Ondas estacionarias

Un caso interesante de interferencia de ondas surge cuando ***interfieren dos ondas idénticas que se propagan en sentidos contrarios*** (lo que sucede, por ejemplo, cuando la onda reflejada y la incidente se encuentran). Podemos obtener la onda resultante realizando la suma de las ondas que interfieren:

$$y_1 = A \text{ sen } (kx - \omega t)$$
$$y_2 = A \text{ sen } (kx + \omega t)$$
$$y = y_1 + y_2 = A \left[\text{sen } (kx - \omega t) + \text{sen } (kx + \omega t)\right] \quad (1)$$
$$\text{Si hacemos}: \alpha = kx - \omega t \quad \text{y} \quad \beta = kx + \omega t$$
$$\text{Y teniendo en cuenta que}:$$
$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\text{Tenemos}:$$
$$\text{sen } (kx - \omega t) + \text{sen } (kx + \omega t) = 2 \text{ sen } \frac{kx - \cancel{\omega t} + kx + \cancel{\omega t}}{2} \cos \frac{\cancel{kx} - \omega t - \cancel{kx} - \omega t}{2} =$$
$$= 2 \text{ sen } \frac{\cancel{2}\ kx}{\cancel{2}} \cos \frac{-\cancel{2}\omega t}{\cancel{2}} = 2 \text{ sen } (kx) \cos (-\omega t)$$
$$\text{Y teniendo en cuenta que}: \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$
$$\text{sen } (kx - \omega t) + \text{sen } (kx + \omega t) = 2 \text{ sen } (kx) \cos (\omega t)$$
$$\text{Sustituyendo en (1)}:$$
$$\boxed{y = y_1 + y_2 = 2A \text{ sen } (kx) \cos(\omega t)}$$

El análisis del resultado obtenido nos muestra que hemos obtenido la ecuación de un MAS en el que la amplitud depende de la distancia al origen (x):

$$y = 2A \text{ sen}(kx) \cos(\omega t) = A_R \cos(\omega t)$$
$$\text{Donde } A_R = 2A \text{ sen}(kx)$$

La onda resultante de la interferencia hace que los puntos vibren arriba y abajo, unos con mayor amplitud, otros con menor, algunos con amplitud nula, pero en situación estacionaria. ***La energía no se transmite de unos a otros*** como en las ondas. Por eso la onda resultante recibe el nombre de ***onda estacionaria.***

Los puntos de amplitud nula reciben el nombre de nodos y estarán situados a una distancia de:

$$A_R = 2A \text{ sen}(kx) = 0$$
$$\text{sen } (kx) = 0$$
$$kx = 0, \pi, 2\pi \ldots n\pi$$
$$kx = n\,\pi$$
$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} x = n\,\cancel{\pi}$$
$$\boxed{x = n\frac{\lambda}{2}}$$

Los nodos de una onda estacionaria se localizan a distancias iguales a un número entero de semilongitudes de onda.

La amplitud tendrá su valor máximo (vientre) cuando el seno adquiera su valor máximo:

$$\text{sen}\,(kx) = \pm 1$$

$$kx = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \ldots \quad (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

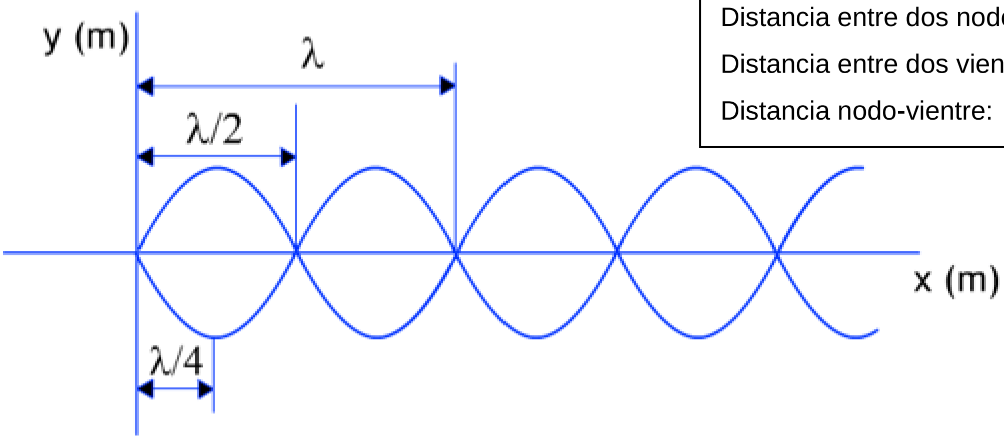
$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\cancel{\pi}}{2}$$

$$\boxed{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}}$$

Los vientres de una onda estacionaria se localizan a distancias iguales a un número impar de cuartos de la longitud de onda.

