Problemas

[6 PUNTOS: 1 / APARTADO]

1. Una onda transversal se propaga en el sentido negativo de las *X* con una velocidad de 5,00 m/s. El foco emisor vibra 25 veces por segundo, con una amplitud de 30 cm. Determina:
   a) La ecuación de la onda.
   b) La distancia entre dos puntos desfasados en $13\,\pi / 4$ rad
   c) Los instantes en el que un punto situado a 2,5 cm del origen tiene velocidad nula.

2. Una masa de 2,75 kg se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamientos, a la velocidad de $3{,}73\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, y comprime un muelle elástico de masa despreciable y de constante recuperadora $938\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$
   a) Determina la velocidad de la masa cuando el muelle se ha comprimido 14,5 cm.
   b) Escribe la ecuación de movimiento de la masa si queda enganchada al muelle.
   c) Calcula el tiempo que duró la compresión de 14,5 cm.

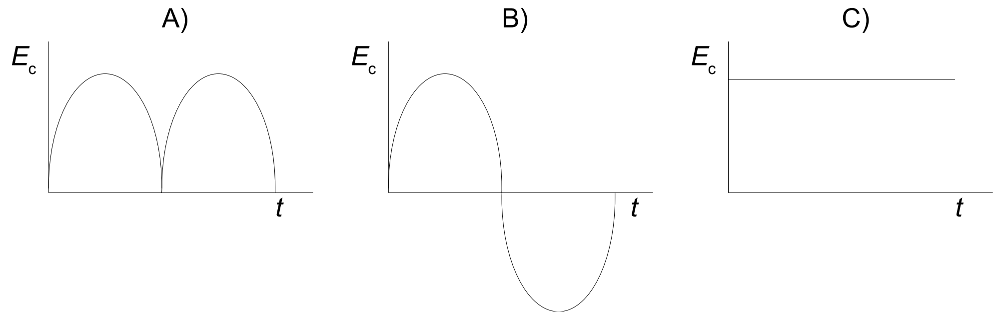
Cuestiones

[4 PUNTOS:1 / CUESTIÓN]

1. Al aplicar el principio de Huygens a la refracción de una onda que atraviesa un plano de separación entre dos medios, se llega a que el ángulo que forma el frente de onda refractado con el plano:
   A. Es siempre igual que el ángulo del frente incidente con el plano.
   B. Es siempre menor que el ángulo del frente incidente con el plano.
   C. Con respeto al ángulo del frente incidente, depende de las velocidades de la onda en ambos medios.

2. Las ondas sonoras:
   A. Son transversales. B. Se difractan en las esquinas C. Se transmiten en el vacío.

3. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la variación de energía cinética de un oscilador armónico en función del tiempo?



Laboratorio

[1 PUNTO]

1. En el estudio estático de un muelle se representan los puntos de longitudes (l_i) frente a las fuerzas aplicadas (F_i), dando una línea recta. En el estudio dinámico del mismo muelle se representan las masas (m_i) frente a los cuadrados de los períodos (T_i^2), obteniéndose también una recta. ¿Tienen ambas la misma pendiente? Razona la respuesta.

Soluciones

Problemas

1. Una onda transversal se propaga en el sentido negativo de las X con una velocidad de 5,00 m/s. El foco emisor vibra 25 veces por segundo, con una amplitud de 30 cm. Determina:
a) La ecuación de la onda.
b) La distancia entre dos puntos desfasados en $13\ \pi / 4$ rad.
c) Los instantes en el que un punto situado a 2,5 cm del origen tiene velocidad nula.

Solución:

Datos:
velocidad de propagación de la onda: v = 5,00 m/s
frecuencia: $f = 25$ Hz = 25 s^{-1}
amplitud: $A = 30$ cm = 0,30 m

Incógnitas:

ecuación de la onda: $y(x,t)$
instantes para x = -2,5 cm, v = 0: t

Ecuaciones:
de una onda armónica unidimensional: $y = A\ \mathrm{sen}(\omega\ t \pm kx)$
velocidad de propagación de la onda: $\mathrm{v} = \lambda f$
frecuencia: $f = 1 / T$
número de onda: $k = 2\ \pi / \lambda$
frecuencia angular: $\omega = 2\ \pi / T$

