado representar las dos órbitas así como la trayectoria para pasar de una a otra):



$$\overbrace{E_{m\ (orbita\ inicial)} + E_{sumin}}^{\text{Em con la que se iinicia el cambio de orbita}} = E_{m\ (orbita\ final)} \Rightarrow \underline{\underline{E}} = E_{m\ (orbita\ final)} - E_{m\ (orbita\ inicial)} =$$

$$= -\frac{GM_T m_s}{2r_f} - \left(-\frac{GM_p m_s}{2r_i}\right) = \underline{\underline{\frac{\overbrace{GM_T}^{g_0 r_T^2}\, m_s}{2}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)}}$$

Si se sustituye en la igualdad doblemente subrayada, resulta:

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\frac{GM_T m_s}{2}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)}} = \underline{\underline{\frac{6{,}67\,10^{-11}\times 5{,}98\,10^{24}\times 5\,10^{2}}{2}\left(\frac{1}{9\,10^{6}} - \frac{1}{13\,10^{6}}\right)}} =$$

$$= \frac{6{,}67\,10^{-11}\times 5{,}98\,10^{24}\times 5\,10^{2}}{2\,10^{6}}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) = 3{,}42\,10^{9}\ J$$

28. CL-J08 Se desea poner en órbita un satélite meteorológico de 1000 kg de masa a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre. Deduzca y calcule:
a) La velocidad, el período y aceleración que debe de tener en la órbita.
b) El trabajo necesario para poner en órbita el satélite.

Resolución:

a) La fuerza de atracción gravitatoria, dirigida hacia el centro de la Tierra actúa como centrípeta. Operando con módulos, se tiene:

$$G\frac{M_T \cancel{m_s}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_s}\frac{v^2}{\cancel{r}} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_T + h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}\times 5{,}98.10^{24}\,kg}{6{,}67.10^{6}\,m}} = 7733\ m/s$$

Al tratarse de un movimiento circular uniforme, la relación entre la longitud de la órbita y su duración es:

$$T = \frac{2\pi r}{|\vec{v}|} = \frac{2\pi 6,67.10^6 m}{7733 s} = 5419,4\ s$$

La aceleración, coincide con el valor del campo gravitatorio terrestre en esa órbita pues

$$a = \frac{F}{m_s} = \frac{GM_T \cancel{m_s} / r^2}{\cancel{m_s}} = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{6,67.10^{-11} Nm^2kg^{-2} \times 5,98.10^{24} kg}{\left(6,67.10^6\right)^2 m^2} =$$

$$= 8,97\ N/kg = 8,97\ m/s^2$$

Evidentemente, al operar con módulos, se ha calculado el módulo de la aceleración. También se pudo calcular considerando que al tratarse de la aceleración centrípeta su valor es:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Y al sustituir la velocidad orbital (ya obtenida) y el radio de la órbita se llega también al resultado anterior..

b) Considerando la Tierra en reposo, el balance energético que permite calcular el trabajo necesario para ponerlo en órbita (o energía a suministrar con ese propósito) es:

Energía mecánica inicial (sólo potencial, pues se supone al satélite el reposo en una Tierra sin velocidad) + Trabajo que se pide (o energía a suministrar al satélite) = Energía mecánica en la órbita.

La energía mecánica en órbita se puede calcular sumando la cinética (pues se ha obtenido la velocidad) y la potencial pero es más cómodo y seguro hacerlo directamente ya que depende sólo del radio orbital que es, prácticamente, dato

$$\underbrace{-\frac{GM_T m_s}{r_T}}_{\substack{\text{Energía potencial}\\ \text{y mecánica inicial}\\ \text{(al carecer de cinética)}}} + W = \underbrace{-G\frac{M_T m_s}{2\left(r_T + h\right)}}_{\substack{\text{Energía mecánica}\\ \text{en la órbita}}} \to W = GM_T m_s\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{1\left(r_T + h\right)}\right) =$$

$$= 6,67.10^{-11} Nm^2kg^{-2} \times 5,98.10^{24} kg.10^3 kg\left(\frac{1}{6,37.10^6 m} - \frac{1}{2.6,67.10^6 m}\right) =$$

$$= 6,67 \times 5,98.10^{10}\left(\frac{1}{6,37} - \frac{1}{2.6,67}\right) J = 3,27.10^{10} J$$

29. CL-S08 Un cierto satélite en órbita circular alrededor de la Tierra es atraído por ésta con una fuerza de 1000 N y la energía potencial gravitatoria Tierra-satélite es -3.10^{-10}J, siendo nula en el infinito.
Calcule:
a) La altura del satélite sobre la superficie terrestre.
b) La masa del satélite

Resolución:

a) y b) No hay más que operar con la expresión que da la energía potencial gravitatoria de un par de cuerpos y con la ley de gravitación universal (módulos). Recordemos que en cualquiera de las dos ecuaciones, *r*, representa la distancia entre los CENTROS de los cuerpos. En este caso del centro de la Tierra al cuerpo o, de otro modo, $r = R_T + h$, siendo h la altura del satélite sobre la Tierra.

$$\begin{cases} -3.10^{10}\,J = -G\dfrac{M_T m_s}{r} \\ 10^3 = G\dfrac{M_T m_s}{r^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{a miembro}]{\text{dividiendo miembro}} 3.10^7 m = r = R_T + h \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 3.10^7 m - R_T = 3.10^7 m - 6,37.10^6 m = 2,63.10^7 m$$