Distancia entre dos nodos: $\lambda/2$
Distancia entre dos vientres: $\lambda/2$
Distancia nodo-vientre: $\lambda/4$



Observar que la onda correspondiente a la ecuación tiene un nodo en el, origen (x =0)

$$y = 2A\,\text{sen}(kx)\ \ \cos(\omega t)$$

Para x=0, sen 0 = 0, A_R =0

NOTA

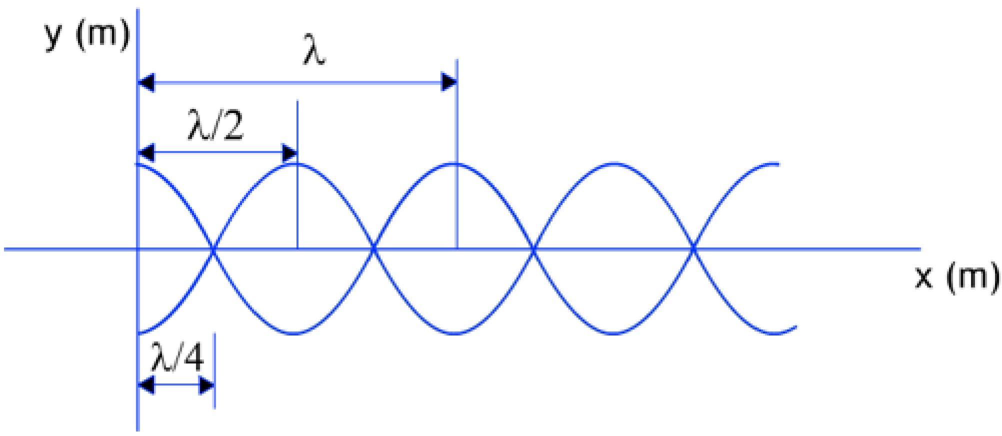
En algunos textos se da como ecuación para las ondas estacionarias la siguiente:

$$y = 2A\cos(kx)\ \ \text{sen}(\omega t)$$

Esta ecuación se corresponde con una onda estacionaria que tiene un vientre en el origen (x=0), ya que en este punto la amplitud vale 2A:

$$y = 2A\cos(kx)\ \ \text{sen}(\omega t)$$

Para x=0, cos 0 = 1, A_R = 2 A



Observar (ver figura) que en este caso los vientres se localizan a una distancia igual a un número entero de semilongitudes de onda y los nodos a un número impar de cuartos de la longitud de onda.

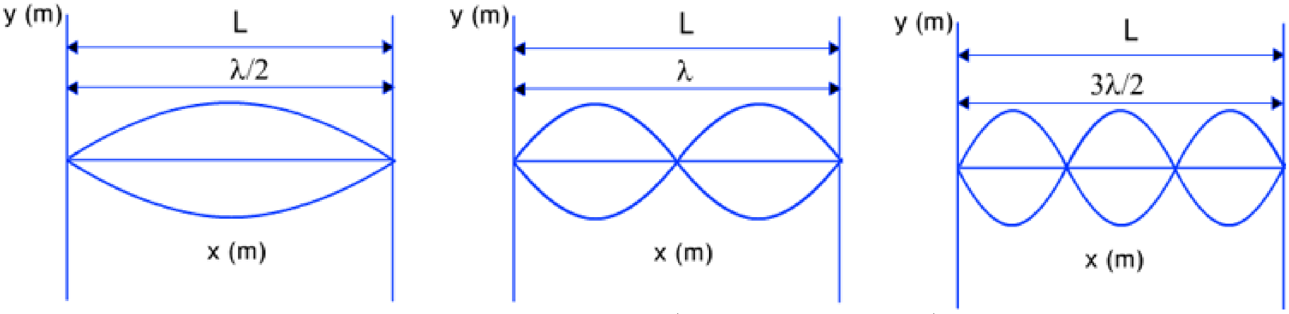
Ondas estacionarias en cuerdas vibrantes y en tubos

Un caso muy corriente de aparición de ondas estacionarias son las cuerdas vibrantes o las columnas de aire confinadas en tubos.

En estos casos existe una restricción importante impuesta por las condiciones físicas en los extremos de la onda **(condiciones de contorno).**

- **Cuerda fija en ambos extremos o tubo cerrado**

  Debido a que en los extremos debe existir un nodo no son posibles todas las ondas, ***debe cumplirse que la longitud de la cuerda o el tubo sea igual a un número entero de semilongitudes de onda***:



Condición para que se forme la onda: $\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}\;;\quad \lambda = \frac{2}{n}L}$ Donde n = 1, 2, 3...

