1. **(Andalucía, Jun. 2016)** Dos partículas de masas m_1= 3 kg y m_2 = 5 kg se encuentran situadas en los puntos P_1(-2,1) y P_2(3,0), respectivamente. a) Represente el campo gravitatorio resultante en el punto O (0,0) y calcule su valor. b) Calcule el trabajo realizado para desplazar otra partícula de 2 kg desde el punto O (0,0) m hasta el punto P (3,1) m. Justifique si es necesario especificar la trayectoria seguida en dicho desplazamiento. G = 6,67 $\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

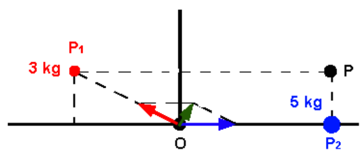
Solución: a) La intensidad de campo gravitatorio en el punto O tendrá dos componentes, que llamaremos $\vec{g_1}$ y $\vec{g_2}$, correspondientes a los campos gravitatorios creados por la masa de 3 y la de 5 kg, respectivamente. Así pues, el campo resultante será: $\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = |\vec{g_1}|\,\vec{u_1} + |\vec{g_2}|\,\vec{u_2}$, siendo:

$$|\vec{g_1}| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{1 + (-2)^2} = 4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N/kg} \qquad |\vec{g_2}| = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{3^2} = 3,7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N/kg}$$

$$\vec{u_1} = \frac{(-2-0)\,\vec{i} + (1-0)\,\vec{j}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{j} \qquad \vec{u_2} = \vec{i}$$

Por todo ello, tendremos que:

$$\vec{g} = |\vec{g_1}|\,\vec{u_1} + |\vec{g_2}|\,\vec{u_2} = 1,22 \cdot 10^{-12}\,\vec{i} + 1,79 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \mathrm{N/kg}$$



b) El trabajo para desplazar una masa de 2 kg desde el punto O al punto P será:

$$W_{OP} = -\Delta U = U_o - U_P$$

Siendo:

$$U_o = -6,67{\cdot}10^{-11}{\cdot}2\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{5}{3}\right) = -4{\cdot}10^{-10}\,\mathrm{J} \qquad U_P = -6,67{\cdot}10^{-11}{\cdot}2\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{1}\right) = -7,67{\cdot}10^{-10}\,\mathrm{J}$$

Por tanto, el trabajo será:

$$W = U_o - U_P = -4 \cdot 10^{-10} - (-7,67 \cdot 10^{-10}) = 3,67 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$$

No es necesario especificar la trayectoria seguida en dicho desplazamiento pues, al ser conservativo el campo gravitatorio, el trabajo entre dos puntos no d pende del camino seguido, sino de las posiciones inicial y final.

2. (**Aragón, Jun. 2016**.) El planeta Júpiter es aproximadamente esférico, de radio R_J = 7,15$\cdot 10^7$ m, y tiene una masa M_J = 1,9$\cdot 10^{27}$ kg. a) Calcule la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter. b) ¿A qué altura h sobre la superficie de Júpiter se reduce el campo gravitatorio al 20 % del valor en la superficie? Datos: Constante de gravitación universal, G = 6,67$\cdot 10^{-11}$N.$m^2 kg^{-2}$.

Solución: a) La aceleración de la gravedad será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9 \cdot 10^{27}}{(7,15 \cdot 10^7)^2} = 24,79\,\mathrm{m/s^2}$$

b) La nueva aceleración de la gravedad será: $g' = 0,2 \cdot 24,79 = 4,96\,m/s^2$, con lo que podremos poner:

$$4,96 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9 \cdot 10^{27}}{r^2}$$

Despejando, obtendremos $r = \sqrt{2,55 \cdot 10^{16}} = 1,6 \cdot 10^8$ m. La altura con respecto a la superficie de Júpiter será:

$$h = r - r_J = 1,6 \cdot 10^8 - 7,15 \cdot 10^7 = 8,83 \cdot 10^7 m$$

3. (**Aragón, Jun. 2016**.) La nave Sputnik 1 fue el primer intento no fallido de poner en órbita un satélite artificial alrededor de la Tierra. Tenía una masa de 83,6 kg y describió una órbita alrededor de la Tierra, que supondremos circular, con un periodo de 96,2 minutos. Calcule: a) La altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encontraba el Sputnik 1. b) Su energía mecánica total (energía cinética más potencial). Datos: Constante de gravitación universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$N.m^2.kg^{-2}; radio de la Tierra, R_T = $6{,}38 \cdot 10^6$ m; masa de la Tierra, M_T = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

Solución: Conocido el periodo (96,2 minutos → 5772 s), podemos hallar el radio de la órbita, aplicando la tercera Ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Despejando r, obtendremos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 5772^2}{4\pi^2}} = 6,96 \cdot 10^6 \text{ m}$$

la altura respecto a la superficie terrestre será: $h = r - r_T = 6,96 \cdot 10^6 - 6,38 \cdot 10^6 = 5,8 \cdot 10^5$ m b)

La energía total será:

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 83,6}{2 \cdot 6,96 \cdot 10^6} = -2,39 \cdot 10^6 \text{ J}$$

4. **(Aragón, Sept. 2016)** Un satélite de masa m = 250 kg está en órbita circular en torno a la Tierra a una altura h = 500 km sobre su superficie. Calcule: a) Su velocidad y su período de revolución. b) La energía necesaria para poner el satélite en órbita con esa velocidad. Datos: Constante de gravitación universal, G = $6{,}67.10^{-11}$N.m^2.kg^{-2}; masa de la Tierra, M_T= $5{,}97.10^{24}$kg; radio de la Tierra, R_T = $6{,}37.10^6$ m.

Solución: a) La velocidad de la órbita es:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5}} = 7613,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El periodo se obtendrá de la forma:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)}{7613,3} = 5669,7 \text{ s}$$

b) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía::

$$-\frac{GMm}{r_T} + E_c = -\frac{GMm}{2r}$$

Sustituyendo valores, obtenemos la energía que debe aplicarse:

$$E_c = \frac{GMm}{r_T} - \frac{GMm}{2r} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 250 \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2(6,37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)}\right) = 8,38 \cdot 10^9 \text{ J}$$

5. **(Aragón, Sept. 2016)** Las órbitas de dos de los planetas de la estrella Cervantes (1), llamados Quijote y Sancho, tienen radios de 1,54 U.A. y 0,93 U.A. respectivamente. Quijote tarda 646 días en dar una vuelta alrededor de Cervantes. Calcule el periodo orbital de Sancho. b Obtenga la relación entre las velocidades orbitales de Quijote y Sancho.

(1) En diciembre de 2015 la Unión Astronómica Internacional, tras una votación popular, bautizó a la estrella µArae con el nombre de Cervantes. Alrededor de ella orbitan los planetas Dulcinea, Quijote, Sancho y Rocinante.

