# 5 SÓLIDO RÍGIDO

Con esta lección, finalizamos el bloque de dinámica. Aplicaremos ahora los resultados obtenidos al estudiar un sistema de partículas a un caso concreto, el sólido rígido. Se trata de un sistema ideal, que constituye un valioso modelo en el estudio del movimiento de los cuerpos poco deformables, como es el caso de la mayoría de los sólidos.

Como sabemos, el movimiento de un sólido indeformable puede ser descompuesto en dos:

— El movimiento de traslación del sólido como un todo, esto es, el movimiento del CM, cuyo estudio ya se ha realizado en el tema anterior.
— El movimiento de rotación del sólido respecto a su centro de masas.

Al haber estudiado ya el movimiento de traslación, centraremos nuestra atención en el estudio de los movimientos de rotación del cuerpo, esto es, en la dinámica de rotación.

Para ello, tendremos que establecer un conjunto de ecuaciones y principios capaces de describir el movimiento de rotación; es decir, tendremos que elaborar un esquema formal que desempeñe en la dinámica de rotación el mismo papel que la ley fundamental de la dinámica, el principio de conservación de la cantidad de movimiento, etc., desempeñan en la dinámica de traslación.

Comenzaremos determinando cuál es el agente dinámico en una rotación; una vez caracterizado, analizaremos su relación con los cambios producidos en las rotaciones. Surgirá así una nueva magnitud, el momento de inercia, que va a desempeñar un papel similar al que le corresponde a la masa en los movimientos de traslación.

Por último, la aplicación al modelo «sólido rigido» de los conocimientos de que disponemos sobre energía cinética de un sistema de partículas completará el estudio de su movimiento.

## 1. QUÉ ES Y CÓMO SE MUEVE UN SÓLIDO RÍGIDO

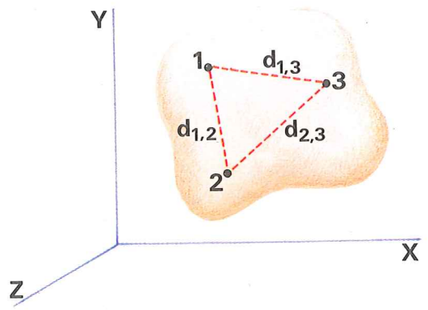
Un sólido rígido es aquel cuerpo cuya forma no se modifica mientras se mueve, aunque esté sometido a la acción de una fuerza.

Por tanto, en un sólido rígido, la distancia entre sus partes permanece inalterada a lo largo del tiempo.

En realidad, los sólidos rígidos no existen. Todos los cuerpos se deforman en cierta medida al estar sometidos a la acción de fuerzas que actúan sobre ellos.

Al suponer que los cuerpos son totalmente rígidos, establecemos un modelo con el que estudiar la realidad.

No obstante, la mayoría de los sólidos no suelen presentar alteraciones observables en su forma cuando actúa sobre ellos una fuerza, como ocurre con una bola metálica o una rueda.

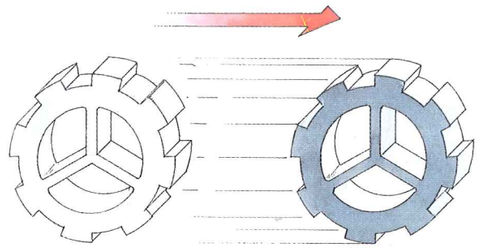



Un sólido rígido es aquel en el que la distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo permanece constante.



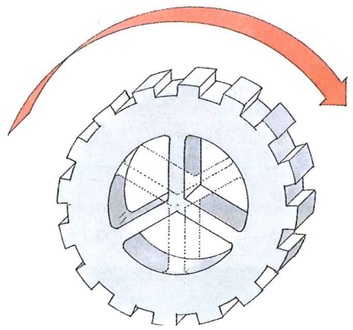
Puesto que vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo rígido, analicemos previamente cómo puede ser dicho movimiento.

El cuerpo puede trasladarse sin girar sobre sí mismo:



Como se trata de un cuerpo rígido, todas sus partes se trasladan en cada instante con la misma velocidad y aceleración.

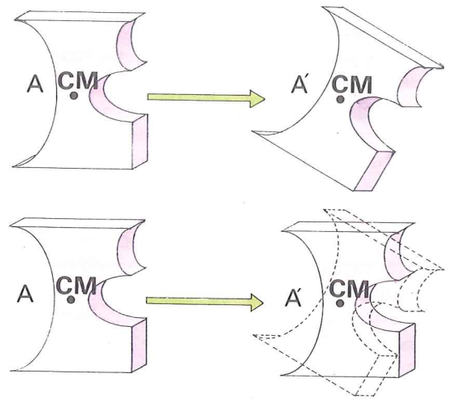
El cuerpo puede asimismo girar en torno a un eje sin desplazarse.



En este caso, la rigidez del cuerpo nos asegura que todo él se moverá con la misma velocidad angular, actuando la misma aceleración angular en cada instante. Sin embargo, la velocidad y la aceleración lineal no serán iguales para todos los puntos del cuerpo: las partes más alejadas del eje girarán con mayor velocidad.

Por último, el movimiento más general del cuerpo es aquel en el que éste gira y se traslada simultáneamente.

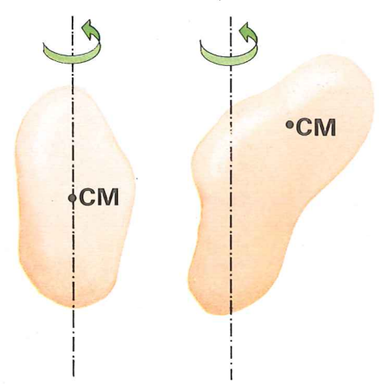
Este movimiento podemos considerarlo como la combinación de una traslación y una rotación. El movimiento del cuerpo de la figura puede considerarse como la combinación de una traslación del centro de masas desde $A$ hasta $A'$ y una rotación en $A'$, respecto al CM.




El movimiento de traslación del sólido rígido ha sido estudiado en el tema anterior, al considerar el movimiento de traslación del cuerpo como el de un punto, el CM, en el que se supone concentrada toda su masa. Por tanto, analizaremos ahora el movimiento de rotación del sólido alrededor de un eje, al que denominaremos **eje de rotación.**

Para simplificar el estudio, consideraremos que el eje de rotación pasa por el sólido, en la mayoría de los casos, por el CM del cuerpo, aunque en el transcurso de la lección veremos qué sucede cuando el eje de rotación no pasa por dicho punto.

Sin perder rigor en nuestro estudio, podemos suponer que el eje de rotación permanece fijo, ya que si no fuese así, siempre podríamos encontrar un sistema de referencia (el del CM) respecto al cual el sólido sólo girase sin que existiesen traslaciones.




En esas condiciones, cada partícula del sólido describe un movimiento circular alrededor del eje de giro.

Si fijamos ahora el origen de un sistema de referencia sobre el eje de giro, una partícula *i*, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_i$, describirá un movimiento circular, cuya velocidad angular viene dada por:

$$\omega = \frac{d\,\phi}{dt}$$

donde $\Phi$ es el ángulo girado en ese tiempo.

La velocidad angular podemos representarla como un vector, perpendicular al plano del movimiento, cuyo sentido es el de avance de un tornillo que girase como el cuerpo.

Recuerda que si $\mathbf{v}_i$ es la velocidad lineal de la partícula respecto a *O*,

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

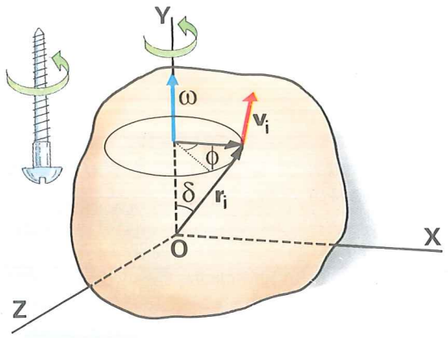
Observa que $\boldsymbol{\omega}$ se expresa sin subíndice, ya que al considerar el cuerpo rígido, todas sus partículas giran con la misma velocidad angular.

Por tanto, la rotación del sólido podemos caracterizarla por el vector velocidad angular, alineado con el eje de giro y con el sentido que se ha indicado.

Si la rotación no es uniforme, aparecerá una aceleración angular:

$$\alpha = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

La aceleración angular es un vector con la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$, siendo su sentido el de $\boldsymbol{\omega}$ si ésta aumenta o el contrario si $\boldsymbol{\omega}$ disminuye.



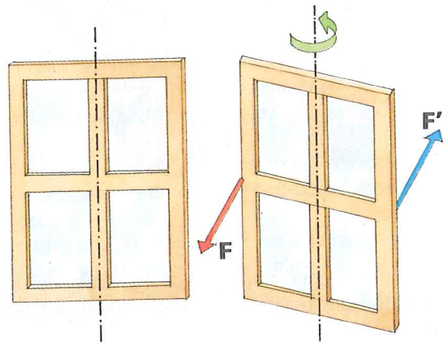

EJERCICIO

1. *Cierto objeto de forma esférica gira, suspendido de un hilo, con una velocidad angular de 0,1 rad/s. Calcula la velocidad de traslación lineal de un punto de su superficie, si está situado:*
   *a) Sobre el eje de giro.*
   *b) En un punto separado una distancia igual al radio del eje de giro.*
   *c) En un punto equidistante de los dos anteriores.*
   *El radio de la esfera es 10 cm.*

   Sol.: *0 m/s; 0,01 m/s; 0,007 m/s.*

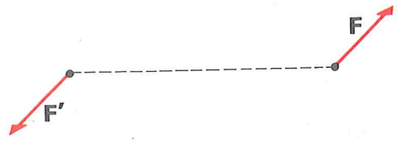
## 2. QUIÉN PROVOCA LAS ROTACIONES

Supón que deseas hacer girar al objeto de la figura, inicialmente en reposo, en torno al eje dibujado. ¿Cómo procederías?