Cálculos:

$$\lambda = \mathrm{v} / f = 5{,}00\ [\mathrm{m/s}] / (25\ [\mathrm{s}^{-1}]) = 0{,}20\ \mathrm{m}$$

$$T = 1 / f = 1 / (25\ [\mathrm{s}^{-1}]) = 0{,}040\ \mathrm{s}$$

$$\omega = 2\ \pi\ [\mathrm{rad}] / (0{,}040\ [\mathrm{s}]) = 50\ \pi\ \mathrm{rad/s}$$

$$k = 2\ \pi\ [\mathrm{rad}] / (0{,}20\ [\mathrm{m}]) = 10\ \pi\ \mathrm{rad/m}$$

$$y = 0{,}30\ \mathrm{sen}(50\ \pi\ t + 10\ \pi\ x)\ \ [\mathrm{m}]$$

el signo es positivo porque la onda se desplaza en sentido negativo del eje X.

b) El desfase es

$$\Delta\varphi = \Delta(\omega\ t + kx)$$

$$13\ \pi / 4 = (50\ \pi\ t + 10\ \pi\ x_2) - (50\ \pi\ t + 10\ \pi\ x_1)$$

$$13\ \pi / 4 = 10\ \pi\ \Delta x$$

$$\Delta x = 13/40 = 0{,}325\ \mathrm{m}$$

Análisis: El desfase corresponde a $(13\ \pi / 4) / 2\ \pi = 13 / 8\ \lambda$. *Como* λ = 0,20 m, $\Delta x = 13 / 8 \cdot 0{,}20$ m = 0,325 m

c) La velocidad de oscilación es la derivada de la elongación con respecto al tiempo:

$$v = dy / dt = 15\,\pi \cos(50\,\pi\, t + 10\,\pi\, x)\ [\text{m/s}]$$

Sustituyendo x = -0,025 [m], porque se desplaza hacia la izquierda, y v = 0

$$0 = 15\,\pi \cos(50\,\pi\, t + 10\,\pi\,(-0{,}025))$$

$$50\,\pi\, t - \pi / 4 = \arccos 0 = \pi / 2\ [\text{rad}]$$

$$t = 0{,}015\ \text{s}$$

La velocidad vuelve a anularse cada medio período. El tiempo en general sería

$$t = 0{,}015 + 0{,}020\, n\ \ [\text{s}]$$

siendo n = 0, 1, 2 ...

Análisis: La onda tarda un tiempo $t = |x| / \text{v} = 0{,}025\ [\text{m}] / 5{,}0\ [\text{m·s}^{-1}] = 0{,}0050$ s *en alcanzar el punto. Éste oscila hasta alcanzar su elongación máxima en la que* v = 0, *en un tiempo igual a* $T / 4 = 0{,}040\ [\text{s}] / 4 = 0{,}010$ s. *Por tanto, el tiempo total es:* $t_T = 0{,}0050 + 0{,}010 = 0{,}015$ s.
Si se hubiese tomado la coordenada del punto como positiva, x = 0,025 [m]*, el tiempo obtenido hubiese sido* 0,005 s*, pero sería incongruente con la ecuación que se tomó el signo positivo ya que la onda se desplazaba en sentido negativo de las X.*
Si se hubiese empleado como ecuación de onda: $y = A \cos(\omega\, t \pm kx)$ *el tiempo hubiese dado sólo* 0,005 s *porque en esta forma de la ecuación, la velocidad se anula para el comienzo de la vibración ya que parte del punto de elongación máxima. No parece muy lógico para una onda transversal que se propaga por una cuerda donde las posición inicial de los puntos es la de equilibrio.*

2. Una masa de 2,75 kg se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamientos, a la velocidad de 3,73 m·s^{-1}, y comprime un muelle elástico de masa despreciable y de constante recuperadora 938 N·m^{-1}.
a) Determina la velocidad de la masa cuando el muelle se ha comprimido 14,5 cm.
b) Escribe la ecuación de movimiento de la masa si queda enganchada al muelle.
c) Calcula el tiempo que duró la compresión de 14,5 cm.

Solución:

Como la única fuerza no conservativa es la normal, el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo (la fuerza normal es perpendicular al desplazamiento en todo el trayecto) y la energía mecánica se conserva.

$$(E_C + E_{P\,\text{elastica}})_{\text{inicial}} = (E_C + E_{P\,\text{elastica}})_{\text{final}}$$