Solución: El periodo de rotación de un planeta alrededor de una estrella viene expresado por:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

Por lo cual podremos escribir:

$$T_Q = 646 \cdot 86400 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_Q^3}{GM_C}} \qquad T_S = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_S^3}{GM_C}}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{646 \cdot 86400}{T_S} = \sqrt{\frac{r_Q^3}{r_S^3}} = \sqrt{\frac{1,54^3}{0,93^3}} = 2,13 \longrightarrow T_S = \frac{646 \cdot 86400}{2,13} = 2,62 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$$

La relación entre las velocidades orbitales será:

$$\frac{v_Q}{v_S} = \sqrt{\frac{\frac{GM_C}{r_Q}}{\frac{GM_C}{r_S}}} = \sqrt{\frac{r_S}{r_Q}} = \sqrt{\frac{0,93}{1,53}} = 0,78$$

6. (**Asturias, Jun. 2016**.) Dos planetas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta A se mueve en una órbita circular de 10^8 km de radio y 2 años de período. El otro planeta, B, lo hace en una órbita elíptica, siendo la distancia en la posición más cercana a la estrella 10^8 km y en la más alejada $2{\cdot}10^8$ km. a) Calcular la masa de la estrella. b) Determinar el período de movimiento del planeta B . Datos: constante G = $6{,}67{\cdot}10^{-11}$ N·m^2/kg^2.

Solución: Los datos para los dos planetas, expresados en el Sistema internacional son, respectivamente:

$$A\left\{\begin{array}{c} r_A = 10^{11}\mathrm{m} \\ T_A = 2 \cdot 365 \cdot 86400 \simeq 6,31 \cdot 10^7\mathrm{s} \end{array}\right. \qquad B\left\{\begin{array}{c} r_B = \dfrac{10^{11} + 2 \cdot 10^{11}}{2} = 1,5 \cdot 10^{11}\mathrm{m} \\ T_B \end{array}\right.$$

El valor de r_B es la media aritmética de las distancias más cercana y más lejana a la estrella. a)

Aplicando la 3ª Ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Despejamos M, obteniendo:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 10^{33}}{6,67 \cdot 10^{-11}(6,31 \cdot 10^7)^2} \simeq 1,49 \cdot 10^{29}\mathrm{kg}$$

b) Aplicando nuevamente la Tercera Ley de Kepler:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(1,5 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,49 \cdot 10^{29}}} = 1,16 \cdot 10^8\mathrm{s}$$

7. **(Asturias, Jul. 2016)** La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 318 veces la de la Tierra, y su diámetro es 11 veces mayor. Con estos datos, calcula el peso que tendrá en Júpiter una astronauta cuyo peso en la Tierra sea de 750 N.

Solución: El peso de un cuerpo viene dado por la siguiente expresión:

$$P = mg = \frac{GM}{R^2}$$

Aplicando esta expresión a la Tierra y a Júpiter, tendremos:

$$750 = \frac{GM_T}{R_T^2} \qquad P_J = \frac{G \cdot 318 M_T}{121 R_T^2}$$

Dividiendo miembro a miembro la segunda igualdad entre la primera, se obtiene:

$$\frac{P_J}{750} = \frac{318}{121} \qquad \text{Por lo que :} \qquad \mathrm{P_J = 1971\,N}$$

8. **(Asturias, Jul. 2016)** Si la masa del Sol es aproximadamente $2 \cdot 10^{30}$ kg y el radio de la órbita que describe la tierra en su movimiento (supuesto circular) alrededor del sol es $1{,}5 \cdot 10^8$ km, deduce el período de traslación de la Tierra alrededor del Sol. Expresa el resultado en el sistema internacional y en días (2,5 puntos). Dato: Constante de la gravitación universal G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2.

Solución: Aplicando la tercera ley de Kepler**:**

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(1,5 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}} = 3,16 \cdot 10^7 s$$

Que expresado en días será:

$$T = \frac{3,16 \cdot 10^7 s}{86400\, s/día} = 365,78\, días$$

9. **(Asturias, Jul. 2016)** Un satélite de masa m = 250 kg describe una órbita circular sobre el ecuador de la Tierra, a una distancia tal que su período orbital coincide con el de rotación de la Tierra (satélite geoestacionario). Calcula: a) La altura a la que se encuentra el satélite respecto a la superficie terrestre. b) La energía mínima necesaria para situarlo en dicha órbita. Datos: constante G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2; radio de la Tierra R_T=$6{,}40 \cdot 10^6$ m; masa de la Tierra M_T= $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

Solución: a) A partir de la tercera ley de Kepler, se deduce el valor del radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

La altura respecto a la superficie terrestre será:

$$h = r - r_T = 4,22 \cdot 10^7 - 6,4 \cdot 10^6 = 3,58 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

b) La energía en la órbita será:

$$E = \frac{-GMm}{2r} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 250}{2 \cdot 4,22 \cdot 10^7} = -1,18 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$$

Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$\frac{-GMm}{r_T} + E = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 250}{6,4 \cdot 10^6} + E = -1,18 \cdot 10^9$$

Despejando, se obtiene:

$$E = 6,6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

10. **(Asturias, Jul. 2016)** Calcula la distancia Tierra-Luna, con el dato que la Luna tarda 28 días en su órbita circular alrededor de la Tierra (2,5 puntos). Datos: g_0=9,8 m/s^2; radio de la Tierra R_T=6370 km.

Solución: A partir de la tercera ley de Kepler, se deduce:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Conociendo el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, se puede obtener el producto GM:

$$9,8 = \frac{GM}{(6,37 \cdot 10^6)^2} \qquad GM = 3,98 \cdot 10^{14} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$$

$$r = r = \sqrt[3]{\frac{3,98 \cdot 10^{14}(28 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} = 3,89 \cdot 10^8 \text{ m}$$

11. **(Baleares, Jun. 2016)** Una de las lunas de Júpiter, Ío, sigue una órbita de radio 4,22·10^8 m con un período de 1,55·10^5 s. a) Halle el radio de la órbita de Calisto, otro satélite de Júpiter, que tiene un período de 1,44·10^6 s. b) Calcule la masa de Júpiter. c) El radio de Júpiter es 11; 2 veces el radio terrestre, que vale 6 370 km. Determine el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter. Dato: G = 6,67·10^{-11} N· m^2· kg^{-2}

Solución: a) A partir de la tercera ley de Kepler, que relaciona el radio de una órbita con el periodo de la misma, podremos poner

$$\frac{T^2_{Ío}}{T^2_{Cal.}} = \frac{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3_{Io}}{GM_J}}}{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3_{Cal.}}{GM_J}}} = \frac{\sqrt{r^3_{Io}}}{\sqrt{r^3_{Cal.}}}$$

Despejando, tendremos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{r^3_{Io} T^2_{Cal.}}{T^2_{Io}}} = \sqrt[3]{\frac{(4,22 \cdot 10^8)^3 (1,44 \cdot 10^6)^2}{(1,55 \cdot 10^5)^2}} = 1,88 \cdot 10^9 \text{ m}$$

b) Conocido el valor de G, tendremos:

$$M_J = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (4,22 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (1,55 \cdot 10^5)^2} = 1,85 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

c) La aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter será:

$$g = \frac{GM_j}{r^2_J} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,85 \cdot 10^{27}}{(11,2 \cdot 6,37 \cdot 10^6)^2} = 24,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

12. **(Baleares, Jun.2016)** La estación espacial ISS da vueltas a la Tierra con un período de 90 minutos. Considerando que sigue una órbita aproximadamente circular, a) ¿A qué altura por encima de la superficie terrestre se encuentra la estación espacial ISS? (R_T = 6 370 km) b) ¿A qué velocidad se desplaza? c) Sabiendo que la masa de la estación es de 419 400 kg aproximadamente, ¿cuál es su peso mientras está en órbita?