Para hallar la masa del satélite no hay más que sustituir el valor de *r* obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones. La primera es más sencilla:

$$-3.10^{10}\,J = -G\frac{M_T m_s}{3.10^7} \rightarrow m_s = \frac{9.10^{17}\,Jm}{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2} \times 5,98.10^{24}kg} =$$

$$= 2256,4kg$$

30. CL-J05 La sonda espacial europea Mars Express orbita en la actualidad en torno a Marte recorriendo una órbita completa cada 7,5 horas, siendo su masa de aproximadamente 120 kg.
a) Suponiendo una órbita circular, calcule su radio, la velocidad con la que recorre la sonda u su energía en la órbita.
b) En realidad, esta sonda describe una órbita elíptica de forma que pueda aproximarse lo suficiente al planeta como para fotografiar su superficie. La distancia a la superficie marciana en el punto más próximo es de 258 km y de 11560 km en el punto más alejado. Obtenga la relación entre las velocidades de la sonda en estos dos puntos

Resolución:

a) Al ser el movimiento circular uniforme, como se conoce el período, resulta:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (1)$$

La fuerza con la que Marte atrae a la sonda al ir dirigida hacia el centro (de Marte) es centrípeta, luego operando con módulos, se tiene:

$$G\frac{M_M \cancel{m_s}}{r^2} = \cancel{m_s}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_M}{r}} \quad (2)$$

Si se resuelve el sistema formado por (1) y (2), con incógnitas *r* y *v*,. Si se despeja v en (1) y sustituye en (2) se llega a la 3ª ley de Kepler :

$$r^3 = \frac{GM_M}{4\pi^2}T^2 \rightarrow \underline{\underline{r}} = \left(\frac{GM_M}{4\pi^2}T^2\right)^{1/3} =$$

$$= \left(\frac{6,67\times10^{-11}N.m^2.kg^{-2}\times 6,421.10^{23}kg}{4\pi^2}\times\left(7,5.3600s\right)^2\right)^{1/3} = \underline{\underline{9,247\times10^6 m}}$$

La sustitución en (1) del valor obtenido del radio da, para el módulo de la la velocidad orbital:

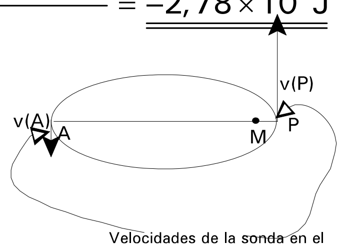
$$v = 2152,\ m/s$$

Cuando un satélite se encuentra en órbita, su energía mecánica es:

$$E_M = \underbrace{E_p}_{-\frac{GM_M m_s}{r}} + \underbrace{E_c}_{\frac{GM_M m_s}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\rightarrow Ec=\frac{GM_M m_s}{2r}} = -\frac{GM_M m_s}{r} + \frac{GM_M m_s}{2r} = -\frac{GM_M m_s}{2r} \quad (3)$$

Donde r es el radio orbital. El signo menos del resultado indica órbita cerrada o, de otro modo, que la sonda se encuentra atrapada por la gravedad marciana y da siempre vueltas a su alrededor. Si se reemplaza en (3) los datos de masas y el valor del radio orbital obtenido, resulta:

$$\underline{\underline{E_M}} = -\frac{GM_M m_s}{2r} = -\frac{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}\times 6,421.10^{23}kg\times120kg}{2\times9,247.10^6 m} = \underline{\underline{-2,78\times10^8 J}}$$



Velocidades de la sonda en el punto más próximo a Marte y en el más alejado

b) A partir de la conservación del momento angular de la sonda respecto a Marte, resulta:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = cte \rightarrow \left(\vec{r}\times\vec{p}\right)_A = \left(\vec{r}\times\vec{p}\right)_P \rightarrow \left|\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)_A\right| = \left|\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)_P\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{\left|\vec{r}_A\right|}_{=MA} m_s \left|\vec{v}_A\right| sen90° = \underbrace{\left|\vec{r}_P\right|}_{=MP} m_s \left|\vec{v}_P\right| sen90° \rightarrow \overline{MA}\left|\vec{v}_A\right| = \overline{MP}\left|\vec{v}_P\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\left|\vec{v}_P\right|}{\left|\vec{v}_A\right|}}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MP}} = \frac{\left(11560+3390\right)\cancel{km}}{\left(258+3390\right)\cancel{km}} = \underline{\underline{4,098}}$$

Observa cómo, al tener ser la distancias referidas al CENTRO de Marte, hay que sumar el radio de Marte a las distancias de la sonda a la superficie del planeta. Evidentemente, el dibujo ilustrativo NO está a escala pues representa a Marte como un punto cuando, ver datos, no se puede considerar así.

31. CL-S00 Dos satélites de comunicación A y B ($m_A > m_B$) giran alrededor de la Tierra en órbitas circulares de distinto radio ($R_A < R_B$). Se pide:
a) ¿Cuál de los dos se moverá con mayor velocidad lineal?
b) ¿Cuál de los dos tendrá mayor período de revolución?

Resolución:

a) Se sabe que cuando un satélite gira alrededor de un planeta se cumple que la fuerza de atracción gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta.

$$G\frac{M_T \cancel{m_s}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_s}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Al igualar y operar se ve que la velocidad orbital es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio orbital, con lo que tendrá mayor velocidad orbital el satélite que gire más próximo a la Tierra, el A en nuestro caso (nota de paso que dicha velocidad para nada depende de la masa del satélite).

b) El cálculo de la expresión que da el período es inmediato:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} = \text{Cte} \times r^{3/2} \ (3^a \text{ ley Kepler})$$

, luego el período es proporcional a la potencia 1,5 del radio orbital. Como el mismo es mayor para el cuerpo B, éste tiene un período mayor.

32. CL-J01 El satélite, de un determinado planeta de masa *M,* describe a su alrededor una órbita circular de radio *R* con un periodo *T*
a) Obtener la ecuación que relaciona estas tres magnitudes.
b)Marte posee un satélite que describe a su alrededor una órbita circular de radio R = 9400 Km con un periodo 460 minutos. ¿ Cuál es la masa de Marte ?