La energía cinética de una masa m que se mueve con una celeridad v, viene dada por $E_C = ½\, m\, \text{v}^2$.
La energía potencial elástica de una partícula que se encuentra sujeta a un muelle de constante de fuerza k, cuando se encuentra separado de la posición de equilibrio una distancia x, es

$$E_{P\,\text{elastica}} = ½\, k\, x^2$$

$$½\, m\, \text{v}_0^2 + ½\, k\, x_0^2 = ½\, m\, \text{v}_f^2 + ½\, k\, x_f^2$$

$$½\ 2{,}75\ \text{kg}\ (3{,}73\ \text{m·s}^{-1})^2 + 0 = ½\ 2{,}75\ \text{kg}\ \text{v}_f^2 + ½\ 938\ \text{N·m}^{-1}\ (0{,}145\ \text{m})^2$$

$$\text{v}_f = \sqrt{\frac{(2{,}75\ \text{kg}(3{,}73\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 - 938\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}(0{,}145\ \text{m})^2)}{2{,}75\ \text{kg}}} = 2{,}60\ \text{m/s}$$

b) La ecuación de un MAS es

$$x = A\ \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

Se calcula la amplitud a partir de la energía, entre el punto de equilibrio y el de máxima elongación:

$$½\ 2{,}75 \text{ kg } (3{,}73 \text{ m·s}^{-1})^2 + 0 = ½\ 2{,}75 \text{ kg } 0^2 + ½\ 938 \text{ N·m}^{-1} A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2{,}75 \text{ kg} \cdot (3{,}73 \text{ m/s})^2}{938 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}} = 0{,}202 \text{ m}$$

La pulsación se puede obtener de la velocidad máxima.
La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$\text{v} = dx / dt = A\ \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

y es máxima cuando el coseno es 1

$$\text{v}_{\text{máx}} = A\ \omega$$

$$\omega = \frac{\text{v}_{\text{máx}}}{A} = \frac{3{,}73 \text{ m/s}}{0{,}202 \text{ m}} = 18{,}5 \text{ rad/s}$$

La posición inicial corresponde al punto de equilibrio con el muelle comprimiéndose. Para $t = 0$

$$0 = A \text{ sen}(\varphi_0)$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ ó } \varphi_0 = \pi$$

$$\text{v}_0 = A\ \omega \cos(\varphi_0)$$

que es $\text{v}_0 > 0$ si $\varphi_0 = 0$ y $\text{v}_0 < 0$ si $\varphi_0 = \pi$.
Si tomamos como sentido positivo el de la compresión del muelle:

$$\varphi_0 = 0$$

$$x = 0{,}202 \text{ sen}(18{,}5\ t) \quad [\text{m}]$$

c) Sustituyendo los valores en la ecuación, teniendo en cuenta que la compresión es negativa:

$$0{,}145 = 0{,}202 \text{ sen}(18{,}5\ t)$$

$$(18{,}5\ t) = \text{arc sen } (0{,}145/0{,}202) = 0{,}800 \text{ rad}$$

$$(18{,}5\ t) = 0{,}800$$

$$t = \frac{0{,}800}{18{,}5} = 0{,}0434 \text{ s}$$

Análisis: El tiempo de compresión ha de ser inferior a la cuarta parte del período, ya que el móvil no ha descrito ni la cuarta parte de una oscilación. El período es $T = 2\pi / \omega = 0{,}340$ s*, y* $T / 4 = 0{,}085$ s.

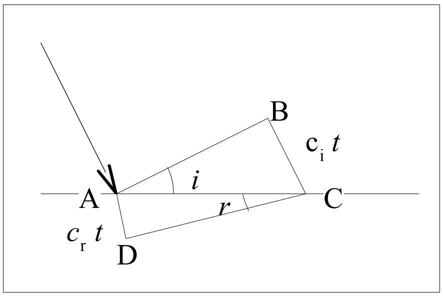
Cuestiones

1. Al aplicar el principio de Huygens a la refracción de una onda que atraviesa un plano de separación entre dos medios, se llega a que el ángulo que forma el frente de onda refractado con el plano:
   A. Es siempre igual que el ángulo del frente incidente con el plano.
   B. Es siempre menor que el ángulo del frente incidente con el plano.
   C. Con respeto al ángulo del frente incidente, depende de las velocidades de la onda en ambos medios.

Solución:

El principio de Huygens dice que cualquier punto alcanzado por un frente de ondas se convierte en un nuevo foco emisor de ondas, y que el nuevo frente de ondas se construye cómo la envolvente de

los frentes creados por los nuevos focos.
Cuando un frente de ondas llega la un plano de separación entre dos medios, una parte de él lo atraviesa y pasa al segundo medio, dando lugar a un frente de ondas refractado.



Si c_i es la velocidad de la onda en el medio incidente y c_r es velocidad de la onda en el segundo medio, en el diagrama siguiente la línea AB representa el frente de onda incidente en el momento en que uno de sus extremos toca el plano de separación.
Durante el tiempo t en el que la onda que viajaba por el primero medio recorre la distancia BC = $c_i\ t$, la onda generada con foco en A se propaga por el segundo medio y recorre la distancia AD = $c_r\ t$.