Solución: a) Conocido el radio de la Tierra y la aceleración de la gravedad en su superficie, g = 9,8 m/s^2, podremos hallar el valor de GM:

$$GM = 9,8(6,37 \cdot 10^6)^2 = 3,98 \cdot 10^{14}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler y despejando el valor del radio:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{3,98 \cdot 10^{14} \cdot 5400^2}{4\pi^2}} = 6,65 \cdot 10^6 \,\mathrm{m}$$

La altura por encima de la superficie terrestre será: h = r - r_T = $6,65 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 2,8 \cdot 10^5$ **m**

b) La velocidad d la órbita será:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{3,98 \cdot 10^{14}}{6,65 \cdot 10^6}} = 7336 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

c) El peso tendrá el valor:

$$P = \frac{GMm}{r^2} = \frac{3,98 \cdot 10^{14} \cdot 419400}{(6,65 \cdot 10^6)^2} = 3,77 \cdot 10^6 \,\mathrm{N}$$

13. (**Canarias, Jun. 2016**) Un satélite meteorológico de 2000 kg de masa, se encuentra a una altura de 36000 km por encima del Ecuador, describiendo una órbita circular geoestacionaria en torno a la Tierra. Calcule: a) La velocidad y la energía del satélite en su órbita. b) La aceleración y el peso del satélite en su órbita. c) Después de un tiempo de funcionamiento, el satélite pierde energía y se mueve en una nueva órbita circular, con una energía total de -9.526·10^9 J ¿con qué velocidad lo hace? Datos: G = 6.67×10^{-11} N $m^2 kg^{-2}$; M_{Tierra}= 5.98·10^{24} kg; R_{Tierra}= 6370 km

Solución: a) La velocidad viene expresada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6 + 3,6 \cdot 10^7)}} = 3068,2 \,\mathrm{m/s}$$

La energía total será:

$$E = E_c + U = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2000}{2(6,37 \cdot 10^6 + 3,6 \cdot 10^7)} = -9,41 \cdot 10^9 \,\mathrm{J}$$

b) La aceleración del satélite tendrá la expresión:

$$g' = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6 + 3,6 \cdot 10^7)^2} = 0,22 \,\mathrm{m/s^2}$$

El peso tendrá el valor:

$$P = mg' = 2000 \cdot 0,22 = 440 \,\mathrm{N}$$

c) La expresión de la energía cinética es la misma que la de la energía total, cambiada de signo, es decir:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \qquad \mathrm{con\,lo\,cual:} \qquad \mathrm{v} = \sqrt{\frac{-2\mathrm{E}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,526 \cdot 10^9}{2000}} = 3086,42 \,\mathrm{m/s}$$

14. (**Cantabria, Jun. 2016**) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta P es de 49.05 m/s^2 y su masa es 2500 veces la masa de la Tierra. a) Hallar el radio del planeta P. b) Hallar la velocidad de escape desde la superficie del planeta P. Datos: Masa de la Tierra: M_T = 5.98 10^{24} kg; Radio de la Tierra: R_T = 6 370 km; Gravedad en la superficie de la Tierra: g = 9.81 m s^{-2}.

Solución: a) Para calcular la masa partimos de la expresión de la aceleración de la gravedad:

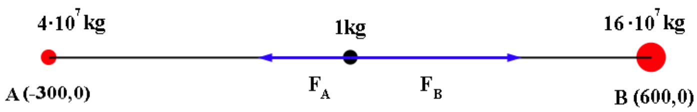
$$g = 49,05 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2500}{r^2}$$

Despejando, se obtiene: $r = 1,426 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$
b) La expresión de la velocidad de escape de un planeta es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 2500}{1,426 \cdot 10^8}} = 118260\,\mathrm{m/s}$$

15. (**Cantabria, Jun. 2016**) Dos cuerpos, A y B, el cuerpo A de masa 4.0 10^7 kg y el cuerpo B de masa 16.0 10^7 kg, se encuentran fijos en dos puntos del plano (X,Y), el cuerpo A en el punto (–300, 0) y el cuerpo B en el punto (600, 0), con las distancias dadas en metros. En el punto (0, 0) se encuentra situada una esfera de masa 1 kg. a) Hallar la fuerza gravitatoria ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera. b) Calcular el trabajo necesario para llevar la esfera desde el punto (0, 0) hasta el punto (0, 10).

Solución: a) La fuerza gravitatoria sobre la masa de 1 kg es la resultante de las fuerzas F_A y F_B que puede verse en el siguiente esquema: Las fuerzas valdrán, respectivamente:



$$\overrightarrow{F_A} = \frac{GM_A m}{r_A^2}(-\overrightarrow{i}) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 1}{300^2}(-\overrightarrow{i}) = -2,96 \cdot 10^{-8}\overrightarrow{i}\,\mathrm{N}$$

$$\overrightarrow{F_B} = \frac{GM_B m}{r_B^2}\overrightarrow{i} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 16 \cdot 10^7 \cdot 1}{600^2}\overrightarrow{i} = 2,96 \cdot 10^{-8}\overrightarrow{i}\,\mathrm{N}$$

La fuerza resultante será: $\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = 0\,\mathrm{N}$
b) La energía potencial en el punto (0,0) será:

$$U_0 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 1}{300} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 16 \cdot 10^7 \cdot 1}{600} = -2,668 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

Mientras que, en el punto (0,10) tendrá el valor:

$$U_1 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 1}{\sqrt{300^2+10^2}} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 16 \cdot 10^7 \cdot 1}{\sqrt{600^2+10^2}} = -2,668 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

Al ser iguales las energía potenciales inicial y final, el trabajo realizado para llevar la masa de 1 kg desde el punto (0,0) hasta el punto (0,10) es nulo.

16. (**Castilla La Mancha, Jun. 2016**) Ceres es un planeta enano, el mayor objeto del cinturón de asteroides, que tarda 4.60 años terrestres en completar una vuelta alrededor del Sol. El diámetro medio y la masa de Ceres son 952.4 km y 9.43.10^{20} kg, respectivamente. a) Admitiendo que describe una órbita circular, calcular la distancia de Ceres al Sol. b) Calcular la aceleración de la gravedad y la velocidad de escape desde la superficie de Ceres, suponiendo que se trata de un cuerpo esférico homogéneo. c) Basándonos en datos conocidos de Ceres, calcular la masa del Sol en kg. Datos. Constante de gravitación G = 6.67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}. Distancia Tierra-Sol, d = 149.6.10^6 km. 1 año = 31557600 s.