Resolución:

a) Se sabe que cuando un satélite gira alrededor de un planeta se cumple que la fuerza de atracción gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta.

$$G\frac{M\cancel{m_s}}{R^2} = \cancel{m_s}\frac{v^2}{\cancel{R}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Si a continuación se relaciona la velocidad orbital obtenida con el período, lo que resulta sencillo al tratarse de un MCU, tenemos lo que se nos pide:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\ .\ R^{3/2}}}$$

b) Este apdo no es más que la aplicación a un caso concreto de la relación que acabamos de deducir:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\ .\ R^{3/2} \rightarrow \underline{\underline{M}} = \frac{4\pi^2}{T^2 G} R^3 =$$

$$= \frac{4\pi^2}{\left(460\cancel{min} \times \frac{60s}{\cancel{min}}\right)^2 6{,}672.10^{-11}\frac{N.m^2}{Kg^2}} \left(9{,}410^3\cancel{Km} \times \frac{10^3 m}{\cancel{Km}}\right)^3 = \underline{\underline{6{,}45.10^{23} Kg}}$$

33. CL-S01 Si la masa de un cierto planeta es 1/30 de la masa de la Tierra, y su radio es ½ del radio terrestre, se pide:

a) Valor de la aceleración de la gravedad en dicho planeta

b) Velocidad mínima con que se tiene que lanzar verticalmente un cuerpo desde la superficie del planeta descrito anteriormente, para que dicho cuerpo escape de la fuerza de atracción ejercida sobre aquél.

Resolución:

a) Se ha visto en teoría que el módulo del campo gravitatorio que crea un planeta de masa M y radio R en su superficie viene dado, sino se tiene en cuenta la rotación sobre su eje, por:

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

Tal como se enuncia el ejercicio hay que obtener la gravedad en la superficie de ese planeta relacionándolo con la Tierra:

$$\begin{cases} g_{0P} = \dfrac{GM_P}{R_P^2} = \dfrac{G\frac{M_T}{30}}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} \\ g_{0T} = \dfrac{GM_T}{R_T^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{miembro a miembro}]{\text{dividiendo}} \frac{g_{0P}}{g_{0T}} = \frac{\dfrac{G\frac{M_T}{30}}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2}}{\dfrac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\underline{g_{0P}}} = \overbrace{g_{0T}}^{9{,}8\ m/s^2} \frac{2}{15} = \underline{\underline{1{,}30\widehat{6}\ m/s^2}}$$

b) Se define velocidad de escape como *la mínima velocidad que debe darse a un cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria del planeta o astro.* [En los cálculos que se van a efectuar se supone que en el punto de lanzamiento, sea sobre la superficie del planeta o astro o a una altura sobre él el cuerpo que se lanza está inicialmente (antes de lanzarlo) en reposo,].

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}m_s\left|\vec{v}\right|^2}^{E_c\text{ inicial}=\text{la que se le suministra}}+\overbrace{\left(-\frac{GM_pm_s}{r_i}\right)}^{E_p\text{ inicial}}}_{E_M\text{ en el instante del lanzamiento}}=\underbrace{\overbrace{E_{cf}}^{0}+\overbrace{E_{pf}}^{0}}_{E_M\text{ final}}=0\rightarrow\left|\vec{v}\right|=\boxed{\left|\vec{v}_e\right|=\sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

, donde M es la masa del planeta a cuya atracción gravitatoria se desea escapar y R distancia del punto de lanzamiento al centro del planeta. Evidentemente si ese punto es la superficie del planeta, R, representa su radio. De nuevo para poder calcular esa velocidad en ese planeta debemos relacionarlo con la Tierra:

$$\underline{\underline{\left|\vec{v}_e\right|}}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\overbrace{\boxed{\frac{GM}{R^2}}}^{g_0}\times 2R}=\sqrt{2g_0R}=\sqrt{2\times\frac{2.9,8\,ms^{-2}}{15}\times\frac{\overbrace{\boxed{6,37.10^6 m}}^{\text{Radio Terrestre}}}{2}}=\underline{\underline{2.885\,m/s}}$$

Se ha calculado dicha velocidad suponiendo que el dato es la gravedad y el radio terrestre. Si se diera la masa y el radio terrestre, los cálculos hubiesen sido un poco más sencillos.

34. CL-J06 La masa de Júpiter es 318 veces a de la Tierra y su radio 11 veces el de la Tierra. Su satélite llamado *Io* se mueve en una órbita aproximadamente circular, con un período de1 día, 18 horas y 27 minutos. Calcule:
a) el radio de la órbita de este satélite, su velocidad lineal y su aceleración .
b) la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Júpiter
Datos: G = 6,670.10^{-11} N m^2/kg^2 M$_T$ = 5,98.10^{24} kg R$_T$ = 6,37.10^6 m

Resolución:

a) La fuerza de atracción gravitatoria proporciona la centrípeta. La relación obtenida se va a expresar en función del período orbital (en segundos, naturalmente). En realidad, dicha relación constituye la matematización de la tercera ley de Kepler:

$$G\frac{M_Jm_{Io}}{r^2}=m_{Io}\frac{v^2}{r}=m_{Io}\omega^2r=m_{Io}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r\rightarrow\underline{\underline{r}}=\sqrt[3]{G\underbrace{M_J}_{318M_T}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}=$$

$$=\sqrt[3]{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}\times 318.5,98.10^{24}kg\times\left(\frac{152820s}{2\pi}\right)^2}=\underline{\underline{4,217.10^8 m}}$$