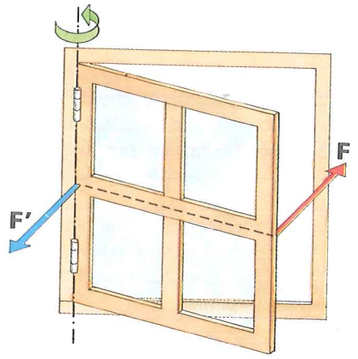

Observa que si el cuerpo no está apoyado en ningún otro objeto, la acción de una única fuerza sólo sirve para desplazarlo, pero nunca para hacer que gire. La respuesta es sencilla: bastaría con aplicar dos fuerzas **F** y **F′** como las que se indican en el dibujo, para conseguir el giro que se pretende. Para provocar una rotación es necesario el concurso de un **par de fuerzas.**

El par de fuerzas está constituido por dos fuerzas iguales, paralelas y de sentido opuesto, cuyos puntos de aplicación están separados cierta distancia.






Si el eje sobre el que deseamos que gire el cuerpo está fijo, parece que basta con una fuerza para conseguir el giro; es lo que ocurre con una puerta al abrirla. Pero se trata sólo de una apariencia, ya que al estar el eje fijo, cuando apliquemos una fuerza, aparecerá sobre los puntos del cuerpo en contacto con el eje otra fuerza igual y de sentido opuesto, ejercida por el eje, de tal modo que el giro resulta originado por un par de fuerzas.




Para caracterizar los pares de fuerza se define una nueva magnitud vectorial, el momento del par, **M.**

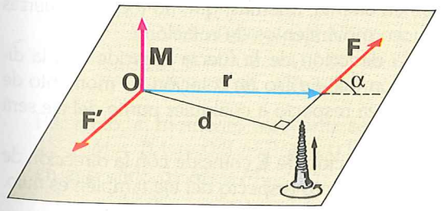
Si *O* es el punto de aplicación de una de las fuerzas del par y **r** es un vector cuyo origen es *O* y cuyo extremo es el punto de aplicación de la otra fuerza, el momento del par es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

**M** es un vector que coincide con el momento del vector **F,** y cuyo módulo,

$$M = F \cdot r \cdot \operatorname{sen} \alpha = F \cdot d$$

resulta ser el producto de una de las fuerzas por la distancia perpendicular que las separa.




De ese modo, el momento del par respecto a un punto fijo *O,* es una magnitud vectorial, perpendicular al plano formado por **r** y **F,** cuyo sentido viene dado por la regla de avance del tornillo.

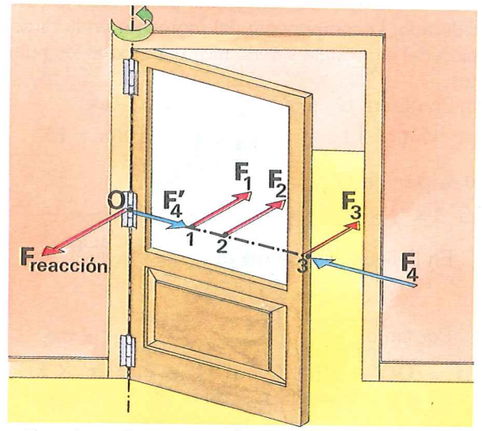
En situaciones semejantes a la de la apertura de una puerta, es decir, cuando se ejerce una única fuerza y donde la otra fuerza del par es la reacción ejercida por el eje fijo, se suele hablar de momento de la fuerza respecto al punto fijo, punto en el que actúa la fuerza de reacción.

La definición de momento de una fuerza nos permite calcular qué valor toma la magnitud causante de una rotación; cuanto mayor sea el momento, mayor será la rotación que produce. Observa que el momento aumenta cuando aumenta la fuerza aplicada, pero también cuando aumenta la distancia **r.** Por tanto, podemos obtener una velocidad angular de rotación elevada ejerciendo una fuerza pequeña, siempre que se aplique adecuadamente. Ten sin embargo en cuenta que también influye la posición relativa de **r** y **F** (es decir, del ángulo que formen estos dos vectores).

EJEMPLO

Considera el caso de una puerta que puede girar sobre sus bisagras y que se encuentra inicialmente en reposo.

Imaginemos que aplicamos las fuerzas representadas en la figura.



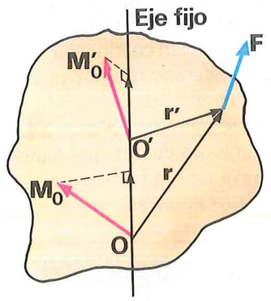

Para hacerla girar, podemos aplicar la fuerza en cualquiera de las posiciones indicadas.

Si aplicamos la misma fuerza en todos los casos, observaremos que la aceleración angular del giro es mayor cuanto más elejada esté la fuerza del eje de giro, lo cual, según nuestra definición, se corres-

ponde con el mayor valor del momento del par, por ser mayor la distancia al eje de giro, donde se produce la reacción.

Hay fuerzas que, por intensas que sean, no provocan ningún giro. Tal es el caso de la fuerza $\mathbf{F}_4$, puesto que ésta se anula con la reacción del eje, al coincidir sus direcciones con la línea de acción. Por tanto, no constituyen ningún par.

En el transcurso del tema manejaremos cuerpos que giran respecto a un eje fijo, en vez de girar respecto a un punto fijo. En ese caso, el momento de la fuerza depende del punto del eje que se considere:




El momento de $\mathbf{F}$ respecto a $O$ es diferente del momento de $\mathbf{F}$ respecto a $O'$, pero sus componentes en la dirección del eje son iguales.

No obstante, sea cual sea el punto del eje considerado, la componente del momento en la dirección del eje resulta ser idéntica para todos los puntos.

En efecto, el momento respecto a $O$ es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

y respecto a $O'$,

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$$

En la figura se observa que:

$$\mathbf{r} = \overline{\mathbf{OO'}} + \mathbf{r}'$$

Por tanto,

$$\mathbf{M} = (\overline{\mathbf{OO'}} + \mathbf{r}') \times \mathbf{F} = (\overline{\mathbf{OO'}} \times \mathbf{F}) + (\mathbf{r}' \times \mathbf{F}) = (\overline{\mathbf{OO'}} \times \mathbf{F}) + \mathbf{M}'$$

Sin embargo, el vector $\overline{\mathbf{OO'}}$ está situado sobre el eje, de modo que el vector $(\overline{\mathbf{OO'}} \times \mathbf{F})$, al ser perpendicular a $\overline{\mathbf{OO'}}$ y a $\mathbf{F}$, no tiene ninguna componente según el eje. Se deduce entonces que las componentes de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ sobre el eje de giro son iguales.

Para un eje fijo, se define **el momento de la fuerza respecto al eje** como la componente en la dirección del eje, del momento de la fuerza respecto de cualquier punto de éste.

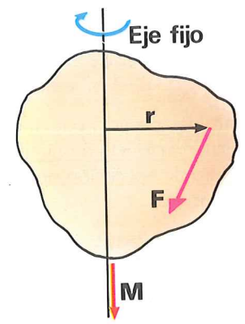
Al ser el momento de la fuerza respecto a un eje fijo independiente del punto del eje que se considere, elegiremos por conveniencia el punto más próximo al punto de aplicación de la fuerza. Ese punto ($O$) es el pie de la perpendicular al eje trazado desde el punto de aplicación de la fuerza. De ese modo,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

En la mayoría de los casos que trataremos, la fuerza estará aplicada tangencialmente a la periferia del cuerpo, como se aprecia en la figura, y en ese caso $\mathbf{F}$ será perpendicular a $\mathbf{r}$, por lo que:

$$|\mathbf{M}_O| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = r \cdot F$$

Si al mismo tiempo, como en la figura, el eje es perpendicular al plano formado por $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{M}_O$ es paralelo al eje de rotación, coincidiendo, por tanto, con su proyección.




Momento de la fuerza respecto al eje fijo.

En estos casos, el momento de la fuerza respecto del eje resulta ser simplemente el producto de la fuerza por la distancia al eje.

$$M_F = r \cdot F$$

Ten en cuenta, además, que no todas las fuerzas producen movimientos de rotación:

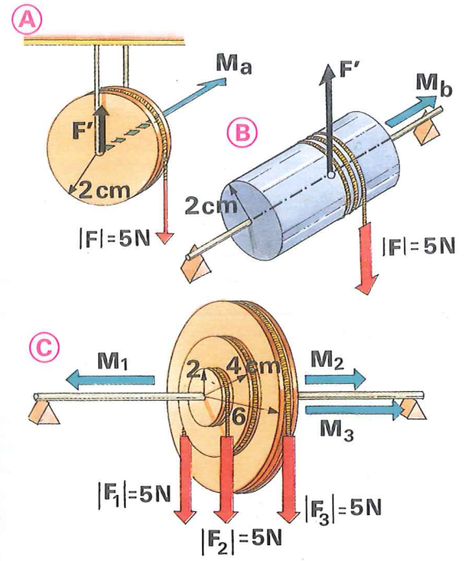
— Si la dirección de la fuerza coincide con la dirección del eje fijo de rotación, el momento de la fuerza respecto a cualquier punto del eje será nulo.

