UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2012-2013

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1.25 puntos)** Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

b) **(1.25 puntos)** Para los valores $a = 3$ y $b = 1$ calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

EJERCICIO 2

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t, \quad 0 \le t \le 8$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a) **(1.5 puntos)** Estudie la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) **(1 punto)** Dibuje la gráfica de $B(t)$ en el intervalo [0, 8] y explique, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.

EJERCICIO 3

El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.

a) **(1.5 puntos)** Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

b) **(1 punto)** Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?.

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.

b) **(1 punto)** A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0.02, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,

a) **(2 puntos)** ¿cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?.

b) **(0.5 puntos)** ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?.

EJERCICIO 2

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f\,'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1, 0)$ y $(5, 0)$ y con vértice $(2,-4)$.

a) **(1 punto)** Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.

b) **(0.5 puntos)** Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.

c) **(1 punto)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(2) = 5$.

EJERCICIO 3

De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0.3$ y que $P(B^C) = 0.25$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) **(0.75 puntos)** $P(A \cup B)$.

b) **(0.75 puntos)** $P(A^C \cap B^C)$.

c) **(1 punto)** $P(A / B^C)$.

EJERCICIO 4

El tiempo que los españoles dedican a ver la televisión los domingos es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 75 minutos. Elegida una muestra aleatoria de españoles se ha obtenido, para la media de esa distribución, el intervalo de confianza (188.18, 208.82), con un nivel del 99%.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la media muestral y el tamaño de la muestra.

b) **(1 punto)** Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 96%.

OPCIÓN A
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1.25 puntos)** Obtenga *a* y *b* sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

Efectuamos el producto matricial A^2 e igualamos al resultado que nos dan:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2+b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que dos matrices coincidan, todas sus posiciones deben ser iguales:

$$\begin{cases} 4-a=5 \\ -2+b=-2 \\ -2a+ab=-2 \\ -a+b^2=1 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema *superdeterminado*, puesto que tenemos más ecuaciones que incógnitas. Las soluciones que encontremos deben valer para las 4 ecuaciones. De las dos primeras, obtenemos a y b:

$$4 - a = 5 \;\Rightarrow\; a = -1; \qquad -2 + b = -2 \;\Rightarrow\; b = 0$$

Las otras dos ecuaciones parecen tener más de una solución, puesto que no son lineales. Pero las que hemos resuelto sólo tienen ésta. Si las otras dos tuviesen alguna más, no nos valdrían para éstas. Sin embargo, la solución obtenida sí que resuelve las ecuaciones 3ª y 4ª. Por consiguiente, son la solución única del sistema:

$$\boxed{a = -1 \text{ con } b = 0}$$

Por tanto:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que $\boxed{\text{es simétrica, puesto que } A = A^t}$.

b) **(1.25 puntos)** Para los valores $a = 3$ y $b = 1$ calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

Despejando: $A\cdot B = 2(X - 3I_2) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} A\cdot B = \frac{1}{2}2(X - 3I_2) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}A\cdot B = X - 3I_2 \;\Rightarrow$

$\frac{1}{2}A\cdot B + 3I_2 = X - 3I_2 + 3I_2 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{1}{2}A\cdot B + 3I_2 = X}$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 9/2 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t, \quad 0 \le t \le 8$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a) **(1.5 puntos)** Estudie la monotonía y los extremos de $B(t)$.

Para estudiar la monotonía, derivamos:

$$B'(t) = \frac{3t^2}{4} - 6t + 9$$

- Discontinuidades de B ó B': No tienen, puesto que ambas son polinómicas.
- $B'(t) = 0$: $3t^2 - 24t + 36 = 0$ (hemos multiplicado por 4 ambos miembros) $\Rightarrow$ $t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2$ ó $t = 6$.

Dividimos el dominio en intervalos mediante los puntos obtenidos. En cada uno de esos intervalos está garantizado que el signo de B' es el mismo en cualquier punto. Elegimos un punto cualquiera de cada intervalo y lo llevamos a B'. Así averiguamos su signo en el intervalo en cuestión y, por tanto, sabremos la monotonía de B en el mismo:

	(0, 2)	2	(2, 6)	6	(6, 8)
B'	+	0	–	0	+
B	↗	**Máx**	↘	**Mín**	↗

Así, llevando las abscisas de los extremos relativos a B, sabemos que tiene:

- Máximo relativo en (2, 8)
- mínimo relativo en (6, 0)

b) **(1 punto)** Dibuje la gráfica de $B(t)$ en el intervalo [0, 8] y explique, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.