Ya se esta en disposición de obtener tanto la velocidad como la aceleración del satélite Io pues, no se olvide, se supone MCU:

$$\underline{\underline{\left|\vec{v}_{orbital}\right|}}=\frac{2\pi\overbrace{r}^{4,217\times10^8 m}}{\underbrace{T}_{152820s}}=\underline{\underline{17341,4m/s}}$$

$$G\frac{M_J \cancel{m_{Io}}}{r^2} = \cancel{m_{Io}}\frac{v^2}{r} \rightarrow \underline{\underline{|\vec{a}_N|}} = \underbrace{\frac{v^2}{r} = G\frac{M_J}{r^2}}_{\substack{\text{la aceleración normal coincide}\\ \text{SIEMPRE con el valor del campo}\\ \text{gravitatorio que exprerimenta el}\\ \text{satélite en órbita alrededor del}\\ \text{cuerpo que crea el campo}}} = \frac{17341,4^2\,(m/s)^2}{4,217.10^8 m} = \underline{\underline{0,713 m/s^2}}$$

b) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es, como se sabe, el campo gravitatorio que crea Júpiter en su superficie:

$$\underline{\underline{|\vec{g}_0|}} = G\frac{M_J}{R_J^2} = G\frac{318 M_T}{(11 R_T)^2} = 6,67.10^{-11} Nm^2kg^{-2}\,\frac{318\times 5,98.10^{24} kg}{\left(11\times 6,37.10^6\right)^2 m^2} =$$

$$= 25,83 N/kg = \underline{\underline{25,83 ms^{-2}}}$$

35. CL-S09 Júpiter es el mayor planeta del sistema solar. Su masa es 318 veces la masa terrestre, su radio, 11,22 veces el de la Tierra y su distancia al Sol 5,2 veces mayor que la distancia media de la Tierra al Sol. Determine:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter en relación con su valor en la superficie terrestre y el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol, sabiendo que el período terrestre es de 365 días y las órbitas de ambos planetas se consideran circulares.

b) El período y la velocidad orbital de Calisto, su segunda mayor luna, sabiendo que describe una órbita circular de $1,88.10^6$ km de radio

Datos: $R_T = 6,37.10^6$m; $M_T = 5,98.10^{24}$ kg; $g_0 = 9,8$ m/s^2; $G = 6,67.10^{-11}$ Nm^2/kg^2

Resolución:

a) Se trata de relacionar la gravedad en la superficie joviana con la terrestre:

$$\frac{g_{0J}}{g_{0T}} = \frac{\dfrac{\cancel{G}M_J}{R_J^2}}{\dfrac{\cancel{G}M_T}{R_T^2}} = \frac{M_J}{M_T}\times\left(\frac{R_T}{R_J}\right)^2 = 318\times\left(\frac{1}{11,22}\right)^2 = 2,526$$

Luego la gravedad en la superficie de Júpiter es unas dos veces y media mayor que la que existe en la de nuestro planeta.

En la segunda parte nos pide el periodo orbital de Júpiter conocido el nuestro. La tercera ley de Kepler resuelve esta cuestión:

$$G\frac{M_J \cancel{m_C}}{R^2} = \cancel{m_C}\frac{v^2}{\cancel{R}} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM_J}{R}} = \sqrt{\frac{G\times 318 M_T}{R}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6,67\times 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}\times 318\times 5,98.10^{24}kg}{1,88.10^9 m}} = 8213,88 m/s$$

$$\begin{cases} T_J^2 = K r_J^3 \\ T_T^2 = K r_T^3 \end{cases} \xrightarrow[\text{miembro a miembro}]{\text{dividiendo}} \left(\frac{T_J}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{r_J}{r_T}\right)^3 \rightarrow$$

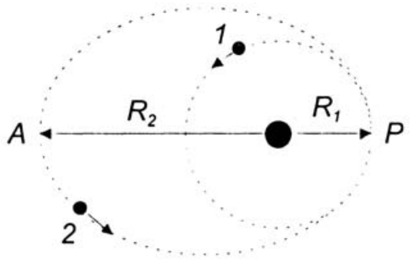
$$\rightarrow \frac{T_J}{T_T} = \left(\frac{r_J}{r_T}\right)^{3/2} \rightarrow T_J = T_T\times\left(\frac{r_J}{r_T}\right)^{3/2} = 365d\times 5,2^{3/2} = 4328,1d$$

b) Como Calisto gira en órbita, que se supone circular alrededor de Júpiter, la fuerza de atracción gravitatoria actúa como centrípeta:

Como ya sabemos la velocidad orbital de Calisto y el radio de la circunferencia que describe alrededor de Júpiter, es inmediato el cálculo del tiempo que tada en describir la circunferencia:

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} = \frac{2\pi\times 1,88.10^9 m}{8213,88 m/s} = 1438102s = 16,6d$$

36. CL-J02 Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $R_1 = 1 \times 10^8$ km con un período de rotación *T_1 = 2 años,* mientras que el planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima es $R_1 = 1 \times 10^8$ km y la más alejada es R_2 = *$1,8 \times 10^8$ km* tal como muestra la figura.



a)Obtener el período de rotación del planeta 2 y la masa de la estrella b)Calcular el cociente entre la velocidad lineal del planeta 2 en los puntos P y A.