El primer modo de vibración se obtiene para n = 1 y se denomina ***modo fundamental o primer armónico.***

Para n =2 tenemos el segundo modo de vibración o ***segundo armónico***. Tiene un nodo en el centro. Observar que ***la frecuencia de la onda es doble*** en este modo (long. de onda, mitad que la fundamental)

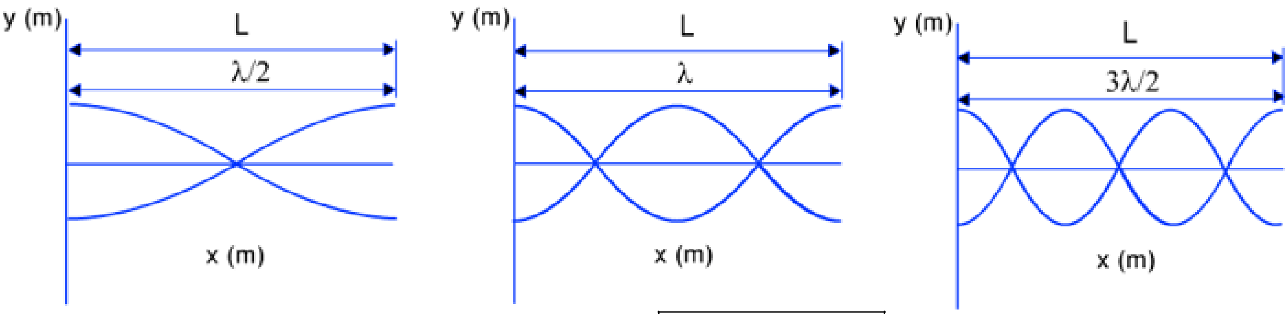
Para n =3 tenemos el tercer modo de vibración o ***tercer armónico***. Tiene dos nodos. Observar que la frecuencia de la onda es triple en este modo (long. de onda, un tercio de la fundamental).

Las frecuencias de los armónicos son doble, triple...etc. de la fundamental.

En los instrumentos de cuerda: violín, guitarra, violoncello o piano se producen este tipo de ondas al pulsar las cuerdas

- **Cuerda libre en ambos extremos o tubo abierto en ambos extremos**

  Ahora debe de existir un vientre en ambos extremos, luego las únicas ondas posibles son aquellas para las que ***la longitud de la cuerda o tubo sea igual a un número entero de semilongitudes de onda***



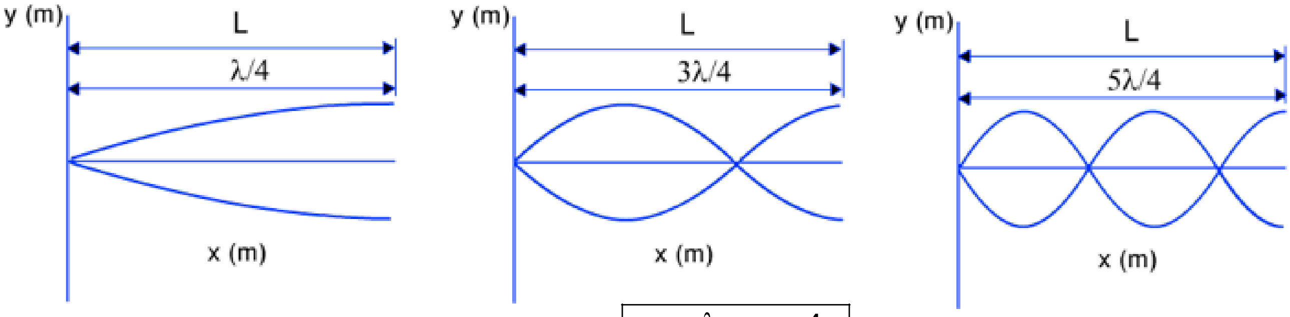
Condición para que se forme la onda: $\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}\;;\; \lambda = \frac{2}{n}L}$ Donde n = 1, 2, 3 ...

Ahora el primer modo de vibración (modo fundamental o primer armónico) tiene un nodo (en el centro), el segundo armónico dos...etc. La flauta dulce produce este tipo de ondas.

Las frecuencias de los armónicos son doble, triple...etc. de la fundamental.

- **Cuerda fija en uno de sus extremos y libre en el otro o tubo abierto en uno de sus extremos**

Ahora debe de cumplirse que exista un nodo en el extremo fijo y un vientre en el libre, luego las únicas ondas posibles son aquellas que cumplan que ***la longitud de la cuerda o tubo sea un múltiplo impar de cuartos de la longitud de onda.***



Condición para que se forme la onda: $\boxed{L = n\frac{\lambda}{4}\ ;\ \lambda = \frac{4}{n}L}$ Donde n = 1, 3, 5 ...