- Hallamos los cortes con los ejes de coordenadas y los puntos en los extremos del intervalo donde está definida:

$$B(t) = 0 \Rightarrow \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t = 0 \Rightarrow t^3 - 12t^2 + 36t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(t^2 - 12t + 36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \quad \text{ó} \\ t^2 - 12t + 36 = 0 \Rightarrow t = 6 \end{cases}$$

Luego corta en (0, 0) y (6, 0) al eje OX. Y también tenemos el corte con OY: el origen de coordenadas. El mismo valor es el comienzo de la curva, pues es el extremo inferior del intervalo que constituye el dominio: [0, 8]. El otro valor es (8, 8), como se obtiene calculando $B(8) = 8$.

- Por último, calculamos la curvatura.

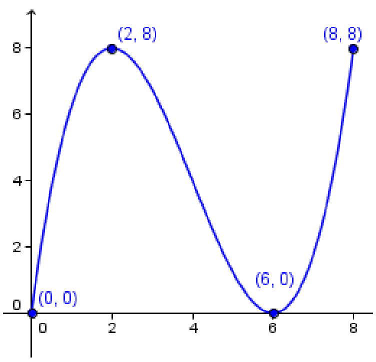
$$B''(t) = \frac{3t}{2} - 6$$

  - Discontinuidades de B, B', B'': No tiene (son polinómicas).
  - $B''(t) = 0$: $3t - 12 = 0 \Rightarrow t = 4$.

  Dividimos el dominio en intervalos:

	(0, 4)	4	(4, 8)
B''	–	0	+
B	∩	P.I.	∪

  Tiene un punto de inflexión en (4, 4).



Con ello, tenemos la gráfica completa. A la vista de la misma, deducimos:

Los beneficios comienzan en 0 al principio, crecen continuamente hasta un máximo (absoluto y relativo) en el año 2, siendo de 8 millones. Desde ahí, decrecen hasta ser nuevamente 0 en el año 6. Desde entonces, no paran de aumentar hasta valer nuevamente 8 millones (otro máximo absoluto) en el año 8.

EJERCICIO 3

El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.

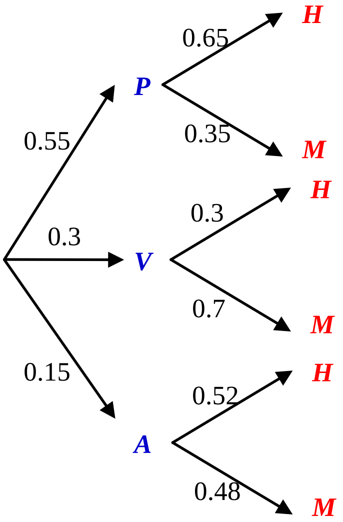
a) **(1.5 puntos)** Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

Este problema, al tratar dos experimentos aleatorios relacionados, donde el primero puede tener los resultados:

P = va en transporte público; V = en vehículo propio; A = andando

y el segundo:

H = es hombre; M = es mujer



es susceptible de tratarse con un diagrama de árbol. Al construirlo tenemos en cuenta que las probabilidades de todas las ramas que parten del mismo origen deben sumar 1.

De este modo, por el *Teorema de la Probabilidad Total*, la probabilidad de un suceso terminal del árbol, sin condicionar a nada, es la suma de los productos de las probabilidades de las ramas que se recorren desde el inicio del árbol a la izquierda hasta cada vez que aparece en la derecha. Entonces:

$$P(H) = 0.55\cdot 0.35 + 0.3\cdot 0.7 + 0.15\cdot 0.48 = \boxed{0.4745}$$

b) **(1 punto)** Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?.

Por la *Fórmula de Bayes*, que no es más que aplicar el *Axioma de la Probabilidad Condicionada*, se tiene:

$$P(A/H) = \frac{P(A\cap H)}{P(H)} = \frac{0.15\cdot 0.48}{0.4745} = \boxed{0.1517}$$

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.