Resolución:

a) El período revolución se puede obtener a partir de enunciado de la 3ª ley de Kepler: "Los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de las **distancias medias** de los planetas al sol"

En el caso de una elipse la distancia media es el semieje mayor de la misma, es decir; $\frac{R_1 + R_2}{2} = 1,4.10^8 km$

De la aplicación de la 3ª ley de Kepler resulta:

$$T^2 = Cte \times d^3 \rightarrow \begin{cases} T_1^2 = cte \times d_1^3 \\ T_2^2 = cte \times d_2^3 \end{cases} \xrightarrow[\text{miembro a miembro}]{\text{dividiendo}} \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\underline{T_1}} = T_2\sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3} = 2 \text{ años } \sqrt{\left(\frac{1{,}4\,10^8 km}{1.10^8 km}\right)^3} = \underline{\underline{5{,}488 \text{ años}}}$$

Para hallar la masa de la estrella no hay más que formular la 3ª ley de Kepler incluyendo el valor de la constante de proporcionalidad. Esta ley se deduce teniendo en cuenta que la *fuerza de atracción gravitatoria nos proporciona la fuerza centrípeta*:

$$\overbrace{G\frac{M_E.m_p}{r^2} = m_p\frac{|\vec{v}|^2}{r}}^{\text{operamos con modulos de la fuerza}} = m_p\omega^2 r = m_p\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\underline{M_E}} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{r^3}{G} = \left(\frac{2\pi}{2\times365\times24\times3600 s}\right)^2\frac{\left(10^{11}m\right)^3}{6{,}672.10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}} = \underline{\underline{1{,}487.10^{29} kg}}$$

b) Este último apartado se hace teniendo en cuenta que el *momento angular del planeta en su giro alrededor de la estrella se mantiene constante*, como se va a ver:

$$\underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \rightarrow \frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt}}_{\text{relacion entre el momento angular de una particula y el momento de la fuerza que actua sobre ella}} = \overset{\text{sentidos opuestos}}{\vec{r}\times\vec{F}} = \vec{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\vec{r}\times\vec{p} = \overrightarrow{Cte}}}$$

Si es constante el producto vectorial anterior, también lo será su módulo:

$$|\vec{r}||\vec{p}|\,sen\theta = Cte \rightarrow |\vec{r}|\,m\,|\vec{v}|\,sen\theta = cte \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{\underline{|\vec{r}||\vec{v}|\,sen\theta}} = \frac{Cte}{m} = \underline{\underline{CTE}}$$

Tanto en la posición A(afelio) como en la P (perihelio), el ángulo que forma el vector de posición con la velocidad es de 90º (y el seno vale la unidad): Para esos puntos, la igualdad subrayada toma la forma:

$$|\vec{r}_A||\vec{v}_A| = |\vec{r}_P||\vec{v}_P| \rightarrow \frac{|\vec{v}_A|}{|\vec{v}_P|} = \frac{|\vec{r}_P|}{|\vec{r}_A|} = 1{,}8$$

37. CLS02 a) Si la luz solar tarda en promedio 8,33 minutos en llegar a la Tierra, 12,7 minutos a Marte y 6,1 minutos en alcanzar el planeta Venus, calcular el periodo de rotación, en torno al Sol, de Marte y de Venus.

b) Si la masa de Marte es aproximadamente la décima parte de la de la Tierra y su periodo de rotación entorno a su eje es aproximadamente igual al de la Tierra, calcular el radio de la órbita de un satélite geoestacionario orbitando

sobre el ecuador de Marte.

Resolución:

a) Al darse datos de distancias (el dato directo es el tiempo que tarda la luz en ..pero como se sabe su velocidad...) y de períodos orbitales se está "diciendo" que debe de aplicarse la tercera LEY DE KEPLER:

$$T^2 = Cte \times r^3 \rightarrow \begin{cases} T_P^2 = cte \times r_P^3 \\ T_T^2 = cte \times r_T^3 \end{cases} \xrightarrow[\text{miembro a miembro}]{\text{dividiendo}} \frac{T_P}{T_T} = \sqrt{\left(\frac{r_P}{r_T}\right)^3} \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\rightarrow T_P}} = T_T\sqrt{\left(\frac{r_P}{r_T}\right)^3} = T_T\sqrt{\left(\frac{ct_P}{ct_T}\right)^3} = T_T\sqrt{\left(\frac{t_P}{t_T}\right)^3} = T_T\frac{t_P}{t_T}\sqrt{\frac{t_P}{t_T}}$$

$$\frac{\left\{\left|\vec{g}_0\right|\right\}_{\text{tras reducir radio}}}{\left\{\left|\vec{g}_0\right|\right\}_{\text{real}}} == \underbrace{\boxed{\frac{\dfrac{GM_T}{\left(r_T/2\right)^2}}{\dfrac{GM_T}{r_T^2}}}}_{=4} = \frac{x}{9,8} = 4 \rightarrow \left\{\left|\vec{g}_0\right|\right\}_{\text{tras reducir radio}} = 39,2\ \text{N/kg}$$

Se ha tomado la Tierra de denominador (como referencia) porque de ella se sabe, obviamente, el período orbital (1 año). Observa que al ser los cocientes adimensionales las unidades son las que se prefieran con tal de que sean las mismas para el numerador y el denominador. Si, a modo de ejemplo, se aplica la última relación a Marte, resulta:

$$\underline{\underline{T_{Marte}}} = 1\ \text{año}\,\frac{12,7\cancel{min}}{8,33\cancel{min}}\sqrt{\frac{12,7\cancel{min}}{8,33\cancel{min}}} = \underline{\underline{1,88\ \text{años}}}$$

b) Se va a deducir, en primer lugar, la expresión del radio con el que debe de orbitar un satélite geoestacionario (con el mismo período orbital que el de rotación del planeta) . Como siempre, se parte del hecho de que la fuerza de atracción gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta

$$\overbrace{G\frac{M_P.m_s}{r^2} = m_s\frac{\left|\vec{v}\right|^2}{r}}^{\text{operamos con modulos de la fuerza}} = m_s\omega^2 r = m_s\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \rightarrow \qquad \overbrace{r = \sqrt[3]{\frac{GM_PT^2}{4\pi^2}}}^{\text{con T(período orbital) = período de rotación del planeta para órbita geoestacionaria}} \qquad (1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_M = \sqrt[3]{\dfrac{GM_MT_M^2}{4\pi^2}} \\ r_T = \sqrt[3]{\dfrac{GM_TT_T^2}{4\pi^2}} \end{cases} \rightarrow \frac{r_M}{r_T} = \sqrt[3]{\frac{M_M\cancel{T_M^2}}{M_T\cancel{T_T^2}}} = \sqrt[3]{1/10} \rightarrow r_M = r_T\sqrt[3]{1/10} \quad (2)$$