— Si la dirección de $\mathbf{F}$ coincide con la dirección de $\mathbf{r}$, el momento respecto del eje también es nulo.



## EJEMPLOS

1. Los cuerpos de la figura pueden girar alrededor de un eje cuando sobre ellos actúan determinadas fuerzas. Si se ejercen las fuerzas que se indica, encontrar en cada caso el momento de las fuerzas, respecto al eje de rotación.




En todos los casos bastará con multiplicar el valor de la fuerza que actúa por la distancia al eje de rotación.

a) $M_a = 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}1\ \text{N} \cdot \text{m}$
b) $M_b = 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}1\ \text{N} \cdot \text{m}$

La dirección y sentido son los que se indican en la figura, donde se ha dibujado también la fuerza de reacción debida al eje, que constituye, junto con la fuerza que se aplica, el par responsable de la rotación.

c) En este caso actúan varias fuerzas, cuyos momentos son distintos. Por tanto, el momento resultante será la suma vectorial de todos ellos.
El módulo de cada momento resulta ser:

$$M_1 = 5 \cdot 0{,}04 = 0{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_2 = 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}1\ \text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_3 = 5 \cdot 0{,}06 = 0{,}3\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Por tanto, el momento resultante será:

$$M = 0{,}1 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}$$

en el sentido de $M_2$ y $M_3$.

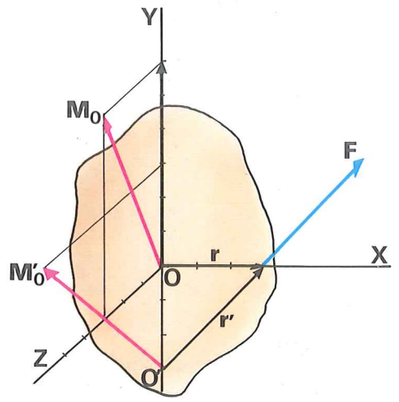
Observa que el giro debido a la fuerza $\mathbf{F}_1$ es de sentido opuesto al provocado por $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$. De ahí el signo negativo en el cálculo del momento resultante.

2. En la figura adjunta, supón que el eje $Y$ es el eje de rotación del cuerpo y que la fuerza aplicada forma un valor $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ N.

a) Calcula el momento de $\mathbf{F}$ respecto al punto $O$, para el que la posición del punto de aplicación de la fuerza $\mathbf{F}$ es $\mathbf{r} = 3\mathbf{i}$ m.

b) Idem respecto a $O'$, situado en la posición $-3\mathbf{j}$ respecto a $O$.

c) Comprueba que las componentes de $\mathbf{M}_0$ y $\mathbf{M'}_0$ en la dirección del eje, son iguales.




El momento de $\mathbf{F}$ respecto a $O$, será:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

El momento de $\mathbf{F}$ respecto a $O'$ es $\mathbf{M} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$. En la figura se observa que

$$\mathbf{r}' = \overline{\mathbf{O'O}} + \mathbf{r} = 3\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{i}$$

por lo que:

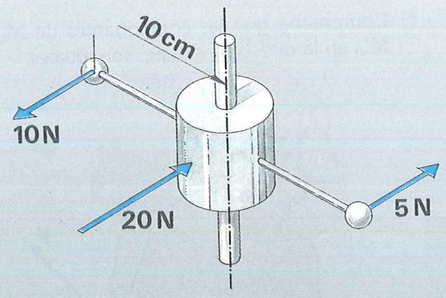
$$\mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Como puedes observar, la componente según el eje $Y$ es idéntica en ambos casos. Ese valor es precisamente el del momento de la fuerza respecto al eje de giro.

## EJERCICIOS

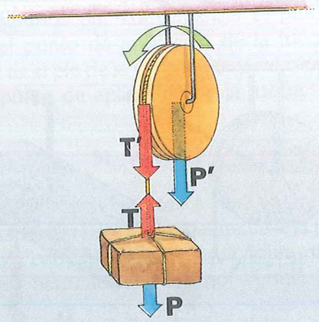
2. *Resolver el mismo problema que en el último ejemplo para el caso en que* $\mathbf{F}=2\mathbf{i}-2\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+3\mathbf{k}$. *Comprueba que* $M=r\cdot F=12\ N\cdot m$.

3. *Calcula el módulo, la dirección y el sentido del momento resultante respecto al eje de giro, de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de la figura.*




Sol.: $M_{10}=1\ N\cdot m$, $M_{20}=0\ N\cdot m$, $M_5=0{,}5\ N\cdot m$.

4. *De una polea de 2 kg de masa y 5 cm de radio cuelga un cuerpo de 5 kg, que desciende con velocidad constante.*




*a) Calcula el valor de las fuerzas dibujadas que actúan sobre la polea.*
*b) Halla el momento resultante de esas fuerzas respecto al eje de giro de la polea. ¿Debe existir alguna otra fuerza sobre la polea?*

Sol.: *a)* T=*49 N*; P'=*19,6 N*.
*b) 2,4 N·m*.

## 3. ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN

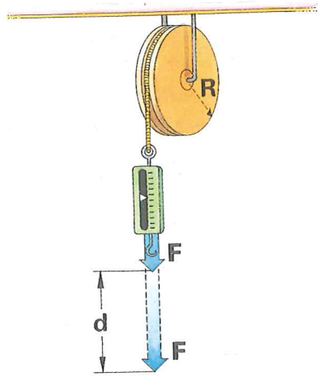
Ahora que hemos determinado que es el par de fuerzas quien provoca la rotación, vamos a estudiar si existe una relación entre el momento de la fuerza aplicada y la aceleración angular producida en el cuerpo que gira.

Es decir, buscamos una expresión análoga a la establecida en la dinámica del punto material que relaciona la fuerza aplicada al mismo y la aceleración producida.

Según lo que acabamos de ver, tal relación debe ser directa: cuanto mayor sea el momento, mayor será la aceleración angular provocada.

En el dispositivo de la figura, supondremos que la masa de la cuerda es despreciable y que en el instante inicial la polea no gira.

Al tirar de la cuerda con una fuerza constante, **F**, comunicamos a la polea cierto momento, referido al eje de giro y cuyo valor es $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$.




Dicho momento produce una aceleración angular $\alpha$ constante, la cual puede calcularse midiendo la cantidad de cuerda que se desenrolla.



Si en un intervalo de tiempo $t$ se desenrolla un trozo de cuerda de longitud $d$ como consecuencia de la aplicación de la fuerza constante **F**, la cuerda adquirirá una aceleración **a**, o sea se desenrollará según un movimiento uniformemente acelerado. La longitud $d$ desenrollada, o lo que es igual, la distancia recorrida por el extremo de la cuerda, será:

$$d=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$

Recordando que:

$$\alpha=\frac{a}{R}$$

podemos escribir:

$$d=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot R\cdot t^2$$

y por tanto,

$$\alpha=2\cdot\frac{d}{R\cdot t^2}$$

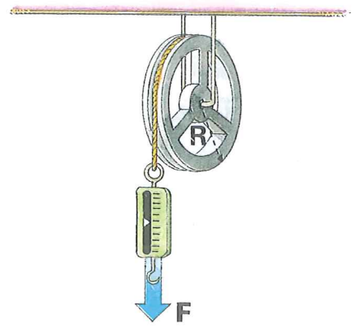
Al realizar la experiencia con distintos valores del momento, para lo cual basta con aplicar diferentes valores de la fuerza, se obtienen diferentes valores para la aceleración angular, verificándose la siguiente relación:

$$\frac{M}{\alpha}=\text{constante}$$

¿Qué significado físico tiene esa constante?

A la vista de las semejanzas con lo que ocurre en las traslaciones, donde $F/a=m$, podemos estar tentados en afirmar que esa constante es la masa de la polea. De hecho, si sustituimos la polea por otra de la misma forma, pero cuya masa es diferente, encontramos que la relación $M/\alpha$ adquiere otro valor distinto al anterior.

Sin embargo, si sustituimos la polea por otra de la misma masa y radio, pero de características diferentes, como la que se aprecia en la figura, la constante de proporcionalidad varía.




Por tanto, esta constante no puede depender únicamente de la masa del cuerpo que gira, sino que influye también la forma geométrica del mismo.

No conocemos ninguna magnitud física que haga referencia al conjunto masa-geometría de un cuerpo, aunque podemos adelantar su significado: la constante $M/\alpha$ representa de algún modo la «inercia» del cuerpo a girar sobre su eje. Cuanto mayor sea esa magnitud, menor será la aceleración angular producida por el momento de la fuerza.

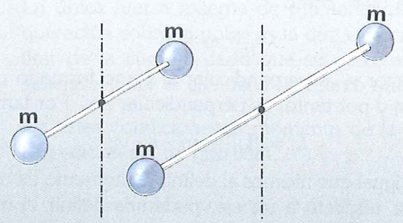
Podríamos proseguir ahora la vía experimental e investigar los factores de los que depende esa magnitud, hasta encontrar una definición acorde con los resultados. Pero no lo haremos así; vamos a utilizar los conocimientos que poseemos de la lección anterior para llegar a definir dicha magnitud.