Solución: a) La tercera Ley de Kepler relaciona el cuadrado del periodo de revolución con el cubo de la distancia media, según la expresión:

$$T^2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

Si dividimos miembro a miembro los cuadrados de los periodos de revolución de Ceres y de la Tierra, tendremos:

$$\frac{T_C^2}{T_T^2} = \frac{\dfrac{4\pi^2 r_C^3}{GM_S}}{\dfrac{4\pi^2 r_T^3}{GM_S}} = \frac{r_C^3}{r_T^3} = \frac{(4,6 \cdot r_T)^2}{r_T^2} = 4,6^2$$

Con lo que tendremos:

$$r_C = \sqrt[3]{4,6^2} \cdot r_T = \sqrt[3]{4,6^2} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} = 4,138 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$

b) La aceleración de la gravedad será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9,4310^{20}}{(4,762 \cdot 10^5)^2} = 0,28\,\mathrm{m/s^2}$$

La velocidad de escape es:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9,43 \cdot 10^{20}}{4,762 \cdot 10^5}} = 513,96\,\mathrm{m/s}$$

Aplicando la tercera Ley de Kepler:

$$(4,6 \cdot 31557600)^2 = \frac{4\pi^2(4,138 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot M_S}$$

Despejando, obtendremos: $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$

17. **(Castilla la Mancha, Sept. 2016)** Dos satélites artificiales describen órbitas circulares alrededor de un planeta de radio R, siendo los radios de sus órbitas respectivas 1,05R y 1.512R. ¿Cuál es la relación entre las velocidades orbitales de ambos satélites? ¿Qué satélite lleva mayor velocidad?

Solución: El cociente entre las velocidades orbitales será:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\dfrac{GM}{r_1}}{\dfrac{GM}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{1,512}{1,05}} = 1,2$$

Llevará mayor velocidad el satélite más cercano al planeta.

18. **(Castilla la Mancha, Sept. 2016)** Un satélite artificial de masa m = 500 kg se encuentra en órbita ecuatorial geoestacionaria. a) Determinar cuál es la velocidad angular del satélite y a qué altura se encuentra por encima de la superficie de la Tierra. b) Explicar y calcular qué energía deberíamos suministrar a este satélite en su órbita para alejarlo indefinidamente de la Tierra de modo que alcanzase el infinito con velocidad cero. c) Supongamos un meteorito que se acerca a la Tierra viajando a 20 km/s cuando está a la misma distancia que el satélite geoestacionario. ¿Con qué velocidad se estrellará contra la superficie? (Despreciamos los efectos de rozamiento con la atmósfera). Datos. Constante de gravitación G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}. Datos de la Tierra: masa M = $5.98 \cdot 10^{24}$kg; radio R = 6370 km; periodo rotación T = 86400 s.

Solución: a) La velocidad angular del satélite es:

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7,27 \cdot 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

De la expresión de la Tercera Ley de Kepler se deduce el radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4\pi^2}} = 4,225 \cdot 10^7\text{m}$$

La altura del satélite respecto a la superficie terrestre es; $h = r - r_T = 4,225 \cdot 10^7 - 6,37 \cdot 10^6 = 3,59 \cdot 10^7$ m

b) La energía del satélite en la órbita es:

$$E = E_c + U = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 500}{2 \cdot 4,225 \cdot 10^7} = -2,36 \cdot 10^9\text{ J}$$

Para llegar al infinito con velocidad nula, tendremos:

$$-2,36 \cdot 10^9 + E_c = 0 \qquad \text{por lo cual :} \qquad E : c = 2,36 \cdot 10^9\text{ J}$$

c) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$-\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{GMm}{r_T} + \frac{1}{2}mv^2$$

Despejando y sustituyendo valore, tendremos:

$$v = \sqrt{2\left[\frac{1}{2}(2 \cdot 10^4)^2 + 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}\left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{4,225 \cdot 10^7}\right)\right]} = 22502\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

19. **(Castilla y León, Jun. 2016)** La Luna se mueve alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular de radio 3,84·10^8 m y periodo 27,32 días. a) Calcule la velocidad y la aceleración de la Luna respecto a la Tierra y realice un esquema de la trayectoria en el que se muestren ambos vectores. b) Si desde la superficie terrestre se lanza un objeto verticalmente con una velocidad inicial igual a la mitad de su velocidad de escape, ¿qué altura máxima alcanzará sin tener en cuenta el efecto de la atmósfera? Datos: G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; M$_T$ = 5,98·10^{24} kg

Solución: a) La velocidad de la órbita será:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67{\cdot}10^{-11}5,98 \cdot 10^{24}}{3,84 \cdot 10^8}} = 1019,2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67{\cdot}10^{-11}5,98 \cdot 10^{24}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} = 2,7 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) La velocidad de lanzamiento será:

$$v = \frac{\sqrt{\frac{2GM}{r}}}{2} = 5468\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Aplicando el Principio de Conservación de la Energía, tendremos:

$$-\frac{GMm}{r_T} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2r}$$

Sustituyendo valores:

$$-\frac{6,67{\cdot}10^{-11}5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}5468^{22} = -\frac{6,67{\cdot}10^{-11}5,98 \cdot 10^{24}}{2r}$$

Obteniéndose al despejar el siguiente valor:

$$r = 4,18 \cdot 10^6\text{ m}$$

20. **(Castilla y León, Sept. 2016)** El radio del planeta Marte mide 3400 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es g_0 = 3,7 m s^{-2} a) Determine la masa del planeta y la velocidad de escape desde la superficie. b) ¿A qué altura desde la superficie deberá situarse un satélite para que recorra una órbita circular en un día marciano de 24,6 horas? Dato: G $= 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Solución: a) La aceleración de la gravedad es:

$$g_0 = \frac{GM}{r_M^2} \longrightarrow GM = g_0 r_M^2 = 3,7\,(3,4 \cdot 10^6)^2 = 4,277 \cdot 10^{13}$$

La masa de Marte será:

$$M = \frac{GM}{G} = \frac{4,277 \cdot 10^{13}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,41 \cdot 10^{23}\,\text{kg}$$

La velocidad de escape será:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,277 \cdot 10^{13}}{3,4 \cdot 10^6}} = 5016\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El periodo de rotación será: T $= 24,6 \cdot 86400 = 2,125 \cdot 10^6$ s. Aplicando la Tercera Ley de Kepler y despejando;

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{4,227 \cdot 10^{13}(2,125 \cdot 10^6)^2}{4\pi^2}} = 1,69 \cdot 10^8\,\text{m}$$

La altura respecto a la superficie de Marte será: $h = r - r_M = 1,69 \cdot 10^8 - 3,4 \cdot 10^6 = 1,656 \cdot 10^8\,\text{m}$

21. (**Cataluña, Jun. 2016**) Uno de los posibles agujeros negros más próximos a la Tierra es A0620-00, que está situado a 3500 años luz. Se calcula que la masa de este agujero negro es de $2{,}2 \cdot 10^{31}$ kg. A pesar de que A0620-00 no es visible, se ha detectado una estrella que describe órbitas circulares con un periodo orbital de 0,33 días respecto a un lugar en donde no se detecta ningún otro cuerpo celeste. a) Deduzca la fórmula para obtener el radio de una órbita circular a partir de las magnitudes proporcionadas. Utilice esta fórmula para calcular el radio de la órbita de la estrella que se mueve alrededor de A0620-00. b) Calcule la velocidad lineal y la aceleración centrípeta de la estrella y represente ambos vectores sobre una figura semejante a la del enunciado. Dato: Constante de gravitación G $= 6.67 \cdot 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$.