El primer modo de vibración (***modo fundamental o primer armónico)*** se obtiene para n=1

Para n =3 tenemos el tercer modo de vibración o ***tercer armónico***. Tiene un nodo a 2/3 de L Observar que ***la frecuencia de la onda es el triple de la fundamental*** en este modo (long. de onda, un tercio de la fundamental)

Para n =5 tenemos el quinto modo de vibración o ***quinto armónico***. Tiene dos nodos (a 2/5 y 4/5 de L). Observar que la frecuencia de la onda es cinco veces mayor en este modo (long. de onda, un quinto de la fundamental)

Observar que en este caso se encuentran ausentes los armónicos pares.

Los armónicos tienen una frecuencia triple, quíntuple... etc. de la fundamental.

Los instrumentos llamados "de embocadura" como el clarinete o el oboe producen este tipo de ondas.

Ejemplo 1. (Oviedo, 2010-2011)

Realice un dibujo del cuarto armónico de una onda estacionaria en una cuerda de piano sujeta por ambos extremos.

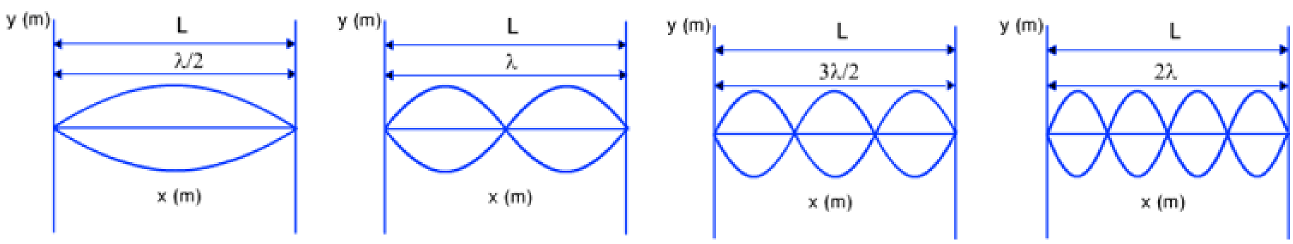
a) Si la longitud de la cuerda es de 100 cm, cuánto vale la longitud de onda?

b) Si la frecuencia generada por este cuarto armónico es de 925 Hz, ¿cuánto vale la velocidad de propagación?

c) Cuánto vale la frecuencia del primer armónico?

Solución:

a) Se muestran a continuación los cuatro primeros modos de vibración para una cuerda que vibra con los extremos fijos:



Como se ve para una cuerda con los extremos fijos todos los armónicos han de cumplir la condición de contorno de que ***en los extremos existan nodos***. Para el cuarto modo su longitud de onda es un cuarto de la del modo fundamental y, en consecuencia, su frecuencia será cuatro veces superior a la frecuencia fundamental.

Para una cuerda sujeta por ambos extremos se tiene: $\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}\ ;\quad \lambda = \frac{2}{n}L}$

Por tanto para el cuarto modo de vibración : $\lambda = \frac{2}{n}L = \frac{2}{4}\ 1{,}00\ m = 0{,}50\ m$

b) $$v = \lambda\, f = 0,50\ \text{m}\ .\ 925\ \text{s}^{-1} = 462,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) Tal y como se explica más arriba el primer armónico tienen una longitud de onda cuatro veces superior a la del cuarto, por tanto su frecuencia será cuatro veces menor:

$f_{\text{(1er armónico, frecuencia fundamental)}}$ = 231,3 Hz

Ejemplo 2. (Oviedo, 2008-2009)

Una onda estacionaria en una cuerda tensa tiene por función de ondas:

$$y = 0,040\ \text{m}\cos(40\pi\ \text{s}^{-1}\ t)\ \text{sen}(5,0\pi\ \text{m}^{-1}\ x)$$

Determine:

a) La localización de todos los nodos en $0 \le x \le 0,40\ \text{m}$

b) El periodo del movimiento de un punto cualquiera de la cuerda diferente de un nodo.

c) La velocidad de propagación de la onda en la cuerda.