, si se sustituyen, en (1) los datos para la Tierra, se tiene:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_P T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67\times10^{-11}N.m^2kg^{-2}5,96\times10^{24}kg\left(24\times60\times60\right)^2 s^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 4,22\times10^7 m$$

y, finalmente, al sustituir en (2) se tiene, para el radio de la órbita geoestacionaria, de Marte:

$$\underline{\underline{r_M}} = 4,22\times10^7 m\times\sqrt[3]{1/10} = \underline{\underline{1,96x10^7\ m}}$$

38. **CLJ03 Si la Tierra redujese su radio a la mitad conservando su masa, a) ¿Cual seria la intensidad de la gravedad en su superficie?. b)¿Cuanto valdría la velocidad de escape de su superficie?.**

Resolución:

a) El valor numérico (módulo) del campo gravitatorio que crea la Tierra en su superficie se calcula mediante: $\left|\vec{g}_0\right| = \frac{GM_T}{r_T^2} = 9,8\ N/kg$

Si, conservándose la masa, la Tierra redujese su radio a la mitad, se tendría:

b) Recuerda que, por definición, la velocidad de escape es *la mínima velocidad que debe darse a un cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria del planeta o astro* .En los cálculos que vamos a efectuar se parte, ver enunciado, de lanzamiento desde la superficie del planeta y se supone que el objeto que se lanza está inicialmente (antes de lanzarlo) en reposo, .

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}m_s\left|\vec{v}\right|^2}^{E_c\ \text{inicial} = \text{la que se le suministra}} + \overbrace{\left(-\frac{GM_p m_s}{r_i}\right)}^{E_p\ \text{inicial}}}_{E_M\ \text{en el instante del lanzamiento}} = \underbrace{\overbrace{E_{cf}}^{0} + \overbrace{E_{pf}}^{0}}_{E_M\ \text{final}} = 0 \rightarrow \left|\vec{v}\right| = \boxed{\left|\vec{v}_e\right| = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

, con M igual a la masa del planeta a cuya atracción gravitatoria se desea escapar y R distancia del punto de lanzamiento al centro del planeta. Es claro que si ese punto esta sobre la superficie del planeta, R, representa su radio. Si se sustituyen valores en la expresión obtenida, se tiene:

$$\left|\vec{v}_e\right| = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\times6,67\times10^{-11}N.m^2.kg^{-2}\times5,96\times10^{24}kg}{6370000m/2}} = 15800\ m/s$$

39. **CL-S03 Se lanza un satélite de comunicaciones de masa 500 kg que describe una órbita circular en torno a la Tierra de radio $r = 2R_T$, siendo R_T el radio terrestre.**

a) Calcule la velocidad de traslación y el período de revolución del satélite.
b) Si el lanzamiento se realiza desde un punto del ecuador terrestre y hacia el este, calcule la energía total que se tiene que suministrar al satélite para que alcance dicha órbita.
Resolución:
a) Como siempre, la fuerza centrípeta la proporciona la resultante hacia el centro de la trayectoria. En este caso la única fuerza que actúa sobre el satélite es la de atracción gravitatoria ejercida por la Tierra, con lo que se tiene:

$$\overbrace{G\frac{M_P.\cancel{m_s}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_s}\frac{|\vec{v}|^2}{\cancel{r}}}^{\text{operamos con modulos de la fuerza}} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{2r_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2} \times 5,98.10^{24}kg}{2\times 6,37.10^6 m}} = 5.595,37ms^{-1}$$

Conocida la velocidad y el radio de la órbita es inmediato el cálculo del período:

$$T = \frac{2\pi r}{|\vec{v}|} = \frac{4\pi r_T}{|\vec{v}|} = \frac{4\pi \times 6,37.10^6 m}{5595,37ms^{-1}} = 143.061s$$

b) Para calcular la energía a suministrar hay que tener en cuenta que el satélite, en la posición inicial, no sólo tiene energía potencial gravitatoria sino también cinética (la que tiene en el ecuador):

$$\frac{1}{2}m_s|\vec{v}_{ecuador}|^2 + \overbrace{\left(-\frac{GM_Tm_s}{r_T}\right)}^{E_p \text{ inicial}} + E_{Sumin} = E_{MF} = E_{Órbita} = -\frac{GM_Tm_s}{2r} = -\frac{GM_Tm_s}{4r_T} \rightarrow$$

$$\rightarrow E_{Sumin} = \frac{m_s}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{GM_T}{r_T} - |\vec{v}_{ecuador}|^2\right) =$$

$$= 250kg\left[\frac{3}{2}\times\frac{6,67x10^{-11}Nm^2kg^{-2}\times 5,98.10^{24}kg}{6.37.10^6 m} - \left(\frac{2\pi}{24.60.60s}\times 6.37.10^6 m\right)^2\right] =$$

$$= 2,34x10^{10} J$$

40. CL-J04 La Estación Espacial internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura *h* = 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa *m* = 415 toneladas.
a) Calcule su período de rotación en minutos así como la velocidad con la que se desplaza.
b) ¿Qué energía se necesitará para llevarla desde su órbita actual a otra a una

altura doble?.
Resolución:
a) En esa órbita circular, la fuerza de atracción gravitatoria es la única que actúa sobre la nave y va dirigida hacia el centro:

$$\underbrace{G\frac{M_P.\cancel{m_s}}{r^{\cancel{2}}}=\cancel{m_s}\frac{|\vec{v}|^2}{\cancel{r}}}_{\text{operamos con modulos de la fuerza}}\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{\frac{GM_T}{r}}=\sqrt{\frac{GM_T}{r_T+h}}=$$

$$=\sqrt{\frac{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}\times 5,98.10^{24}kg}{6,76.10^6m}}=7.681,4ms^{-1}$$