## EJERCICIOS

5. *Intentar predecir cuál de las dos poleas, dibujadas en las figuras anteriores, adquirirá mayor aceleración angular para un mismo momento aplicado.*

6. *¿Cuáles serán las unidades en el S.I. de la constante de proporcionalidad entre el momento y la aceleración angular que produce?*

7. *¿Cuál de los dos cuerpos de la figura presentará mayor inercia a la rotación?*

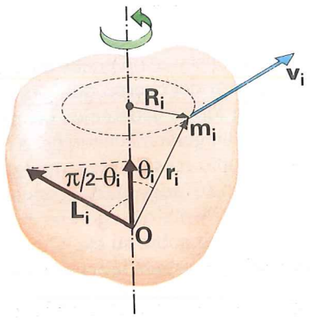


## 4. MOMENTO ANGULAR DE UN SÓLIDO RÍGIDO

En el apartado anterior hemos cometido un «desliz» que empieza a ser habitual: se ha tratado al sólido como un todo, considerando que actúa una única fuerza externa sobre él. Con esa simplificación podemos perder información, como ocurre con la nueva magnitud, ya que ésta depende, además de la masa, de la forma geométrica del sólido, como se ha puesto de manifiesto.

Estudiemos, pues, el sólido rígido como un sistema de partículas cuyas distancias mutuas permanecen inalteradas e investiguemos el significado que tiene el momento angular para éste.

Supongamos que cierto objeto, que podemos considerar sólido rígido, gira alrededor de un eje, con cierta velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.




Si fijamos un sistema de referencia cuyo origen $O$ esté sobre el eje de rotación, una partícula del sólido, de masa $m_i$, se mueve con una velocidad:

$$v_i = \omega \cdot r_i \cdot \text{sen } \Phi = \omega \cdot R_i$$

De ese modo, el momento angular respecto a $O$, será:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

ahora bien, como

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

el vector $\mathbf{v}_i$ es perpendicular al plano formado por $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_i$ y por tanto, es perpendicular a $\mathbf{r}_i$. Por tanto,

$$L_i = |\mathbf{L}_i| = m_i \cdot r_i \cdot v_i$$

Al igual que hicimos al definir el momento de una fuerza respecto a un eje, podemos definir el momento angular respecto al eje de giro como la componente, según el eje de giro, del momento angular respecto a cualquier punto del eje.

De acuerdo con esta definición, el momento angular respecto al eje será la proyección de $\mathbf{L}_i$ respecto al eje de giro, esto es:

$$L_{i,\text{eje}} = m_i \cdot r_i \cdot v_i \cdot \cos(\pi/2 - \Phi_i) = m_i \cdot r_i \cdot v_i \cdot \text{sen } \Phi_i = m_i \cdot R_i \cdot v_i = m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega$$

Si lo anterior lo consideramos para todas las partículas del sólido rígido, la componente, según el eje de giro del momento angular total, será:

$$L_{\text{eje}} = \left[\Sigma\ m_i \cdot R_i^2\right] \omega$$

A la cantidad

$$\Sigma\ m_i \cdot R_i^2$$

se le denomina **momento de inercia del cuerpo respecto del eje considerado** y se obtiene sumando para cada partícula el producto de su masa por el cuadrado de la distancia al eje considerado. El momento de inercia se representa por $I$ y su unidad S.I. es el kg · m$^2$.

Más adelante, veremos que esa magnitud es precisamente la que buscamos. Podemos ahora escribir:

$$L_{\text{eje}} = I \cdot \omega$$

expresión que es válida para la componente del momento angular según el eje de giro, pero no para el momento angular total. No obstante, puede demostrarse que para todos los cuerpos en rotación existen al menos tres direcciones, perpendiculares entre sí, denominadas **ejes principales de rotación,** respecto de los cuales el momento angular total está alineado con el eje de giro. En tal caso, la expresión anterior puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega}$$

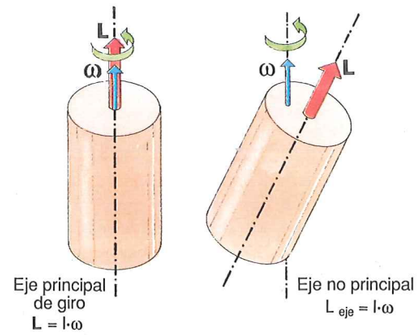
y el momento de inercia se denomina entonces **momento principal de inercia.**

Si el cuerpo es simétrico, los ejes principales de rotación coinciden con algún eje de simetría. En lo que sigue, siempre que nos refiramos a un cuerpo que gira alrededor de un eje, supondremos que lo hace alrededor de un eje principal, por lo que utilizaremos la expresión vectorial. Observa que en ese caso, el eje de rotación pasa por el centro de masas del sólido, punto contenido en el eje de simetría.



### EJEMPLO

El cilindro de la figura, cuando gira alrededor de un eje principal (eje de simetría), presenta un momento angular total alineado con el eje de giro, siendo su dirección y sentido los del vector velocidad angular.




En otro caso, el momento angular total del cilindro no está alineado con el eje de rotación y, por tanto, no tiene la misma dirección y sentido que la velocidad angular. Sólo podemos afirmar que

$$L_{\text{eje}} = I \cdot \omega$$

El movimiento en estos casos es demasiado complejo para estudiarlo ahora. Olvidaremos estos casos, limitándonos a aquellos en los que la rotación tiene lugar a lo largo de alguno de los ejes principales.

Vimos en la lección anterior que sólo los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre el sólido pueden modificar el momento angular:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

donde $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ se determinan respecto al mismo punto, en nuestro caso cualquier punto del eje de rotación.

Si suponemos que tanto la masa como la forma geométrica del cuerpo permanecen invariables, el momento de inercia será constante y por tanto:

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = I \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

expresión que se conoce con el nombre de **ecuación fundamental de la dinámica de rotación.**

Observa que la constante de proporcionalidad que buscábamos entre el momento de la fuerza y la aceleración angular que provoca, es el momento de inercia referido al eje de rotación.

De lo anterior se deduce que, dado el momento de inercia de un cuerpo, podemos conocer la aceleración angular que adquirirá, cuando se le aplique una fuerza de momento no nulo.

Observa que, en ausencia de fuerzas externas o cuando las fuerzas externas tienen momento nulo respecto al eje de rotación, la aceleración angular es nula y, por tanto, el cuerpo gira con velocidad angular constante. Es un resultado análogo a la ley de inercia, aplicado a las rotaciones.

### EJEMPLO

El momento de inercia de una polea de 10 cm de radio respecto a su eje de rotación es 0,02 kg · m$^2$.

La polea, inicialmente en reposo, lleva enrollada una cuerda de masa despreciable, de la que se tira con una fuerza de 9,8 N. Se pide:

a) La aceleración angular de la polea.

b) La longitud de cuerda desenrollada si se tira durante un segundo, manteniendo constante la fuerza.

c) ¿Qué sucederá cuando deje de actuar la fuerza?

**a)** La aceleración angular de la polea podemos obtenerla a partir de la expresión:

$$M = I \cdot \alpha$$

La única fuerza externa de momento no nulo que actúa sobre la polea es la que ejercemos al tirar de la cuerda, dado que su peso, al estar aplicado sobre el eje, tiene momento nulo.

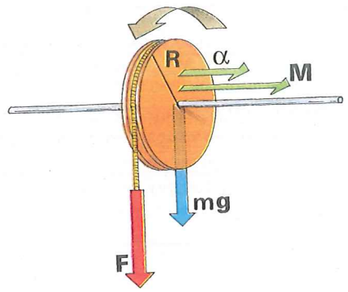
En estas condiciones el momento de la fuerza respecto al eje de giro será:

$$M = F \cdot R = 9{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}98 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Por tanto,

$$\alpha = M/I = 0{,}98/0{,}02 = 49 \text{ rad/seg}^2$$

Su dirección y sentido son los que se indican en la figura.




**b)** Para calcular la longitud de cuerda desenrollada, debemos tener en cuenta que el extremo de la misma se mueve con una aceleración lineal cuya relación con la angular es:

$$a = \alpha \cdot R = 49 \cdot 0{,}1 = 4{,}9 \text{ m/s}^2$$

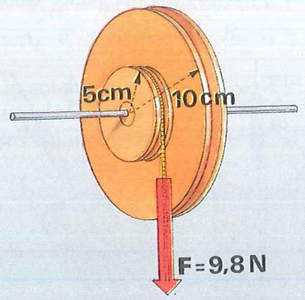
El extremo de la cuerda habrá avanzado una distancia:

$$d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}9 \cdot 1 = 2{,}45 \text{ m}$$

**c)** Si la fuerza deja de actuar al cabo de ese tiempo y despreciamos el efecto del rozamiento, la polea seguirá girando con velocidad angular constante a partir de ese momento.

EJERCICIO

5. *Observa el dispositivo de la figura.*




*Cuando se tira de la cuerda, de masa despreciable, con una fuerza de 9,8 N, se observa que el dispositivo adquiere una aceleración angular de 49 rad/s². Determina:*

*a) La aceleración angular que adquiere el sistema cuando se tira con la misma fuerza de la cuerda, enrollada al disco mayor.*

*b) El momento de inercia del dispositivo, medido respecto al eje de giro.*

Sol.: *a) 98 rad/s²; b) $10^{-2}$ kg · m².*

## 5. CÁLCULO DE MOMENTOS DE INERCIA

Hemos visto que el momento de inercia es tan importante en el movimiento de rotación como lo es la masa en el de traslación.

Para un sistema de partículas como el sólido rígido que gira alrededor de un eje, se define el momento de inercia respecto al eje de giro, como ya sabemos, por:

$$I = \Sigma\, m_i \cdot R_i^2$$

donde $m_i$ es la masa de cada una de las partículas que constituyen el sistema y $R_i$ su distancia al eje de rotación.