Solución:

a) Escribamos primero la ecuación de onda (en unidades S.I) de una manera más adecuada, ya que la introducción de las unidades en una ecuación (donde ya existen números y letras) dificulta su lectura:

$$y = 0,040\cos(40\pi\ t)\ \text{sen}(5,0\pi\ x)$$

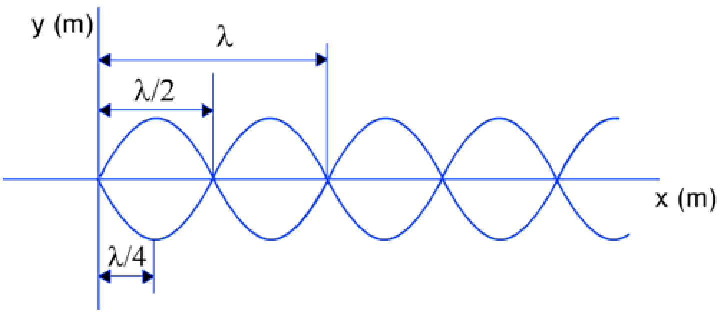
Una onda estacionaria se caracteriza por tener una determinada amplitud *función de la distancia al origen* y que los diversos puntos oscilan con MAS dando lugar a una situación estacionaria.

La ecuación dada no está correctamente escrita (al menos sus términos están desordenados). Debería de haberse escrito en la forma:

$$y = 0,040\ \text{sen}(5,0\pi\ x)\cos(40\pi\ t)$$
$$\text{Donde}: A_R = 0,040\ \text{sen}(5,0\pi\ x)$$

Ahora observamos claramente que para x = 0, $A_R = 0$.

El esquema para la onda estacionaria considerada será pues:



$$\text{Como } k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0,4\ \text{m}$$

Por tanto, entre 0 y 0,40 m existen tres nodos: uno en el origen, otro a 0,20 m (media longitud de onda) y un tercero al final, a 0,40 m (una longitud de onda)

b) Como se ha dicho más arriba todos los puntos oscilan con MAS de idéntico periodo (aunque diferente amplitud).

$$y = 0,040\ \text{sen}(5,0\pi\ x)\cos(40\pi\ t)$$
$$y = A_R\cos(40\pi\ t)$$
$$\text{Por tanto}: \omega = \frac{2\pi}{T} = 40\pi\ ;\ T = \frac{2\cancel{\pi}}{40\cancel{\pi}} = 0,05\ \text{s}$$

c) $$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,40\ \text{m}}{0,05\ \text{s}} = 8,00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ondas estacionarias en una cuerda
sujeta por ambos extremos

Ampliación

Cuando se estudian las ondas estacionarias en una cuerda (no flexible) sujeta por ambos extremos debemos de tener en cuenta tres ecuaciones fundamentales:

- La que da la velocidad de propagación para cualquier onda:

$$\boxed{v = \lambda\, f}$$

- La que nos da la velocidad de propagación de una onda en una cuerda tensa (depende de la tensión y de la densidad lineal: kg/m):

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

- La que impone las condiciones de contorno para que pueda existir la onda. Esto es, que exista un nodo en cada extremo:

$$\boxed{L = n\,\frac{\lambda}{2}}$$

Combinando las tres obtenemos la ecuación que ha de satisfacerse para que exista onda en la cuerda:

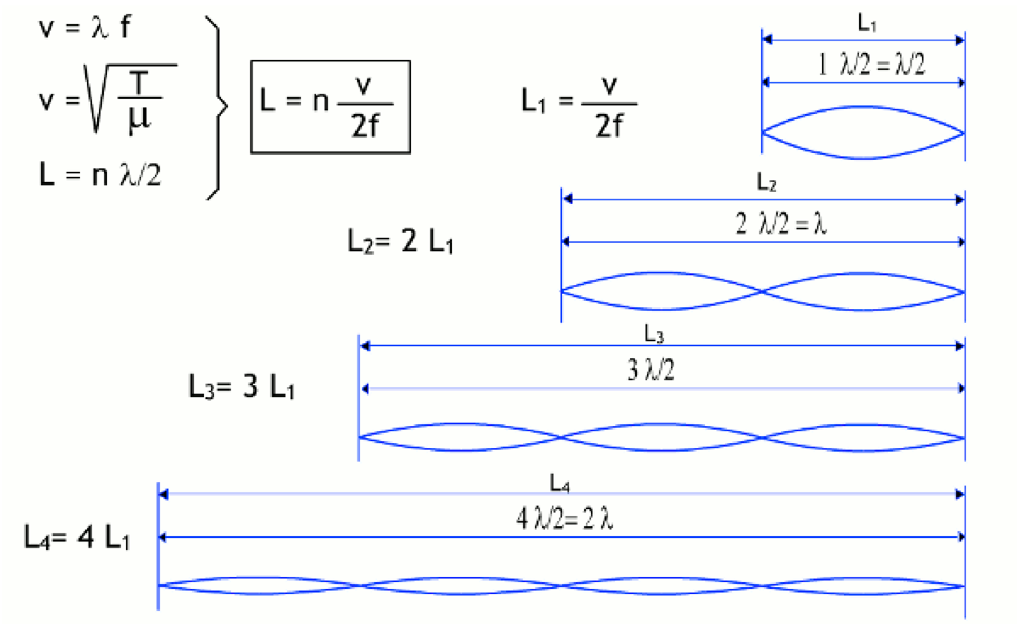
$$\boxed{L = n\,\frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2\,f}} \qquad (1)$$

Hay, por tanto, cuatro parámetros que podemos manejar a la hora de plantearnos la producción de ondas estacionarias en una cuerda: L, T, μ y f.