Solución: a) Un cuerpo que describe una órbita circular alrededor de otro está sometido a una fuerza centrípeta, cumpliéndose que:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

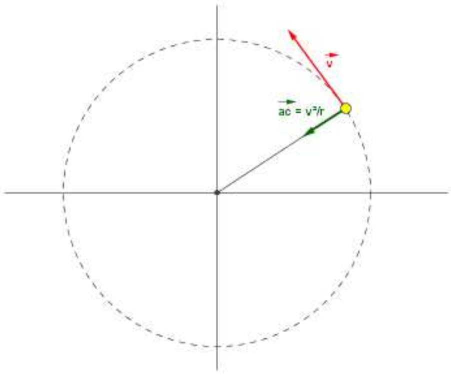
Igualando los términos primero y último, tendremos:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

Despejando el radio de la órbita, tendremos que:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{31}(0,33 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} = 3,11 \cdot 10^9\text{m}$$

b) Los vectores velocidad lineal y aceleración centrípeta de la estrella se representan en la siguiente imagen:



Conocidos el radio de la órbita y su periodo, calculamos la velocidad lineal.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{31}}{3,11 \cdot 10^9}} = 6,87 \cdot 10^5 \text{m/s}$$

La aceleración centrípeta, v^2/r será:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(6,87 \cdot 10^5)^2}{3,11 \cdot 10^9} = 151,76\,\text{m/s}^2$$

22. **(Cataluña, Sept. 2016)** El 6 de agosto de 2012, el robot Curiosity fue depositado sobre la superficie de Marte por una cápsula de entrada atmosférica ideada por el Mars Science Laboratory. Esta cápsula inició la entrada a la atmósfera a 125 km de la superficie de Marte y con una velocidad de 5 845 m s^{-1}. Las técnicas usadas en el descenso hicieron que el vehículo llegase a la superficie marciana a una velocidad de solo 0,60 m s^{-1}. Teniendo en cuenta que la masa del Curiosity es de 899 kg, calcule: a) El incremento de la energía mecánica del vehículo en el descenso. b) El módulo de la intensidad del campo gravitatorio que ejerce Marte en el punto inicial del descenso del Curiosity y la fuerza (módulo, dirección y sentido) que ejerce el planeta sobre el robot en ese punto. Datos: Masa de Marte, M_{Marte}= 6,42 × 10^{23} kg. Radio de Marte, R_{Marte} = 3,39 × 10^6 m. G = 6,67 × 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

Solución: a) La energía inicial del robot es:

$$E_0 = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 899}{(3,39 \cdot 10^6 + 1,25 \cdot 10^5)} + \frac{1}{2}899 \cdot 5845^2 = 4,40 \cdot 10^9\,\text{J}$$

La energía final será.:

$$E = -\frac{GMm}{r_M} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 899}{3,39 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}899 \cdot 0,6^2 = -1,13 \cdot 10^{10}\,\text{J}$$

Con lo que el incremento de energía será: $\Delta E = E - E_0 = -1,13 \cdot 10^{10} - 4,40 \cdot 10^9 = -1,57 \cdot 10^{10}\,\text{J}$

b) El módulo de la intensidad del campo gravitatorio será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{(3,39 \cdot 10^6 + 1,25 \cdot 10^5)^2} = 3,46\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El módulo de la fuerza ejercida será: $\left|\overrightarrow{F}\right| = m\,|\overrightarrow{g}| = 899 \cdot 3,46 = 3,11 \cdot 10^3\,\text{N}$. La dirección es la de la recta que une Marte con el robot y el sentido es el de este último hacia Marte.

23. (**Extremadura, Jun. 2016**) Un planeta hipotético describe una órbita circular alrededor del Sol, con un radio tres veces mayor que el de la órbita terrestre, y una masa también el triple de la masa de la Tierra. Calcule cuántos años terrestres tardaría en describir su órbita. Dato: 1 año terrestre = 365 días.

Solución: El cuadrado del periodo de un planeta que gira alrededor del Sol viene expresado por:

$$T^2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

Si dividimos miembro a miembro los cuadrados de los periodos de rotación de la Tierra y del planeta, tendremos:

$$\frac{T_T^2}{T_p^2} = \frac{\sqrt{\frac{4\pi^2 r_T^3}{GM_S}}}{\sqrt{\frac{4\pi^2 r_p^3}{GM_S}}} = \frac{r_T^3}{r_p^3} = \frac{r_T^3}{(3r_T)^3} = \frac{1}{27}$$

Con lo que, finalmente, se obtiene:

$$T_p = T_T\sqrt{27}$$

24. **(Extremadura, Jul 2016)** El planeta Saturno tiene una masa 95,2 veces mayor que la de la Tierra y un radio de 9,47 veces mayor que el radio de la Tierra. Calcule la velocidad de escape para un objeto. a) Sobre la superficie de la Tierra. b) Sobre la superficie de Saturno. Datos: masa de la Tierra = $5{,}98{\cdot}10^{24}$ kg; radio de la Tierra = $6,37 \cdot 10^6$ m; constante de Gravitación Universal: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$N· m^2·kg^{-2}

Solución: a) La velocidad de escape para la superficie terrestre es:

$$v_{eT} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}} = 11190\,\mathrm{m \cdot s^{-,1}}$$

b)Para la Superficie de Saturno, tendremos:

$$v_{eS} = \sqrt{\frac{2GM_S}{R_S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 95,2 \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{9,47 \cdot 6,37 \cdot 10^6}} = 34479\,\mathrm{m \cdot s^{-,1}}$$

25. **(Extremadura, Jul 2016)** Dos masas de 15000 y 40000 kg se atraen con una fuerza gravitatoria de 0,0002 N. Calcular: a) La distancia de separación entre ambas masas. b) La intensidad del campo gravitatorio a 4 m de distancia de la primera masa dentro de la recta que los une. Dato: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$N· m^2·kg^{-2}.

Solución: a) Aplicando la expresión que nos da la fuerza entre dos masas:

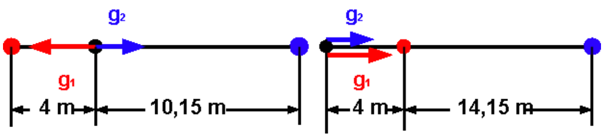
$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad 0,0002 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^4}{r^2}$$

Despejando, obtenemos una distancia $r = 14,15$ **m**.
b) La distancia de 4 m puede considerarse tanto a la derecha como a la izquierda de la masa de 15000 kg, por lo que el problemas admite dos planteamientos y, por tanto, dos soluciones. Suponiendo, en primer lugar, que el punto se encuentra sobre el segmento que une las dos masas, tendremos:

$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,5 \cdot 10^4}{4^2}\vec{i} + \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^4}{10,15^2}\vec{i} = -3,66 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{N/kg}$$

Mientras que en el segundo caso:

$$\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,5 \cdot 10^4}{4^2}\vec{i} + \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^4}{18,15^2}\vec{i} = 7,06 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{N/kg}$$



26. (**La Rioja, Jun. 2016**) En la superficie de cierto planeta, la aceleración de la gravedad vale 15 m/s^2. El radio del planeta es $\sqrt{6,67}\cdot 10^3$km. Obtén: a) La intensidad del campo gravitatorio en su superficie, expresada en N/kg. b) La masa del planeta. c) La fuerza de atracción del planeta sobre un astronauta que se encuentre a $\sqrt{6,67}\cdot 10^3$km sobre la superficie del planeta.Dato: G = 6.67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}.