Al ser el movimiento circular uniforme, resulta:

$$T=\frac{2\pi r}{|\vec{v}|}=\frac{2\pi(r_T+h)}{|\vec{v}|}=\frac{2\pi\times 6,76.10^6m}{7681,396ms^{-1}}=5529,506s=92,156\min$$

b) La energía a suministrar es, evidentemente, la diferencia entre la que tenga en la órbita final e inicial. Matemáticamente se tiene:

$$\overbrace{E_{m\ (orbita\ inicial)}}^{\substack{\text{Em con la que se iinicia}\\ \text{el cambio de orbita}}}+E_{sumin}=E_{m\ (orbita\ final)}\Rightarrow \underline{\underline{E}}=E_{m\ (orbita\ final)}-E_{m\ (orbita\ inicial)}=$$

$$-\frac{GM_Tm_s}{2r_f}-\left(-\frac{GM_pm_s}{2r_i}\right)=\frac{GM_Tm_s}{2}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right)=\frac{GM_Tm_s}{2}\left(\frac{r_f-r_i}{r_f\times r_i}\right)=$$

$$=\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}.4,15.10^5}{2}Nm^2\left(\frac{\overbrace{r_f-r_i}^{0,39x10^6m}}{7,15.10^6\times 6,76.10^6m^2}\right)$$

$$=6,678x10^{11}J$$

41. **CL-S06 Un pequeño satélite de 1500 kg de masa, gira alrededor de la Luna orbitando en una circunferencia de 3 veces el radio de la Luna.**
a) Calcule el período del satélite y determine la energía mecánica total que posee el satélite en su órbita.
b) Deduzca y calcule la velocidad de escape de la Luna.
Datos: Masa de la Luna: 7,35.10^{22} kg; Radio de la Luna: 1740 km.
Resolución:
a) La velocidad a la que orbita se obtiene considerando que la fuerza que ejerce la Luna sobre el satélite actúa como fuerza centrípeta. Hallada la velocidad, el período es de cálculo inmediato por cuanto al ser el módulo de

la velocidad constante, dicho período se obtiene dividiendo la longitud de la órbita entre la rapidez con la que se recorre.:

$$\overbrace{G\frac{M_L.\cancel{m_s}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_s}\frac{|\vec{v}|^2}{\cancel{r}}}^{\text{operamos con modulos de la fuerza}} \to |\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM_L}{r}} = \sqrt{\frac{GM_L}{3r_L}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2} \times 7,35.10^{22}kg}{3 \times 1,74.10^6 m}} = 969,11ms^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi r}{|\vec{v}|} = \frac{6\pi r_L}{|\vec{v}|} = \frac{6\pi \times 1,74.10^6 \cancel{m}}{969,11\cancel{m}s^{-1}} = 33843,8s$$

Si se expresa la velocidad de satélite en órbita en función del radio de la circunferencia que describe, teniendo en cuenta que la energía mecánica es suma de la cinética y potencial, se obtiene la expresión:

$$E_M = -\frac{GM_L m_s}{2r} = -\frac{GM_L m_s}{6r_L} =$$

$$= -\frac{6,67.10^{-11}Nm^{\cancel{2}}\cancel{kg^{-2}} \times 7,35.10^{22}\cancel{kg} \times 1,5.10^3 kg}{6 \times 1,74.10^6 \cancel{m}} =$$

$$= -7,04.10^8 J$$

b) Para deducir la velocidad de escape hay que recordar que se supone que, en la situación inicial, el satélite está en reposo en la Luna mientras que en la situación final se encuentra "infinitamente" alejada de la misma y sin velocidad ya que la velocidad de escape se define como la velocidad MÍNIMA necesaria para que un objeto, lanzado desde un planeta deje de estar sometido a su acción gravitatoria, es decir; para que se aleje "infinitamente" de él.

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}m_s|\vec{v}|^2}^{E_c \text{ inicial} = \text{la que se le suministra}} + \overbrace{\left(-\frac{GM_L m_s}{r_L}\right)}^{E_p \text{ inicial}}}_{E_M \text{ en el instante del lanzamiento}} = \underbrace{\overbrace{E_{cf}}^{0} + \overbrace{E_{pf}}^{0}}_{E_M \text{ final}} = 0 \to |\vec{v}| =$$

$$= |\vec{v}_e| = \sqrt{\frac{2GM_L}{r_L}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2} \times 7,35.10^{22}kg}{1,74.10^6 m}} =$$

$$= 2373,8ms^{-1}$$

42. AR-J06 Desde la superficie de un planeta esférico sin atmósfera, de radio R = 2,3.10^6 m y masa M = 8,6.10^{23} kg, se dispara un proyectil con velocidad v_0 horizontal, es decir en dirección tangente a la superficie.

a) Calcula el valor de v_0 para que el proyectil describa una órbita circular rasante a la superficie del planeta. ¿Cuál es el periodo de esta órbita?

b) Si el proyectil se dispara con una velocidad doble de la anterior, ¿escapará

de la atracción gravitatoria del planeta? Justifica tu respuesta. Dato: G = 6,67x10^{-11} SI