---

1. Mantenemos fija la cuerda (μ), su tensión (T) y la frecuencia (f), haciendo oscilar la cuerda con la frecuencia propia de un oscilador externo.

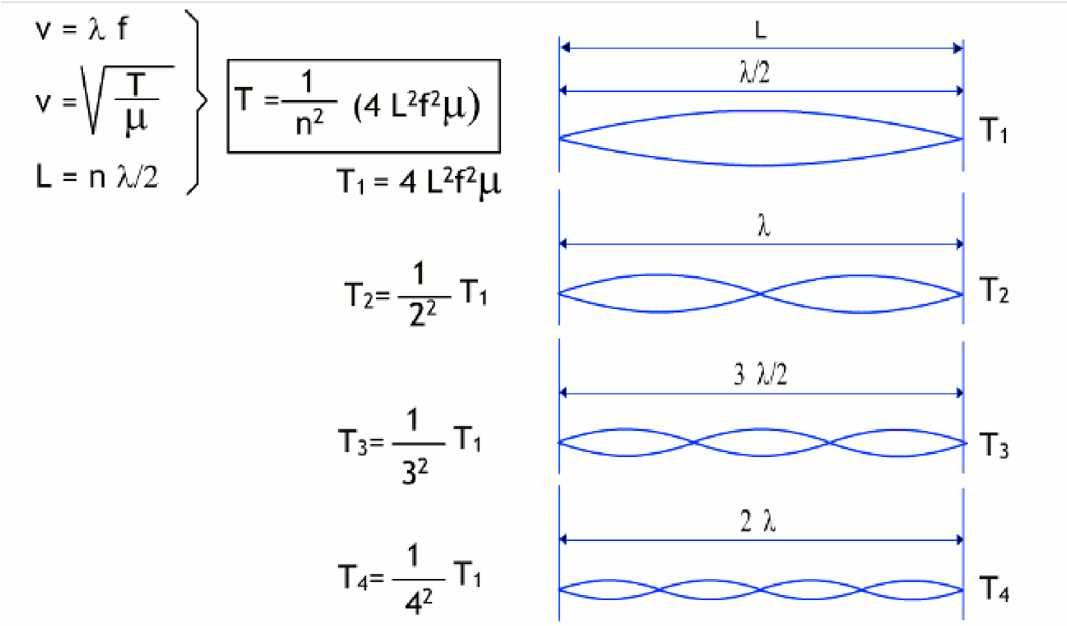
En este caso para que se satisfaga la ecuación (1) ***deberemos variar la longitud de la cuerda***. Con n =1 obtendremos el primer modo de vibración, primer armónico o modo fundamental. Para n = 2 obtenemos el segundo modo de vibración o segundo armónico; para n = 3 el tercer modo de vibración o tercer armónico... etc



En este caso ***todos los armónicos tienen la misma longitud de onda.***

2. ***Mantenemos fija la cuerda (μ), su longitud (L) y la frecuencia (f), haciendo oscilar la cuerda con la frecuencia propia de un oscilador externo.***

En este caso para que se satisfaga la ecuación (1) ***deberemos variar la tensión de la cuerda***. Con n =1 obtendremos el primer modo de vibración, primer armónico o modo fundamental. Para n = 2 obtenemos el segundo modo de vibración o segundo armónico; para n = 3 el tercer modo de vibración o tercer armónico... etc.



Como se puede observar en el esquema hay que disminuir la tensión (de arriba a abajo) para que aparezcan los correspondientes armónicos.

Al variar la tensión variará la velocidad de la onda y, al mantener constante la frecuencia de oscilación, ***variará la longitud de onda de la onda estacionaria.*** A menor tensión, menor velocidad de propagación y, como la frecuencia se mantiene constante, disminuirá la longitud de onda. Esto es lo que se aprecia en el esquema anterior al ir de arriba (mayor tensión, mayor velocidad, mayor longitud de onda) a abajo((menor tensión, menor velocidad, menor longitud de onda).