Solución: a) La intensidad de campo gravitatorio en la superficie del planeta coincide con la aceleración de la gravedad en ese punto. La ecuación de dimensiones de g será:

$$[g] = \left[\frac{GM}{r^2}\right] = \frac{MLT^{-2}}{M} = LT^{-2}$$

Que coincide con la ecuación de dimensiones de la aceleración, LT^{-2}
b) la masa del planeta se obtiene de:

$$g = 15 = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot M}{(\sqrt{6,67}\cdot 10^6)^2}$$

Despejando, obtenemos: $M = 1,5\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
c) La fuerza de atracción será:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 1,5\cdot 10^{24}\cdot m}{(\sqrt{6,67}\cdot 10^6 + \sqrt{6,67}\cdot 10^6)^2} = 15\,m\,\mathrm{N}$$

27. **(La Rioja, Jul. 2016)** Se lanza verticalmente un satélite con una cierta velocidad, v_0. Calcular: a) El valor de v_0 para que el satélite alcance una altura de 600 km. b) En el instante en que el satélite alcanza dicha altura máxima, se le comunica una velocidad v_t perpendicular a la vertical, de manera que el satélite pasa a describir una trayectoria circular alrededor de la Tierra, de 600 km de altura. Calcular el valor de esa velocidad v_t . Dato: Radio de la Tierra = 6370 km.

Solución: a) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía, tendremos:

$$-\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{(r_T + 6\cdot 10^5)}$$

Conocido el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre:

$$9,8 = \frac{GM}{6,37\cdot 10^6} \longrightarrow GM = 4\cdot 10^{14}$$

$$v = \sqrt{2\cdot 4\cdot 10^{14}\left(\frac{1}{6,4\cdot 10^6} - \frac{1}{7\cdot 10^6}\right)} = 3273,3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

b) La energía total será:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Despejando, obtendremos:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{4\cdot 10^{14}}{7\cdot 10^6}} = 7559\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

28. **(La Rioja, Jul. 2016)** Ío es un satélite de Júpiter que tiene un periodo de rotación de 1,77 días y cuyo radio orbital es de $4,22 \cdot 10^8$ km. Determinar la masa de Júpiter. Dato: G $= 6,67 \cdot 10^{-11}$N$\cdot$ m$^2\cdot$kg^{-2}

Solución: Despejando la masa de la tercera ley de Kepler:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(4,22\cdot 10^8)^3}{6,67\cdot 10^{-11}(1,77\cdot 86400)^2} = 1,90\cdot 10^{27}\text{kg}$$

29. (**Madrid, Jun. 2016**) El planeta Marte, en su movimiento alrededor del Sol, describe una órbita elíptica. El punto de la órbita más cercano al Sol, perihelio, se encuentra a 206,7$\cdot 10^6$ km, mientras que el punto de la órbita más alejado del Sol, afelio, está a 249,2$\cdot 10^6$ km. Si la velocidad de Marte en el perihelio es de 26,50 km s^{-1}, determine: a) La velocidad de Marte en el afelio. b) La energía mecánica total de Marte en el afelio. Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67$\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de Marte, M_M = 6,42$\cdot$ 10^{23} kg; Masa del Sol M_S = 1,99$\cdot 10^{30}$ kg.

Solución: a) El momento de la fuerza ejercida por el Sol sobre el planeta, $\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, puesto que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección. Teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{M_0} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \vec{r}\times m\vec{v} = cte. \text{ y } \vec{r}\times\vec{v} = \text{cte.}$$

Podemos ver que el producto de la distancia por la velocidad es constante. Así pues, tendremos que:

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

Despejando, tendremos:

$$v_a = \frac{r_p\cdot v_p}{r_a} = \frac{2,067\cdot 10^{11}\cdot 2,65\cdot 10^4}{2,49\cdot 10^{11}} = 2,2\cdot 10^4\,\text{m/s}$$

b) La energía mecánica total será:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 1,99\cdot 10^{30}\cdot 6,42\cdot 10^{23}}{2\cdot 2,492\cdot 10^{11}} = -1,71\cdot 10^{32}\,\text{J}$$

30. (**Madrid, Jun. 2016**) Un astronauta utiliza un muelle de constante elástica k = 327 N m^{-1} para determinar la aceleración de la gravedad en la Tierra y en Marte. El astronauta coloca en posición vertical el muelle y cuelga de uno de sus extremos una masa de 1 kg hasta alcanzar el equilibrio. Observa que en la superficie de la Tierra el muelle se alarga 3 cm y en la de Marte sólo 1,13 cm. a) Si el astronauta tiene una masa de 90 kg, determine la masa adicional que debe añadirse para que su peso en Marte sea igual que en la Tierra. b) Calcule la masa de la Tierra suponiendo que es esférica. Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6.67**.**10^{-11} N**.**m^2**.**kg^{-2}, Radio de la Tierra, R_T= 6.37$\cdot 10^6$m.

Solución: a) Teniendo en cuenta que, al colgar una masa de un muelle se cumple que: $mg = Kx$, podremos poner:

$$kx_1 = 1\cdot g_T \rightarrow 327\cdot 3\cdot 10^{-2} = g_t = 9,81\,\text{m/s}^2$$
$$kx_2 = 1\cdot g_M \rightarrow 327\cdot 1,13\cdot 10^{-2} = g_t = 3,69\,\text{m/s}^2$$

Se cumplirá, pues, que:

$$mg_T = (m+m')g_M \rightarrow 90\cdot 9,81 = (90+m')3,69$$

Despejando, obtenemos $m' = 148,94\,\text{kg}$
b) La aceleración de la gravedad es:

$$g = 9,81 = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot M}{(6,37\cdot 10^6)^2}$$

Despejando, obtenemos: $M = 5,97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$

31. **(Madrid, Sept. 2016)** Desde la superficie de un planeta de masa 6,42·10^{23} kg y radio 4500 km se lanza verticalmente hacia arriba un objeto. a) Determine la altura máxima que alcanza el objeto si es lanzado con una velocidad inicial de 2 km s^{-1}. b) En el punto más alto se le transfiere el momento lineal adecuado para que describa una órbita circular a esa altura. ¿Qué velocidad tendrá el objeto en dicha órbita circular? Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

Solución: a) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía:

$$-\frac{GMm}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{GMm}{r} + 0$$

$$-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{4,5 \cdot 10^6} + \frac{1}{2}2000^2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{r} \longrightarrow r = 5,697 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

b) La velocidad orbital será:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{5,697 \cdot 10^6}} = 2,74 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

32. **(Madrid, Sept. 2106)** Una estrella gira alrededor de un objeto estelar con un periodo de 28 días terrestres siguiendo una órbita circular de radio 0,45·10^8 km. a) Determine la masa del objeto estelar. b) Si el diámetro del objeto estelar es 200 km, ¿cuál será el valor de la gravedad en su superficie? Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

Solución: a) Aplicando la Tercera Ley de Kepler, y despejando la masa, tendremos:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(4,5 \cdot 10^{10})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}(28 \cdot 86400)^2} = 9,216 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

b) El valor de la gravedad será:

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9,216 \cdot 10^{30}}{(10^5)^2} = 6,147 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

33. **(Navarra, Jun. 2016)** Dos satélites de masas m_1 y m_2 ($m_1 = 2m_2$) orbitan alrededor de la Tierra en órbitas circulares de radios R_1 y R_2 ($R_1 = R_2/2$), respectivamente. Decir, explicando la respuesta, si son correctas las afirmaciones siguientes: a) tienen el mismo momento angular. b) tienen la misma energía potencial. c) tienen la misma energía mecánica.