Un sólido rígido puede ser considerado como un sistema continuo, en el que no se distinguen las partículas individuales; por tanto, la expresión anterior debe modificarse, transformando la suma en una integral para todo el cuerpo:

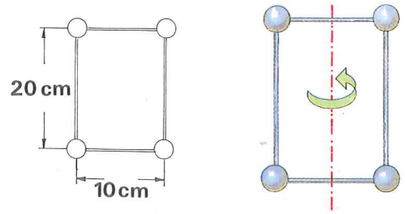
$$I = \int R^2 \cdot dm$$

En ocasiones, ciertas partes del sólido son despreciables frente a otras y se le puede tratar como si fuera un sistema discreto, formado por las partes no despreciables. Observa los ejemplos siguientes.



EJEMPLOS

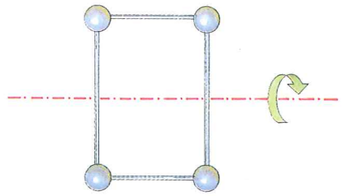
1. Cada una de las masas del cuerpo que se representa en la figura, es de 1 kg y la masa de las varillas puede considerarse despreciable.
Calcula el momento de inercia respecto al eje de giro representado en la figura.




En ese caso, podemos considerar el cuerpo como un sistema discreto:

$$I = \Sigma\, m_i \cdot R_i^2 = 1 \cdot 0{,}05^2 + 1 \cdot 0{,}05^2 + 1 \cdot 0{,}05^2 + 1 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

2. Calcula de nuevo el momento de inercia, suponiendo que el eje de rotación es el que se indica en la figura:



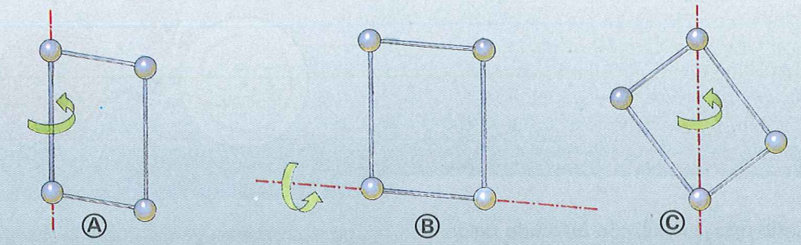
En este caso, el momento de inercia del cuerpo respecto al nuevo eje de rotación, será:

$$I = 1 \cdot 0{,}1^2 + 1 \cdot 0{,}1^2 + 1 \cdot 0{,}1^2 + 1 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El resultado, mayor que en el caso anterior, nos indica que es más difícil hacer girar el cuerpo sobre este eje. El cuerpo presenta mayor inercia a la rotación en este caso.

EJERCICIOS

6. *Con los mismos datos de los ejemplos, calcula el momento de inercia del cuerpo respecto a cada uno de los ejes de giro que se indican:*




Sol.: *Para el* A, *0,02 kg · m². Para el* B, *0,08 kg · m². Para el* C, *0,016 kg · m².*

7. *¿Cuántos momentos de inercia pueden definirse para un cuerpo?*

Si consideramos sólidos continuos y de forma irregular, los cálculos para determinar momentos de inercia se complican, haciendo que perdamos de vista el significado físico del momento de inercia. Recuerda que el momento de inercia pone de manifiesto la inercia a la rotación que presenta un cuerpo al girar sobre cierto eje.

Por otro lado, la definición del momento de inercia nos indica que su valor depende de la masa total del cuerpo y de su distribución alrededor del eje de giro, de modo que, cuanto más lejos del eje se distribuya dicha masa, mayor resulta el momento de inercia.

Proponemos a continuación una serie de ejemplos y ejercicios en los que no son necesarios cálculos rigurosos. Con ellos pretendemos afianzar la idea que tenemos del momento de inercia.

## 6. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

El estudio del momento angular en el sólido rígido, nos ha permitido introducir el momento de inercia y establecer la ecuación:

$$\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$$

que caracteriza el momento angular de un sólido que gira alrededor de uno de los ejes principales.

A partir de la ecuación anterior y sabiendo que sólo los momentos de las fuerzas externas al sistema pueden modificar el momento angular del mismo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{ext}$$

obteníamos la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación, en el supuesto que no variase el momento de inercia del cuerpo:

$$\mathbf{M} = I\,\boldsymbol{\alpha}$$

Por tanto, en ausencia de momentos externos, el momento angular del cuerpo permanece constante:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{cte}$$

Si el momento de inercia permanece constante, la velocidad angular también debe hacerlo. Pero si el momento de inercia varía, la velocidad angular lo hará en sentido opuesto, de modo que permanezca inalterado el momento angular.

### EJEMPLO

La patinadora de la figura gira con cierta velocidad angular:

Despreciando los efectos debidos al rozamiento con el hielo, las únicas fuerzas que actúan sobre ella son el peso y la reacción normal del suelo, que se compensan mutuamente. Podemos asegurar que no actúa ningún momento externo sobre la patinadora; por tanto, ésta debe mantener constante su momento angular.

Ello supone que, mientras no mueva los brazos ni las piernas, girará con la misma velocidad con que lo hacía.

Ahora bien, si encoge los brazos, acerca parte de la masa del sistema al eje de giro y su momento de inercia disminuye, por lo que, para mantener constante el momento angular, la velocidad angular ha de incrementarse. Efectivamente, esto es lo que hacen los patinadores para describir giros a gran velocidad.

### EJERCICIOS

21. *Sobre un disco con un momento de inercia $I_1$, que gira con velocidad angular ω, se deja caer otro disco que no gira, con un momento de inercia $I_2$, respecto del mismo eje de giro.*
*A causa del rozamiento entre ambos, acaban por moverse con la misma velocidad angular ω'. Calcula el valor de dicha velocidad angular.*

Sol.: $\omega' = (I_1/(I_1 + I_2))\cdot \omega$.

22. *Es corriente oír en la actualidad que, si no se pone remedio, pueden fundirse los casquetes polares de la Tierra, como consecuencia del efecto invernadero producido por los contaminantes emitidos a la atmósfera.*
*¿Afectará la fusión de los casquetes, que supondrá un aumento del nivel medio de los océanos, a la duración del día?*

23. *¿Qué sucedería, con respecto a la duración del día, si todos los habitantes de la Tierra decidiesen permanecer acostados?*



No podemos finalizar sin exponer, una vez más, las analogías que existen entre la dinámica de la traslación y la dinámica de la rotación.

En la dinámica de la traslación, la cantidad de movimiento caracterizaba el movimiento de un cuerpo. En torno a esta magnitud se establecían todas las leyes de la dinámica.

En la dinámica de la rotación, es el momento angular el que caracteriza el movimiento de un cuerpo. De ahí derivan las leyes de la dinámica.

Comparando las dos expresiones, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ y $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, observamos que el momento de inercia desempeña el mismo papel en la rotación que la masa en la traslación, al igual que la velocidad angular desempeña el papel de la velocidad lineal.

En la traslación son las fuerzas las responsables de la variación de la cantidad de movimiento. En la rotación son los momentos los responsables de la variación del momento angular.

En un sistema cuya masa no varía, la ecuación fundamental de la dinámica de la traslación era $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$. Lo mismo ocurre en la rotación, cuando no varía el momento de inercia: $\mathbf{M} = I \cdot \boldsymbol{\alpha}$. El momento ocupa el lugar de la fuerza y la aceleración angular el lugar de la lineal.

Finalmente, los principios de conservación, tanto de $\mathbf{p}$ como de $\mathbf{L}$, son principios universalmente aceptados y verificados, aun en aquellos casos en que alguna de las leyes de Newton parece no tener validez.

El cuadro que sigue, nos muestra un resumen de las analogías citadas:

| Traslación | Rotación |
|---|---|
| Masa m (kg) | Momento de inercia I (kg · m$^2$) |
| Velocidad $\mathbf{v}$ (m/s) | Velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (rad/s) |
| Aceleración $\mathbf{a}$ (m/s$^2$) | Aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ (rad/s$^2$) |
| Fuerza $\mathbf{F}$ (N) | Momento de la fuerza $\mathbf{M}$ (N · m) |
| Cantidad de movimiento | Momento angular |
| $\mathbf{P} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{v}$ (kg · m/s) | $\mathbf{L} = \mathrm{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ (kg · m$^2$/s) |
| Ecuación fundamental | Ecuación fundamental |
| $\mathbf{F} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{a}$ | $\mathbf{M} = \mathrm{I} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ |
| Principio de conservación | Principio de conservación |
| $\mathbf{P} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{cte}$ | $\mathbf{L} = \mathrm{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{cte}$ |

Magnitudes para el estudio de la dinámica de traslación y sus equivalentes en la rotación.

## 7. ALGUNOS PROBLEMAS DE DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

Al igual que vimos al estudiar la dinámica de la traslación, vamos a resolver ahora una serie de problemas en los que un sólido rígido está girando.

Como normas generales para la resolución de estos problemas, podemos citar las siguientes:

— Analizaremos el tipo de giro que presenta el cuerpo, identificando el eje de rotación.

— Determinaremos el momento de inercia del sólido, respecto del eje de rotación.

— Analizaremos las fuerzas externas que actúan sobre el sólido y calcularemos sus momentos respecto del eje de rotación.

— Aplicaremos la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación.

Por supuesto, en cada caso, de acuerdo con el enunciado del problema, habrá que identificar qué es exactamente lo que se nos pide y cuáles son los datos de que se dispone para calcularlo.

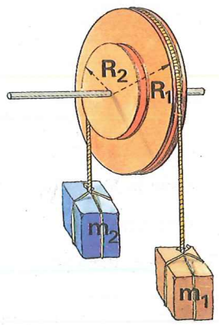
### Poleas con pesas colgando

Este tipo de problemas se caracteriza por presentar un cuerpo de características variables, capaz de girar sobre un eje fijo, debido a la acción de unas masas que cuelgan unidas a él por cuerdas.