3. ***Mantenemos fija la tensión de la cuerda (T), su longitud (L) y la frecuencia (f), haciendo oscilar la cuerda con la frecuencia propia de un oscilador externo.***

En este caso para que se satisfaga la ecuación (1) ***deberemos variar la propia cuerda*** de tal forma que su densidad lineal satisfaga la ecuación:

$$\boxed{\mu = n^2 \frac{T}{4\,L^2 f^2}}$$

Con n =1 obtendremos el primer modo de vibración, primer armónico o modo fundamental. Para n = 2 obtenemos el segundo modo de vibración o segundo armónico; para n = 3 el tercer modo de vibración o tercer armónico... etc.

Para comprobar esto experimentalmente lo más operativo es usar diversas cuerdas, determinar su densidad lineal de masa y comprobar que se cumple la ecuación (1) variando la longitud en cada caso.

Al variar las cuerdas variará la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

En cuerdas más ligeras (menor densidad lineal) la velocidad de propagación será mayor y en cuerdas más pesadas (mayor densidad lineal) la velocidad de propagación será menor. Si mantenemos constante la frecuencia de oscilación (mediante un oscilador externo) comprobaremos que la longitud de onda es mayor para cuerdas más ligeras y más grande para cuerdas más pesadas.

Los instrumentos de cuerda: violoncello, violín, guitarra... etc. Tienen cuerdas de distintos grosores (distinta densidad lineal) y todas tienen idéntica longitud. Si proporcionamos a dos de ellas idéntica tensión, la frecuencia del primer armónico será mayor (sonido más agudo) para la más ligera:

$$\boxed{f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Combinando tensión y densidad lineal es posible "afinar" las cuerdas del instrumento para que cada una de ellas emita la frecuencia deseada.

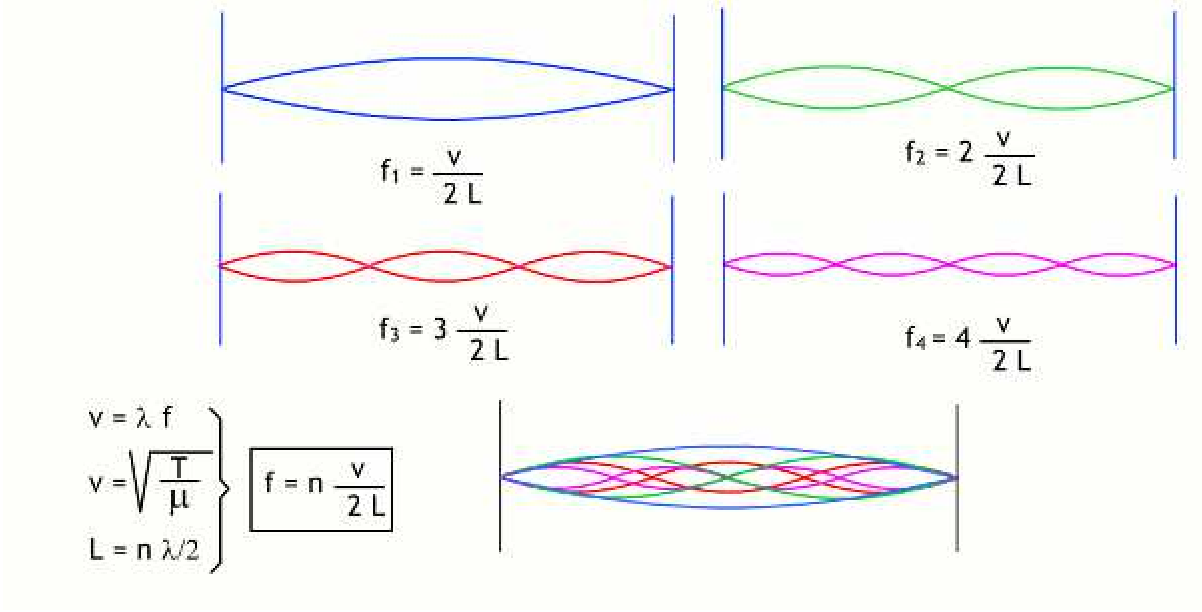
Para un violoncello, si empezamos por la cuerda más gruesa y terminamos por la más fina, las frecuencias son:

66 Hz (Do_2), 99 Hz (Sol_2), 148,5 Hz (Re_3) y 220 Hz (La_3) [(1)]

4. ***Mantenemos fija la cuerda (μ), la tensión (T) y su longitud (L).*** Si pulsamos s***e pueden generar varias frecuencias simultáneamente***, correspondientes a n=1, n=2, n=3... etc.