Solución: a) El momento angular será: L = rmv, por lo que su valor será, para cada uno de los satélites:

$$L_1 = \frac{R_2}{2}2m_2v_1 \qquad L_2 = R_2m_2v_2$$

El momento angular sería el mismo si $v_1 = v_2$. No obstante, puesto que la velocidad de una órbita es:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

veremos que, al ser diferentes las velocidades, los momentos angulares también lo son. La afirmación es falsa.

b) La energía potencial tiene la expresión:

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

por lo que, las respectivas energía potenciales serán:

$$U_1 = -\frac{2GMm_2}{R_2/2} = -\frac{4GMm_2}{R_2} \quad \text{y} \quad U_2 = -\frac{GMm_2}{R_2}$$

La afirmación es falsa.
c) La energía mecánica tiene la expresión:

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

$$E_1 = -\frac{2GMm_2}{R_2} \quad \text{y} \quad \mathrm{E}_2 = -\frac{\mathrm{GMm}_2}{\mathrm{R}_2}$$

La energía mecánica es diferente en ambos casos. La afirmación es, por tanto, falsa.

34. **(Navarra, Jun. 2016)** Un satélite de 200 kg se coloca en una órbita circular alrededor de la Tierra, a 200 km de la superficie de la misma. a) ¿Cuánto tarda el satélite en completar una órbita? b) ¿Cuál es la velocidad del satélite? c) Cuál fue la energía cinética del satélite en el lanzamiento desde la superficie de la Tierra? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $\mathrm{M}_{Tierra} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra = 6370 km.

Solución: a) El periodo del satélite es:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(6,37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 5298\,\mathrm{s}$$

b) La velocidad del satélite es:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5}} = 7792\,\mathrm{m/s}$$

c) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía::

$$-\frac{GMm}{r_T} + E_c = -\frac{GMm}{2r}$$

Sustituyendo valores:

$$E_c = \frac{GMm}{r_T} - \frac{GMm}{2r} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200 \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2(6,37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5)}\right) = 6,45 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$$

35. **(Navarra, Sept. 2016)** El radio de la Luna es aproximadamente una cuarta parte del radio de la Tierra y la densidad de la Luna es unas tres quintas partes de la densidad de la Tierra. Obtener la relación entre las velocidades de escape en la Tierra y en la Luna.

Solución: Las masas de la Tierra y de la Luna serán, respectivamente:

$$M_T = \frac{4}{3}\pi r_T^3 d_T \quad \text{y} \quad M_L = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_T}{4}\right)^3 \frac{3}{5} d_T$$

El cociente entre las velocidades de escape de la Tierra y la Luna será:

$$\frac{v_T}{v_L} = \sqrt{\frac{\frac{2GM_T}{r_T}}{\frac{2GM_L}{r_L}}} = \sqrt{\frac{M_T r_L}{M_L r_T}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi r_T^3 d_T \cdot \frac{r_T}{4}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_T}{4}\right)^3 \frac{3}{5} d_T r_T}} = \sqrt{\frac{80}{3}} = 5,16$$

:

36. **(Navarra, Sept. 2016)** Un planeta tiene un diámetro de 51100 km y el valor del campo gravitatorio en su superficie es de 8,69 m/s^2. a) Calcular la masa del planeta. Si un satélite describe una órbita circular a una altura de 20000 km sobre su superficie, b) Calcular el periodo del satélite al describir la órbita. c) ¿Con qué velocidad fue lanzado desde la superficie del planeta para alcanzar esta órbita?(Navarra, Sept. 2016)

Solución: En primer lugar, calculamos el radio del planeta, cuyo valor es: $r = 5,11 \cdot 10^7/2 = 2,555 \cdot 10^7$ m.
a) Sabiendo que el campo gravitatorio tiene la expresión:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Al sustituir, nos queda:

$$8,69 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot M}{(2,555 \cdot 10^7)^2} \quad \text{obteniéndose :} \quad \mathrm{M} = 8,50 \cdot 10^{25}\,\mathrm{kg}$$

b) El periodo de rotación se puede calcular así:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(2,555 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 8,50 \cdot 10^{25}}} = 25653\,\mathrm{s}$$

c) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía::

$$-\frac{GMm}{r_p} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2r}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r_p} - \frac{GMm}{2r} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 8,50 \cdot 10^{25}\left(\frac{1}{2,555 \cdot 10^7} - \frac{1}{2(2,555 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^7)}\right)$$

Obteniéndose finalmente v = 17869,8 m $\cdot$ s^{-1}

37. (**País Vasco, Jun. 2016**)La Estación Espacial Internacional (ISS) orbita a una altura media de 340 km sobre la superficie terrestre. a) Determinar la velocidad orbital y el periodo de la ISS. b) Determinar el peso y la energía mecánica de la ISS en su órbita. c) Teniendo en cuenta que la distancia Tierra-Luna es de 380000 km, determinar cuánto tarda la Luna en dar una vuelta completa a la Tierra. Datos: Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6.6·710^{-11} N.m^2.kg^{-2}, Radio de la Tierra, R$_T$= 6.37·10^{6}m, Masa de la ISS = 420000 kg, Masa de la Tierra, M$_T$ = 6· 10^{24}kg.
Solución: a) La velocidad orbital está expresada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,67 \cdot 10^6 + 3,4 \cdot 10^5}} = 7722,4\,\mathrm{m/s}$$

b) Para hallar el peso, necesitamos conocer la aceleración de la gravedad:

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6,67 \cdot 10^6 + 3,4 \cdot 10^5)^2} = 8,89\,\mathrm{m/s^2}$$

El peso será: $P = mg = 4,2 \cdot 10^5 \cdot 8,89 = 3,73 \cdot 10^6$ N. La energía mecánica se halla a partir de la expresión:

$$E = -\frac{GMm}{2r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 4,2 \cdot 10^5}{2(6,67 \cdot 10^6 + 3,4 \cdot 10^5)^2} = -1,25 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J}$$

c) Para hallar el periodo de rotación:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(3,8 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} = 2,33 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$$

38. **(País Vasco, Jul. 2016)** Sea un proyectil de masa m = 1000 kg situado en la superficie terrestre. a) ¿Con qué velocidad debiera lanzarse verticalmente para alcanzar una altura h = R_T? (Se supone nulo el rozamiento atmosférico). b) Calcular el peso del proyectil a dicha altura y la velocidad tangencial necesaria para que el proyectil describa una órbita circular a esa altura (R_T). c) ¿Cuánta energía se necesita para transferir el proyectil desde esa órbita circula de altura R_T hasta otra de altura h = 2 R_T? Datos: G = $6.67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}, Radio de la Tierra, R_T= $6.37{\cdot}10^6$m. Masa de la Tierra = $6{\cdot}10^{24}$ kg.