En estos casos, además del cuerpo que gira, existe otro que se traslada, por lo que será necesario utilizar también la ecuación fundamental de la dinámica de la traslación.

EJEMPLO

Supón que las poleas de la figura son de 0,5 kg y 1 kg de masa, siendo sus radios respectivos 6 y 8 cm. Ambas están unidas.




De la grande cuelga una masa de 500 g, y de la pequeña una de 300 g.

Calcula la aceleración angular de la polea y las tensiones de las cuerdas.

El sólido rígido que gira es el sistema formado por las dos poleas adosadas, girando en torno al eje que pasa por su centro. Considerando cada polea como un disco homogéneo, el momento de inercia de cada una respecto de dicho eje será:

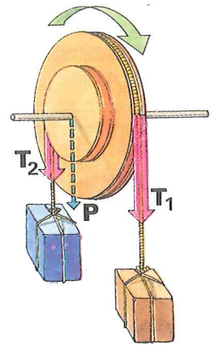
$$I_1 = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot R_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}08^2 = \\ = 0{,}0032 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot R_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}06^2 = \\ = 0{,}0009 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento de inercia total del dispositivo resulta,

$$I = I_1 + I_2 = 0{,}0041 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Sobre la polea actúan las tensiones $T_1$ y $T_2$ y el peso total del dispositivo $(M_1 + M_2) \cdot g$, tal como se aprecia en la figura.




De ellas, las únicas que tienen un momento no nulo respecto al eje de giro, son $T_1$ y $T_2$, por lo que podemos olvidar el peso de la polea en lo que concierne a la rotación.

Los momentos que corresponden a estas fuerzas son $T_1 \cdot R_1$ y $T_2 \cdot R_2$.

Estos momentos son de distinto signo, ya que producen giros en sentidos opuestos. Si, arbitrariamente, asignamos un sentido de giro como positivo, el momento total resultante será:

$$T_1 \cdot R_1 - T_2 \cdot R_2 = 0{,}08 \cdot T_1 - 0{,}06 \cdot T_2$$

De ese modo, la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación se convierte en:

$$0{,}08 \cdot T_1 - 0{,}06 \cdot T_2 = 0{,}0041 \cdot \alpha$$

En ella tenemos tres incógnitas, por lo que resulta imprescindible disponer de otras dos ecuaciones.

En este caso podemos obtener dichas ecuaciones aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de traslación a cada una de las masas que cuelgan.

Así, para la primera masa,

$$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a_1$$

$$4{,}9 - T_1 = 0{,}5 \cdot a_1$$

y para la segunda,

$$T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a_2$$

$$T_2 - 2{,}94 = 0{,}30 \cdot a_2$$



Teniendo en cuenta que las aceleraciones lineales están relacionadas con la aceleración angular de las poleas:

$$a_1 = \alpha \cdot R_1$$

$$a_2 = \alpha \cdot R_2$$

las ecuaciones anteriores equivalen a:

$$4{,}9 - T_1 = 0{,}04 \cdot \alpha$$

$$T_2 - 2{,}94 = 0{,}018 \cdot \alpha$$

Con estas tres ecuaciones podemos calcular qué valor toman las tres incógnitas, que resultan ser:

$$\alpha = 25{,}7 \text{ rad/s}^2$$

$$T_1 = 3{,}8 \text{ N}$$

$$T_2 = 3{,}4 \text{ N}$$

Si el resultado de la aceleración angular fuese negativo, ello querría decir que el sistema gira en sentido opuesto al que hemos considerado como positivo.

EJERCICIO

25. *De una polea, constituida por un disco metálico de 1 kg de masa y 5 cm de radio, cuelgan por cada lado sendas masas de 1 y 0,5 kg respectivamente, unidas por medio de una cuerda de masa despreciable. Determinar:*

*a) La aceleración angular de la polea y la aceleración con que se mueven las masas que cuelgan de ella.*

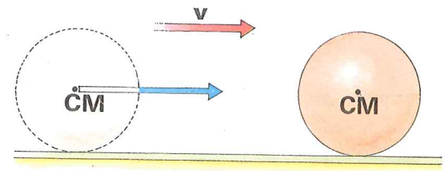
*b) La tensión a ambos lados de la polea.*

*c) Repetir el problema, suponiendo que la masa de la polea sea despreciable. ¿Qué puedes decir ahora en cuanto a la tensión que existe a ambos lados de la polea?*

Sol.: *a) 2,45 m/s², 49 rad/s²;*
*b) $T_1$ = 7,35 N, T = 6,125 N;*
*c) 3,27 m/s², 65,3 rad/s²,*
*$T_1 = T_2$ = 6,54 N.*

### Movimiento conjunto de traslación y rotación

En algunos problemas solemos encontrar cuerpos que ruedan sobre una superficie, como es el caso que se muestra en la figura:

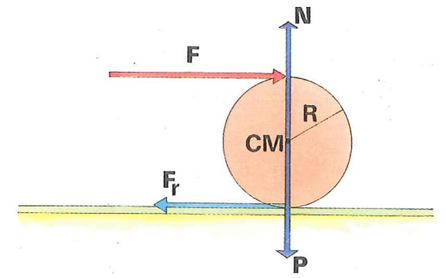



En estos casos, el eje de rotación, que pasa por el centro de masas, no está fijo, por lo que debemos aplicar cuidadosamente los conocimientos adquiridos en la lección.

Como ya vimos, el movimiento de un cuerpo podemos suponerlo descompuesto en dos, uno de traslación del centro de masas y otro de rotación «respecto del CM». Podemos utilizar entonces la ecuación fundamental de la dinámica de traslación para el CM y la ecuación fundamental de la dinámica de rotación para el giro, respecto al CM.

EJEMPLOS

Un cilindro macizo de masa *m* y radio *R* está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal.




Se aplica tangencialmente una fuerza **F**, tal como se aprecia en la figura, y el cuerpo comienza a rodar «sin deslizar» por la superficie.

Calcula la aceleración angular y la aceleración lineal del centro de masas y la fuerza de rozamiento que permite el movimiento.

En este caso, el cilindro gira respecto a un eje que pasa por el centro de masas, al tiempo que éste se desplaza.

El momento de inercia del cilindro respecto al eje que pasa por el CM es:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$

Las fuerzas que actúan sobre el cilindro son las que se indican en la figura. De ellas, **P** y **N** tienen momento nulo respecto al CM.

Observamos que, aunque el enunciado no dice nada acerca de los rozamientos, su existencia es indispensable para que el cuerpo pueda girar, al formar parte del par de fuerzas responsable de la rotación.

En cuanto a la rotación del cuerpo respecto del CM, los momentos de las fuerzas externas que actúan serán $F \cdot R$ y $F_r \cdot R$, de modo que el momento resultante respecto del eje que pasa por el CM es:

$$(F + F_r) \cdot R$$

ya que ambas fuerzas producen giros del mismo sentido. De ese modo, la ecuación fundamental de la dinámica de rotación queda:

$$(F + F_r) \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha$$

que tras simplificar, se convierte en:

$$F + F_r = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R \cdot \alpha$$

En cuanto a la traslación del centro de masas, la resultante de las fuerzas externas que actúan es:

$$F - F_r$$

y la ecuación fundamental:

$$F - F_r = m \cdot a$$

Si el cuerpo «rueda sin deslizar», se ha de verificar necesariamente que

$$a = \alpha \cdot R$$

y por tanto, la ecuación anterior se transforma en:

$$F - F_r = m \cdot R \cdot \alpha$$

Las ecuaciones,

$$F - F_r = m \cdot a$$

$$F + F_r = \frac{1}{2} m R \alpha$$

permiten, conocida $F$, determinar la aceleración angular y la lineal, así como la fuerza de rozamiento.

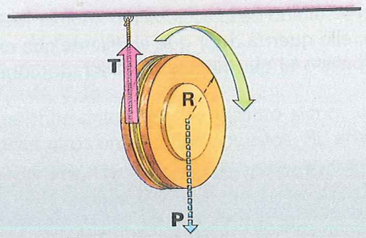
Un resultado curioso que se obtiene al sumar las ecuaciones anteriores y expresando la aceleración angular en función de la lineal, es:

$$a = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{m}$$

Como vemos, la aceleración resulta ser mayor que si consideramos el cuerpo puntual y despreciamos los rozamientos ($a = F/m$).

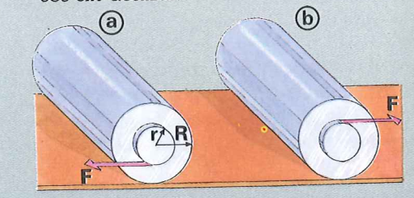
### EJERCICIOS

25. *El cuerpo de la figura es similar al clásico yo-yo. Supón que está formado por un disco homogéneo de 250 g de masa y 3 cm de radio. Determina la aceleración angular del disco y la lineal del CM. Calcula, asimismo, la tensión de la cuerda.*




Sol.: *6,53 m/s²; 217,8 rad/s²; 0,82 N.*

26. *Supón que el cilindro de la figura, de masa* m *y radio* R, *rueda en todos los casos sin deslizar.*




*Si tiramos con una fuerza* **F** *del cilindro interior, de radio* r, *calcula la dirección en que se moverá el cilindro y la aceleración lineal con que lo hará en cada uno de los casos propuestos.*

Sol.: *a)* a = 2 · (F/m) · (1 − r/R);
*b)* a = (2/3) · (F/m) · (1 + r/R);
*en ambos casos se mueve en la dirección de* **F**.