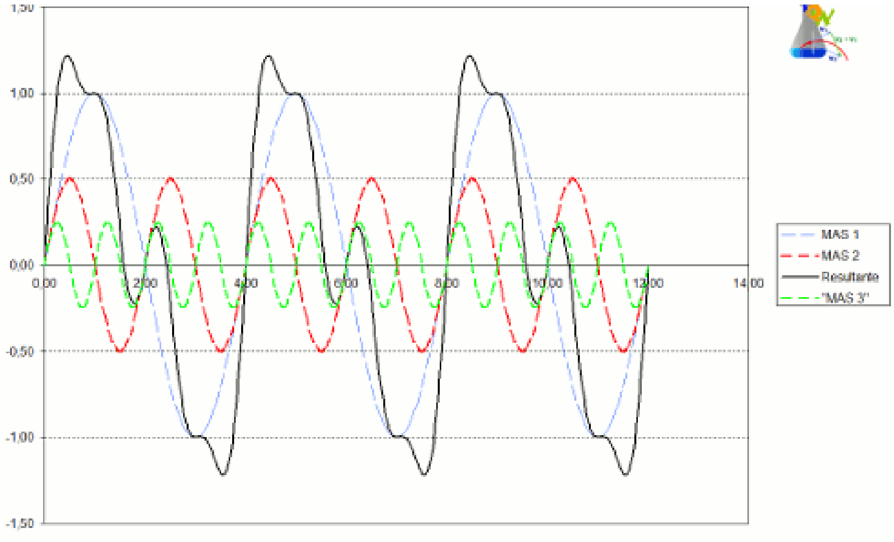
$$\boxed{f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = n\,\frac{v}{2L}}$$

Es decir, además del tono fundamental (o primer armónico) se generan otros armónicos con frecuencias doble, triple... etc del fundamental. Los armónicos generados, y su amplitud, dependen de varios factores tales como la constitución de las cuerdas, el material de que está hecho el instrumento, su geometría... etc.



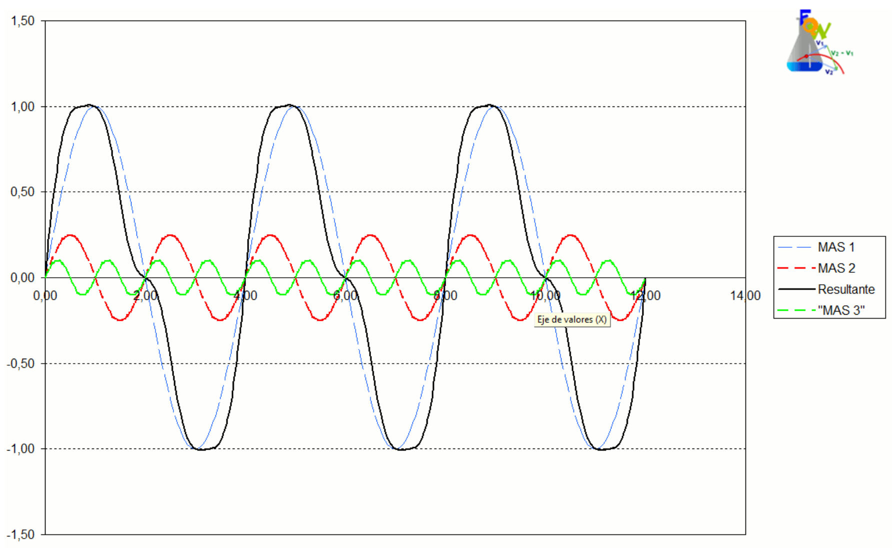
La combinación de armónicos permite distinguir entre un mismo sonido producido por instrumentos diferentes, dándoles su ***timbre*** característico.

(1) La_4 tiene una frecuencia de 440 Hz. Es el sonido usado como referencia para la afinación de los instrumentos. El La una octava más bajo tiene 220 Hz (La_3), dos octava más bajo 110 Hz (La_2) y tres octava más bajo 55 Hz (La_1). Con las demás notas se procede de forma análoga.



Combinación de tres MAS (resultante en negro) con las siguientes características:

T1 = 4,0 s A1 = 1,00 m
T2 = 2,0 s A1 = 0,50 m
T3 = 1,0 s A1 = 0,25 m



Combinación de tres MAS (resultante en negro) con las siguientes características:

T1 = 4,0 s A1 = 1,00 m
T2 = 2,0 s A1 = 0,30 m
T3 = 1,0 s A1 = 0,15 m

Si tomamos una cuerda y, pulsándola (como se hace en los instrumentos de cuerda), acortamos su longitud a la mitad, un cuarto... etc, la frecuencia del sonido fundamental aumenta al doble, al cuádruple, etc., produciendo sonidos el doble y el cuádruple de agudos que el fundamental (una octava, o dos, más altos que el fundamental).