Solución: a) Para alcanzar una altura R_T, la distancia total al centro de la Tierra será $2R_T$. Aplicando el Principio de Conservación de la Energía, tendremos:

$$-\frac{GMm}{R_T}+\frac{1}{2}mv^2=-\frac{GMm}{2r_T}$$

De donde se obtiene:

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{6,37\cdot 10^6}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=7907,7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

b) El peso será:

$$P=mg=1000\,\frac{GM}{(2R_T)^2}=\frac{1000\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{(2\cdot 6,37\cdot 10^6)^2}=2465,7\,\mathrm{N}$$

La velocidad tangencial para que el satélite describa una órbita circular a esa altura será:

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{2\cdot 6,37\cdot 10^6}}=5604,7\,\mathrm{m}{\cdot}s^{-1}$$

c) La energía necesaria se calcula a partir de:

$$-\frac{GMm}{4R_T}+E=-\frac{GMm}{6R_T}\qquad E=\frac{GMm}{R_T}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

$$E=\frac{1000\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{12\cdot 6,37\cdot 10^6}=5,22\cdot 10^9\,\mathrm{J}$$

39. (**Comunidad Valenciana, Jun. 2016**) Se sitúan dos cuerpos de masas respectivas m_1 =2 kg, y m_2= 4 kg en dos de los vértices de un triángulo equilátero de 2 m de lado. Calcula: a) El campo gravitatorio en el tercer vértice, P(0, $\sqrt{3}$), debido a cada una de las masas, y el campo total. b) La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m_3= 5 g, situada en P y, el trabajo necesario para trasladarla hasta el infinito. Dato: G = $6.67{\cdot}10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

Solución: En el punto P, cada una de las masas m_1 y m_2 crea un campo gravitatorio, que representaremos por $\vec{g_1}$ y por $\vec{g_2}$, respectivamente.
a) Para hallar $\vec{g}$, utilizaremos la expresión:

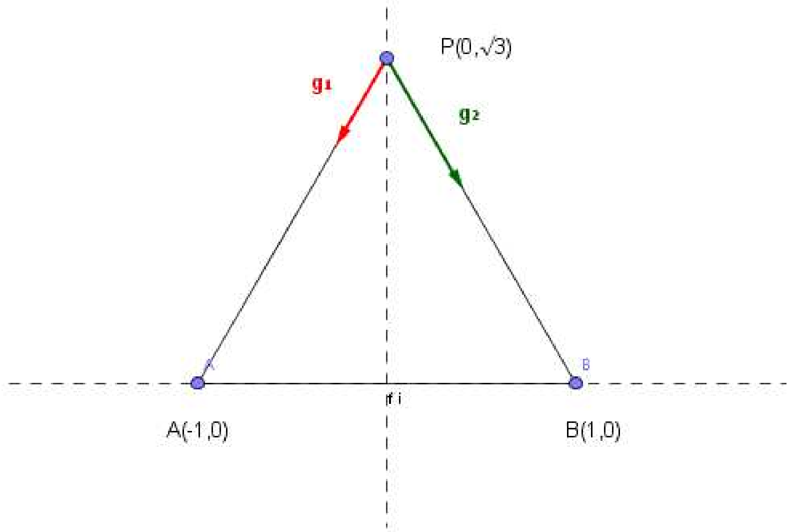
$$\vec{g}=\frac{GMm}{r^2}\vec{u}$$

Siendo $\vec{u}$ un vector unitario. Para hallar los vectores unitarios $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$, tendremos:

$$\vec{u_1}=\frac{(0-1)\,\vec{i}+(0-\sqrt{3})\,\vec{j}}{2}=\frac{-\vec{i}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\quad \text{y}\quad \vec{u_2}=\frac{(1-0)\,\vec{i}+(0-\sqrt{3})\,\vec{j}}{2}=\frac{\vec{i}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

Así pues, tendremos que:

$$\vec{g_1}=\frac{GM_1m}{r_1^2}\vec{u_1}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 2}{2^2}\left(\frac{-\vec{i}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)\ \text{y}\ \vec{g_2}=\frac{\mathrm{GM_2m}}{\mathrm{r}_2^2}\vec{u_2}=\frac{-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 4}{2^2}\left(\frac{\vec{i}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$$



Siendo la intensidad de campo resultante:

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} = 3,33 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{i} - 8,66 \cdot 10^{-11}\overrightarrow{j}$$

b) La energía potencial en la posición inicial es:

$$U_0 = -\frac{GM_1m}{r_1} - \frac{GM_2m}{r_2} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} 5 \cdot 10^{-3}}{2}(2+4) = -10^{-12}\,\mathrm{J}$$

En el infinito, la energía potencial es: $U_\infty = 0$, por lo que podremos poner: $U_0 + W = 0$. Despejando, tendremos que $W = -U_0 = 10^{-12}$ J

40. (**Comunidad Valenciana, Jun. 2016**) El planeta Júpiter tarda 4300 días terrestres en describir una órbita alrededor del Sol. Calcula el radio de esa órbita suponiendo que es circular. Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6.67·10^{-11} N m^{2}kg^{-2}; Masa del Sol, M$_S$= 2,00·10^{30}kg

Solución: Aplicando la Tercera Ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Obtendremos que:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}(4300 \cdot 86400)^2}{4\pi^2}} = 7,775 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$

41. **(Comunidad Valenciana, Jul. 2016)** Deduce razonadamente la expresión de la velocidad de escape de un planeta de radio R y masa M . Calcula la velocidad de escape del planeta Marte, sabiendo que su radio es de 3380 km y su densidad media es de 4000 kg/m^3 . Dato: constante de gravitación universal, 6,67·10^{-11}N m^{2}kg^{-2}

Solución: a) Aplicando el Principio de Conservación de la Energía, tendremos que:

$$U_0 + E_{c0} = U + E_c = 0 \qquad -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

Despejando, tendremos:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

b) La velocidad de escape de Marte será:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4000 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi(3,38 \cdot 10^6)^3}{3,38 \cdot 10^6}} = 5053\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

42. **(Comunidad Valenciana, Jul. 2016)** ¿A qué altura desde la superficie terrestre, la intensidad del campo gravitatorio se reduce a la cuarta parte de su valor sobre dicha superficie? Razona la respuesta. Dato: radio de la Tierra, 6370 km **.**

Solución: La aceleración de la gravedad a una altura r será:

$$g = \frac{g_0}{4} = \frac{GM}{r^2} \qquad \text{Por lo cual :} \qquad r^2 = \frac{4GM}{g_0} = \frac{4GM}{\frac{GM}{r_t^2}} = 4r_t^2$$

$$r = 2r_T \quad \text{y} \quad h = r - r_T = 2r_T - r_T = 6,37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$$