## 7. ENERGÍA CINÉTICA ASOCIADA A LA ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

Para concluir el tema, abordaremos los aspectos energéticos, prestando especial atención a la energía cinética de rotación del sólido rígido.

Antes de determinar la expresión que corresponde a la energía cinética del sólido rígido, podríamos proceder a extrapolar las analogías señaladas entre las traslaciones y rotaciones, razonando como sigue: si el momento de inercia del sólido desempeña el mismo papel que la masa en las traslaciones, y la velocidad angular el papel de la velocidad lineal, de la definición de energía cinética, $E_c = 1/2 \cdot M \cdot v^2$ deberíamos obtener para la energía cinética de rotación la expresión $E_c = 1/2 \cdot I \cdot \omega^2$.

Veamos que, efectivamente, ocurre así:

Si el sólido rígido gira alrededor de un eje, cada una de sus partículas se mueve con una velocidad angular ω, idéntica para todas ellas. Se cumple:

$$v_i = \omega \cdot R_i$$

donde $R_i$ es la distancia al eje de giro.

En estas condiciones, la energía cinética de cada partícula es, por definición:

$$Ec_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2$$

y la energía cinética total asociada al sólido que gira, será:

$$E_c = \Sigma \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Sigma\, m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

expresión en la que $I$ es el momento de inercia respecto al eje considerado.

La expresión anterior es válida sea cual sea el eje de giro, pues la relación entre la velocidad lineal y la angular es general.

Ahora bien, cuando el eje de rotación sea un eje principal, la expresión anterior puede escribirse también en la forma:

$$E_c = \frac{L^2}{2 \cdot I}$$

ya que entonces se cumple que $L = I \cdot \omega$.

Si el sólido presenta un movimiento conjunto de traslación y rotación, como es el caso de los cuerpos que ruedan por una superficie, la energía cinética tendrá dos contribuciones: una debida a la rotación ($E_{c,cm}$), y otra debida a la traslación ($1/2 \cdot m \cdot v_{cm}^2$), o sea:

$$E_c = E_{cm} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{cm}^2$$

Así pues, en ese caso, tendremos:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{cm}^2$$

donde hemos puesto $I_{cm}$, queriendo indicar que se trata del momento de inercia respecto a un eje que pasa por el CM.

### EJEMPLO

Desde cierta altura $h$, sobre un plano inclinado, se deja caer una bola maciza, de masa $m$ y radio $R$. La bola baja rodando por el plano sin deslizar.

Calcula su velocidad, al llegar a la base del plano, si parte del reposo.




Aunque este problema puede resolverse dinámicamente si se conoce la inclinación del plano, vamos a ver cómo resulta mucho más fructífero resolverlo por consideraciones energéticas.

Si el cuerpo se encuentra, inicialmente, en reposo a una altura $h$, la energía mecánica del cuerpo, es simplemente su energía potencial:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

A medida que el cuerpo comienza a descender, esta energía se transforma en energía cinética de rotación respecto al CM, y energía cinética de traslación, ya que el cuerpo gira y se desplaza.

Al llegar a la base del plano, toda la energía potencial se habrá transformado en cinética, por lo que podemos escribir:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{cm}^2$$

Al ser una bola maciza, el momento de inercia respecto a uno de los diámetros es:

$$I_{cm} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$$

y puesto que rueda sin deslizar, $v_{cm} = \omega \cdot R$.

Por tanto,

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2\right) \cdot \left(\frac{v_{cm}^2}{R^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{cm}^2$$

Eliminando $m$, nos queda:

$$g \cdot h = \frac{2}{10} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot v_{cm}^2 = \frac{7}{10} \cdot v_{cm}^2$$

y finalmente:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot h}$$

que, como vemos, resulta ser independiente de la masa y del radio de la bola.

La energía cinética de la rueda es la suma de la energía cinética de traslación del CM y la de rotación alrededor del CM.

## EJERCICIOS

27. *Desde lo alto de un plano inclinado, se dejan caer un cilindro, un aro y una esfera maciza del mismo radio, que ruedan por el plano sin deslizar.*

    *a) ¿Quién llega al suelo con mayor velocidad?*
    *b) Si, además, suponemos que tienen la misma masa, ¿quién llega al suelo con mayor energía cinética?*
    *c) Justifica que las respuestas a las dos preguntas anteriores son compatibles.*

28. *Calcula la energía cinética de rotación de la Tierra, considerada como una esfera de 6 500 km de radio y 5,98 $10^{24}$ kg de masa.*

    *Compararla con la energía cinética de traslación de su centro de masas, suponiendo que la distancia Tierra- Sol es de 150 millones de km.*

    Sol.: *2,67 · $10^{29}$ julios; 2,67 · $10^{33}$ julios.*

29. *Se lanza una esfera maciza, de radio 4 cm, hacia lo alto de un plano, inclinado 30°, con una velocidad de 10 m/s, de modo que sube rodando sin deslizar. Encontrar la distancia que recorrerá hasta detenerse.*

    Sol.: *14,29 m.*

30. *Desde lo alto de un plano inclinado se deja caer rodando, sin deslizar, una esfera hueca y otra maciza del mismo radio.*

    *a) ¿Cuál llegará antes al suelo?*
    *b) ¿Cuál tendrá mayor energía cinética al llegar al suelo?*

31. *Un cuerpo puede caer desde lo alto de un plano inclinado rodando o deslizando.*

    *a) ¿En cuál de los dos casos llegará antes abajo?*
    *b) ¿En qué caso llegará abajo con mayor velocidad?*



# ejercicios de revisión

**32.** *Cuatro niños de igual masa se balancean sobre una barra uniforme, de 4 m de longitud, que se apoya sobre un pivote en su punto medio. Se sitúan dos niños a la derecha del pivote, uno en el extremo y otro a 1 m del centro. En el otro lado, se sitúa un niño a 1,7 m del centro.*
*¿Dónde debe situarse el otro niño para que la barra permanezca en equilibrio?*

Sol.: *a 1,3 m del centro en el lado izquierdo.*

**33.** *Un cuerpo, de 1 kg de masa, se mueve con una velocidad constante de 9 m/s, describiendo una circunferencia de 7 m de radio. Calcula su momento angular respecto al centro de la circunferencia. ¿Cuál es el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de la circunferencia y es perpendicular al plano del movimiento? ¿Cuál es la velocidad angular con que gira la partícula?*

Sol.: $\mathbf{L} = 63\mathbf{k}$ *kg* · $m^2/s$; $I = 49$ *kg* · $m^2$; $\omega = 9/7$ *rad/s.*

**34.** *Una mesa circular puede girar sobre su eje vertical, con velocidad angular constante. Sobre la mesa hay un recipiente circular, que gira con la mesa. En su interior hay un bloque de hielo, de espesor uniforme, que gira con el recipiente. Si se funde el hielo y no escapa nada de agua del recipiente, ¿aumentará o disminuirá la velocidad angular? Considera despreciable el rozamiento.*

**35.** *La Luna gira en torno a la Tierra, de modo que siempre vemos la misma cara. Calcula la relación que existe entre el momento angular respecto a la Luna debido al giro de la Luna sobre sí misma y el momento angular respecto a la Tierra debido al giro alrededor de la Tierra (considera en este caso la Luna como puntual).*

*Sol.:* $\frac{L_{rot}}{L_{giro}} = \frac{2\,R_1^2}{5\,R_d^2}$ $R_1$ = *radio de la Luna*, $R_d$ = *distancia Tierra-Luna*

**36.** *Un cilindro homogéneo, de 20 cm de radio, está girando, a razón de 100 r.p.m., alrededor de un eje que pasa por su C.M., paralelo a su generatriz. Para conseguir detenerlo se aplica una fuerza tangencial constante de 100 N y el cilindro se detiene 10 segundos. Encontrar el momento de inercia del cilindro.*

Sol.: *19,1 kg* · $m^2$.

**37.** *Calcula el momento de inercia de la molécula de $CO_2$ con respecto a un eje que pasa a través del centro de masas, perpendicular al eje de la molécula. La molécula es lineal y el átomo de C se encuentra en el centro. La distancia C–O es 1,13 $10^{-10}$ · m.*

Sol.: *6,78 · $10^{-46}$ kg · $m^2$.*

**38.** *Tres esferas de masas 1, 2 y 3 kg respectivamente (que pueden considerarse como puntuales), están unidas entre sí mediante una barra de masa despreciable, existiendo una separación entre cada dos de ellas de 1 m.*

*a) Determinar el momento de inercia del sistema respecto de un eje perpendicular a la barra que pase por el C.M. del mismo.*
*b) Determinar el momento angular del sistema respecto al eje anterior cuando gira con velocidad angular de 5 rad/s alrededor del eje descrito en a).*

Sol.: *3,33 kg · $m^2$; 16,65 kg · $m^2$/s.*

**39.** *Un cilindro, de 10 kg de masa y 0,10 m de radio, está girando a 1 000 r.p.m. respecto a un eje que pasa por su centro. ¿Cuál es la fuerza tangencial necesaria para detenerlo, si queremos que frene, tras recorrer 1 500 vueltas, contadas a partir del momento en que se aplica la fuerza de frenado?*

Sol.: *0,29 N.*

**40.** *Un plato giratorio, de radio* R *y momento de inercia* I, *gira en el sentido de las agujas de un reloj, con velocidad angular* $\omega_0$. *No existen rozamientos, pero sobre el borde del plato se mueve una mosca, de masa* m, *en sentido contrario al de las agujas de un reloj, con una velocidad, respecto a la Tierra,* v. *La mosca encuentra una miga de pan y se detiene. ¿Cómo varía la velocidad angular del plato al detenerse la mosca?*

Sol.: $\omega' = \dfrac{I\,\omega_0 - m\,R\,v}{I + m\,R^2}$

**41.** *Un cilindro homogéneo, de masa* m *y radio* r, *rueda sin deslizar, por un plano inclinado que forma un ángulo con la horizontal. Encontrar las expresiones de la aceleración angular del cilindro y la lineal del centro de masas. Encontrar la expresión de la fuerza de rozamiento que permite que el cilindro ruede sin deslizar.*

Sol.: a = *2/3* g *sen* $\beta$ ; $\alpha$ = a/r; $F_r$ = *1/2* m a.