De los triángulos BAC y ACD se pode deducir

$$\frac{sen\ \hat{i}}{sen\ \hat{r}}=\frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AD}{AC}}=\frac{BC}{AD}=\frac{c_i t}{c_r t}=\frac{c_i}{c_r}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la C, ya que el ángulo de refracción ∠r está relacionado con el ángulo de incidente ∠i por la ecuación anterior (2^a ley de Snell).

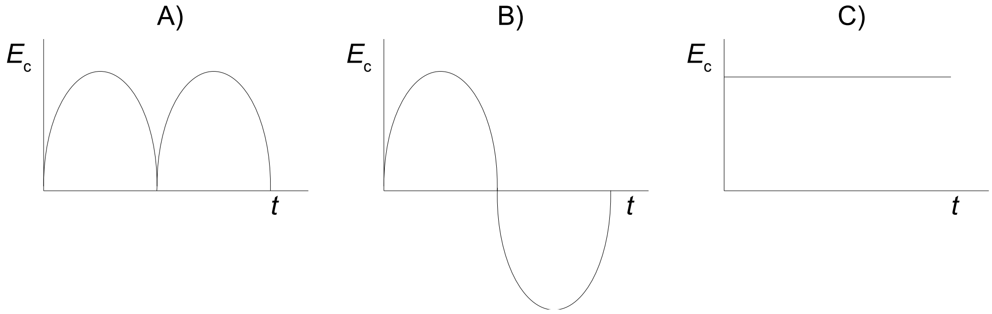
2. Las ondas sonoras:
   A. Son transversales. B. Se difractan en las esquinas C. Se transmiten en el vacío.

Solución: B

Una onda es transversal cuando la dirección de oscilación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, y es longitudinal cuando ambas direcciones son paralelas.
Si pensamos en el sonido producido por una superficie plana (la piel de un tambor, la pantalla de un altavoz), la vibración de la superficie empuja a las partículas del medio (moléculas de aire) que se desplazan hasta chocar con otras vecinas y rebotar, en la dirección en la que oscila la superficie y en la que se desplaza el sonido.

Las otras opciones:
A: Son transversales las ondas sobre la superficie del agua o en una cuerda vibrante.
C: No se transmiten en el vacío. Un dispositivo que lo confirma es un despertador colocado dentro de un recipiente en el que se hace el vacío. Se hace sonar y va haciéndose el vacío en el recipiente. Se ve como el timbre del despertador sigue golpeando la campana, pero el sonido se va haciendo más débil hasta desaparecer.

3. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la variación de energía cinética de un oscilador armónico en función del tiempo?



Solución: A

La ecuación de movimiento de un oscilador armónico es:

$$x = A\ \mathrm{sen}(\omega\ t + \varphi_0)$$

Le velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$\mathrm{v} = dx\ /\ dt = A\omega\ \cos(\omega\ t + \varphi_0)$$

La energía cinética de un oscilador armónico, será entonces

$$E_c = ½\ m\mathrm{v}^2 = ½\ m\ A^2\ \omega^2\ \cos^2(\omega\ t + \varphi_0)$$

una función de tipo del cuadrado del coseno. Como el cuadrado de un número negativo es positivo, la opción correcta es la A.

Laboratorio

1. En el estudio estático de un muelle se representan los puntos de longitudes (l_i) frente a las fuerzas aplicadas (F_i), dando una línea recta. En el estudio dinámico del mismo muelle se representan las masas (m_i) frente a los cuadrados de los períodos (T_i^2), obteniéndose también una recta. ¿Tienen ambas la misma pendiente? Razona la respuesta.

Solución:

En el estudio estático se usa la ley de Hooke:

$$F = k\ \Delta l$$

Si Δl se representa en el eje de ordenadas, y las fuerzas F en el eje de abscisas, la pendiente de la recta será:

$$\text{pendiente estudio estático} = p_e = \Delta l\ /\ \Delta F = 1\ /\ k$$

igual al inverso de la constante elástica del resorte.
En el estudio dinámico, la ecuación empleada es la relación entre la constante elástica k y la constante armónica ω

$$k = m\ \omega^2 = 4\ \pi^2\ m\ /\ T^2$$

En la representación, las masas están en el eje de ordenadas y los cuadrados de los períodos en el de abscisas. Entonces:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \Delta m\ /\ \varDelta T^2 = k\ /\ 4\ \pi^2$$

Por lo tanto la pendiente de la representación derivada del estudio dinámico debería ser:

$$p_d = k\ /\ 4\ \pi^2 = 1\ /\ (p_e\ 4\ \pi^2)$$

distinta a la obtenida por el método estático.