Resolución:

a) Aplicando ley de conservación de la energía mecánica , la energía inicial (que es potencial) más la que le suministramos en forma de cinética es la final, que corresponde a la energía mecánica de un satélite en órbita de radio igual al del planeta:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}m_s\left|\vec{v}_0\right|^2}^{E_c\ \text{inicial}=\text{la que se le suministra}} + \overbrace{\left(-\frac{GM_pm_s}{r_p}\right)}^{E_p\ \text{inicial}}}_{E_M\ \text{en el instante del lanzamiento}} = \underbrace{-\frac{GM_pm_s}{2r_p}}_{E_M\ \text{en la órbita}} \to \left|\vec{v}_0\right| = \sqrt{\frac{GM_P}{r_P}} =$$

$$\sqrt{\frac{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2} \times 8,6.10^{23}kg}{2,3.10^6 m}} = 4994ms^{-1}$$

El período es sencillo de calcular pues se sabe la longitud de la órbita y el módulo de la velocidad a la que se recorre pues, en este caso, corresponde a la de lanzamiento:

$$T = \frac{2\pi r}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{2\pi 2,3.10^6 \cancel{m}}{4994\cancel{m} / s} = 2894s = 48\min\ \ 14\ s$$

b) La velocidad de escape de un planeta, ver problemas anteriores; viene dada por:

$$= \left|\vec{v}_e\right| = \sqrt{\frac{2GM_p}{r_p}} = \sqrt{2} \times \underbrace{\sqrt{\frac{GM_p}{r_p}}}_{\left|\vec{v}_0\right|} = \sqrt{2}\left|\vec{v}_0\right| < 2\left|\vec{v}_0\right|$$

Como se ve, dicha velocidad es menor que el doble de la obtenida por lo que, si un satélite se lanza con esa velocidad, al ser mayor que la de escape, escapará de la atracción gravitatoria del planeta.

43. MU-S06 Sabiendo que la Luna tiene una masa de 7,358.10^{22} kg y que el campo gravitatorio en su superficie es la sexta parte que en la superficie terrestre, calcule:

a) El radio de la Luna.

b) La longitud de un péndulo en la Luna para que tenga el mismo período que otro péndulo situado en la Tierra y cuya longitud es de 60 cm.

c) El momento angular de la Luna respecto a la Tierra.

Datos: G = 6,678.10^{-11} N m^2/kg^2, distancia Luna-Tierra = 3,848.10^8 m. M$_T$ = 5,97.10^{24} kg

Resolución:

a) Si tomamos 9,8 N/kg para el valor del campo gravitatorio que crea la Tierra en su superficie, se tiene:

$$\left|\vec{g}_{0L}\right| = \frac{9,8}{6} = G\frac{M_L}{r_L^2} \to r_L = \sqrt{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}\,\frac{7,358\times10^{22}kg\times6}{9,8N/kg}} =$$

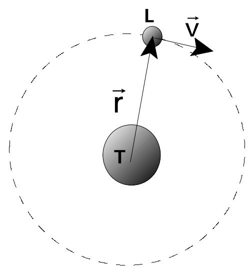
$$= 1,733\times10^6 m$$

b) A partir de la expresión del período de un péndulo simple, resulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \to \left\langle \begin{array}{l} T_T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_T}{g_{0T}}} \\ T_L = 2\pi\sqrt{\dfrac{l_L}{g_{0L}}} \end{array} \right. \xrightarrow[T_T = T_L]{\text{condiciones del enunciado}} \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{\overbrace{l_T}^{0,6m}}{g_{0T}}} = \cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l_L}{\underbrace{g_{0L}}_{g_{0T}/6}}} \to$$

$$\to \left(\sqrt{\frac{\overbrace{l_T}^{0,6m}}{g_{0T}}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{l_L}{\underbrace{g_{0L}}_{g_{0T}/6}}}\right)^2 \to \frac{\overbrace{l_T}^{0,6m}}{g_{0T}} = \frac{l_L}{\underbrace{g_{0L}}_{g_{0T}/6}} \to 0,6 = 6l_L \to l_L = \frac{0,6m}{6} = 0,1m$$

c) En el esquema adjunto re representa, no a escala, evidentemente, a la Luna girando alrededor de la Tierra con velocidad orbital, **v**. Como no se especifica el sentido de la velocidad se ha dibujado este arbitrariamente, por lo que , además, suponemos , que se pide calcular el MÓDULO del momento angular o cinético de la Luna referido a la Tierra. Para calcular el momento angular es necesario conocer la velocidad orbital de la Luna alrededor de la Tierra, que pasamos a obtener:



operamos con modulos de la fuerza

$$G\frac{M_T.\cancel{m_L}}{r_{TL}^{\cancel{2}}} = \cancel{m_L}\frac{\left|\vec{v}\right|^2}{\cancel{r_{TL}}} \to \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\frac{GM_T}{r_{TL}}};$$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}_{TL}\times m_L\vec{v}\right| = \left|\vec{r}_{TL}\right|m_L\left|\vec{v}\right|\overbrace{\text{sen}\underbrace{\left(\vec{r},\vec{v}\right)}_{\pi/2}}^{1} = \left|\vec{r}_{TL}\right|m_L\sqrt{\frac{GM_T}{r_{TL}}} = m_L\sqrt{GM_T\left|\vec{r}_{TL}\right|} =$$

$$7,358\times10^{22}kg\sqrt{6,67.10^{-11}Nm^2kg^{-2}\times5,97.10^{24}kg\times3,848.10^8m} =$$

$$= 2,88.10^{34}kgm^2/s$$

La dirección de dicho vector es perpendicular al plano de la órbita y el sentido (suponiendo que el vector velocidad es como se dibuja), aplicando la regla del sacacorchos, el de alejarse del lector.