**42.** *Se deja caer una bola maciza, de 1 kg masa, desde lo alto de un plano inclinado 30º, observándose que la bola rueda sin deslizar. Determina:*

*a) La fuerza de rozamiento que permite que la bola ruede sin deslizar.*
*b) La aceleración angular de la bola y la lineal del centro de masas si el radio es* r = *5 cm.*

Sol.: *a) 1,4 N; b) 3,5 m/$s^2$, 70 rad/$s^2$.*



**43.** *El radio de una moneda es 2 cm y su masa 5 g. La moneda rueda sin deslizar por un plano inclinado 30° a 6 r.p.s. Encontrar el valor de su velocidad cuando descienda 1 m por el plano.*

Sol.: *2,67 m/s.*

**44.** *Una bola de billar recibe un golpe con un taco. Si conocemos la velocidad inicial con que sale impulsada la bola,* $v_0$, *su radio,* R, *la masa,* M, *y la fuerza de rozamiento que le permite rodar sin deslizar,* $F_r$, *¿cuánto avanzará la bola antes de detenerse?*

Sol.: $d = \dfrac{7}{10}\,\dfrac{M\,v_0^2}{F_r}$

**45.** *De los dos extremos de una cuerda arrollada a una polea, cuelgan dos masas,* $m_1$ *y* $m_2$. *La masa de la polea es* M. *Suponiendo que el sistema se mueve solidariamente y que la cuerda no desliza por la garganta de la polea, escribe las expresiones de la aceleración que actúa sobre las masas que cuelgan y la tensión a cada lado de la polea. El radio de ésta es* R.

Sol.: $a = g \cdot (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + M/2)$;
$T_1 = g m_1 \cdot (2m_2 + M/2)/(m_1 + m_2 + M/2)$;
$T_2 = g m_2 \cdot (2m_1 + M/2)/(m_1 + m_2 + M/2)$.

**46.** *Un disco gira libremente con una velocidad angular de 1 500 rev/min, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Un segundo disco, montado en el mismo eje encima del primero, está inicialmente en reposo. El momento de inercia del segundo disco es doble que el del otro. Se deja caer sobre el primero y, finalmente, ambos giran juntos, con una velocidad angular común. Calcula la nueva velocidad angular. Comparar la energía cinética de rotación del sistema, antes y después del choque de los dos discos.*

Sol.: $\omega$ = *52,36 rad/s;* $E_{cf}$ = *1/3* $E_{ci}$.

**47.** *Una persona está sentada en un taburete giratorio y sostiene un par de pesas de gimnasia, situadas a 1 m del eje de rotación de la silla. Se le comunica a la silla una velocidad angular de 4 rad/s, después de lo cual acerca las dos pesas a 25 cm del eje. El momento de inercia de la persona, respecto al eje de giro, puede considerarse constante y de valor 8 kg · $m^2$. Las pesas tienen una masa de 12 kg cada una y pueden considerarse puntuales. Despreciando el rozamiento, ¿cuál es el momento angular del sistema? ¿Cuál es la velocidad angular después de que las dos pesas se aproximan al eje? Calcula la energía cinética del sistema antes y después de la operación, ¿a qué se debe la diferencia?*

Sol.: *128 kg · $m^2/s^2$; 13,47 rad/s; 256 J; 862,32 J.*

**48.** *Dos niños, ambos con una masa de 30 kg, están sentados cada uno en un extremo de una barra horizontal, de 2,5 m de largo y 12 kg de masa. La barra gira con una velocidad angular de 10 r.p.m. respecto a un eje vertical que pasa por su centro. ¿Cuál será la velocidad angular, si cada niño se mueve 50 cm hacia el centro de la barra? ¿Cómo varía entonces la energía cinética de rotación del sistema?*

Sol.: $\omega$ = *2,62 rad/s;* $\Delta E_c$ = *82,46 J.*

**49.** *Un bolígrafo colocado verticalmente sobre una mesa, se deja caer sobre una superficie horizontal. Suponiendo el bolígrafo en forma de varilla homogénea de 15 cm de longitud, encontrar:*

*a) Momento de inercia del bolígrafo respecto a un eje perpendicular al mismo que pase por su base.*
*b) Velocidad angular que poseerá en el instante de chocar con la mesa. Considerar que el bolígrafo, inicialmente, tiene cierta energía potencial (¿cuánta?) y en su caída ésta se transforma en cinética de rotación.*

Sol.: *0,0075* M; *14 rad/s.*

## EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

**1.** *¿Con qué velocidad angular debe girar una plataforma horizontal para que un cuerpo situado a 3 m del eje de rotación empiece a deslizar radialmente? El coeficiente de rozamiento es 0,1, y la aceleración de la gravedad 9,8 m/s².*

Propuesto en 1980.

Sol.: $\omega = 0{,}57$ *rad/s.*

**2.** *Calcular el momento de inercia de una barra homogénea y quebrada de masa 3 m, formada por dos lados perpendiculares entre sí, uno de longitud a y otro de longitud 2a.*

*a) Respecto de un eje que contenga el lado* a.
*b) Respecto de un eje que contenga el lado 2a.*
*c) Respecto de un eje que siendo paralelo al lado 2a pase por el extremo libre del lado* a. *(Los resultados deben expresarse en función de m y de* a*).*

Propuesto en 1981.

Sol.: *8/3 · m · a²; 1/3 · m · a²; 7/3 · m · a².*

**3.** *Un patinador se desliza sobre hielo de modo que puede controlar la velocidad de rotación sobre sí mismo extendiendo o encogiendo los brazos. ¿Cuál será la relación de velocidades que existe entre las posiciones extremas, con los brazos totalmente extendidos en cruz y totalmente recogidos sobre el cuerpo?*

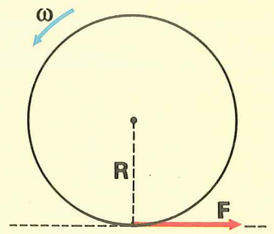
**Nota:** *Supóngase que el cuerpo con los dos brazos recogidos puede considerarse como un cilindro de 15 cm de radio y 72 kg de masa. Con los brazos extendidos el cuerpo puede considerarse como un cilindro de 15 cm de radio y 64 kg de masa, mientras que los brazos pueden considerarse como una varilla perpendicular al cuerpo de 1,5 m de larga y 8 kg de masa.*

Propuesto en 1982.

Sol.: *2,74 veces.*



**4.** *Un cilindro homogéneo de 40 cm de radio y 10 kg de masa, tiene libertad para girar en torno a su eje de simetría sobre cojinetes carentes de fricción. Supongamos que súbitamente, tal como se indica en la figura, se aplica una fuerza de 10 N que se mantiene constante y tangencial a la superficie lateral. Calcúlese:*

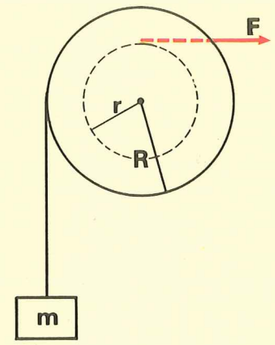



*a) La energía cinética a los 2 segundos de haber aplicado la fuerza.*
*b) El trabajo realizado por dicha fuerza durante este tiempo.*

Propuesto en 1983.

Sol.: *40 J.*

**5.** *La figura representa un cilindro macizo y homogéneo de 20 cm de radio y 20 kg de masa. En la periferia va arrollado un hilo ideal de cuyo extremo libre cuelga una masa de 8 kg. Por una hendidura muy fina se le arrolla otro hilo ideal a una distancia del eje horizontal de 10 cm, en cuyo extremo libre se le aplica una fuerza constante de 200 N. Calcular:*




*a) El momento de inercia del cilindro respecto de un eje que coincide con una generatriz.*
*b) La aceleración con que asciende la masa m.*
*c) La aceleración angular del cilindro.*
*d) La tensión en el hilo que sostiene la masa.*

Propuesto en 1986.

Sol.: *a) 0,4 kg · m²; b) 1,2 m/s²; c) 6 rad/s²; d) 88 N.*

**6.** *Una bola homogénea de acero de 1 kg de masa, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal con una velocidad de traslación de 20 m/s. Encuentra en su camino un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con el plano horizontal y asciende por él. Prescindiendo de rozamientos, se pide:*

*a) La energía cinética total de la bola cuando aborda el plano inclinado.*
*b) La distancia recorrida por la bola sobre el plano inclinado hasta que se para.*

*Se recuerda que el momento de inercia de una esfera homogénea, de masa* M *y radio* R*, respecto a uno de sus diámetros, es:* $I = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$. *Tómese* $g = 9{,}8$ *m/s².*

Propuesto en 1984.

Sol.: *280 J; 57,14 m.*

**7.** *Si el momento de una fuerza y el trabajo se definen ambos como el producto de la fuerza por la distancia, ¿en qué difieren?*