Tenemos:

$$n = 500; \quad \hat{p} = \frac{175}{500} = 0.35; \quad \hat{q} = 0.65$$

Como $1 - \alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.97 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.88$ (buscándolo en el interior de las tablas de la N(0;1)). Por tanto, como la fórmula del intervalo de confianza es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Tenemos que, al 94%:

$$p \in \left(0.35 - 1.88\sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{500}},\ 0.35 + 1.88\sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{500}}\right) = \boxed{(0.3099,\ 0.3901)}$$

b) **(1 punto)** A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0.02, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0.02 \quad \Rightarrow \quad z_{\alpha/2}^2 \frac{\hat{p}\hat{q}}{n} < 0.02^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{0.02^2} = \frac{1.88^2 0.35 \cdot 0.65}{0.02^2} = 2010.19$$

El primer valor válido (no podemos tener una muestra de tamaño que no sea un número natural) es, pues: $\boxed{n = 2011}$.

OPCIÓN B
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

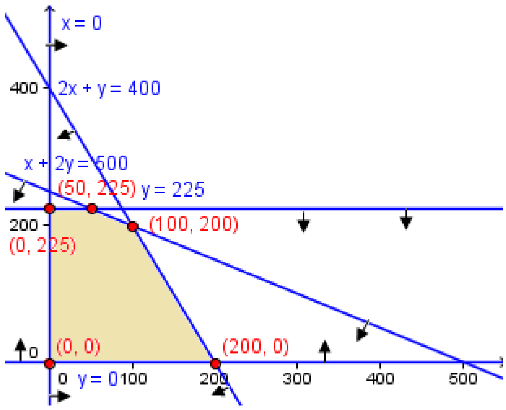
Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,
a) **(2 puntos)** ¿cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?.

Llevamos los datos del enunciado a una tabla:

	Nº a fabricar	Seda (kg)	Plata (kg)	Oro (kg)	Ingresos
Tapices tipo *A*	x	1	2	0	2000
Tapices tipo *B*	y	2	1	1	3000
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$	$x + 2y \leq 500$	$2x + y \leq 400$	$y \leq 225$	$F(x, y) = 2000x + 3000y$ Maximizar

Donde aparecen ya todas las restricciones y la función objetivo. Es preciso comentar que en el enunciado se confunden *Ingresos* con *Beneficios*, y nos vemos obligados a resolver el problema considerando que son lo mismo.

Para cada una de las inecuaciones que constituyen el conjunto de soluciones, sustituimos el signo de desigualdad por un *igual*, dibujamos la recta resultante y decidimos si, de los dos semiplanos en que la recta divide al plano, nos interesa uno u otro. Eso podemos decidirlo bien eligiendo un punto cualquiera que no esté en la recta y viendo si verifica la inecuación, en cuyo caso el semiplano que nos interesa es aquél donde está el punto elegido; o bien, despejando y y viendo si debe ser *menor o igual* que la recta, y elegiríamos el semiplano que queda bajo la misma, o *mayor o igual*, donde haríamos lo opuesto. Hemos señalado con flechas el semiplano que verifica cada inecuación. Así, el recinto es el del gráfico.



A continuación, hay que calcular los vértices del recinto (ya hemos colocado los resultados en el gráfico). Dicha obtención hay que hacerla *siempre* calculándolos, y *nunca* a partir del gráfico. Los más complicados son los que detallamos (los otros, pueden deducirse de la tabla de valores que hayamos usado para dibujar las rectas, donde conviene siempre obligar a que $x = 0$ y, después, a que $y = 0$):

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=500 \\ 2x+y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \cdot(-2): \begin{array}{rl} x+2y=500 \\ -4x-2y=-800 \\ \hline -3x \quad =-300 \end{array} \Rightarrow x=100 \Rightarrow y=200 \qquad \Rightarrow (100, 200)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=500 \\ y=225 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 500 - 450 = 50 \Rightarrow (50, 225)$$

Por último, calculamos el valor de la función objetivo en cada vértice. La mayor imagen será el máximo de dicha función sujeto a las restricciones, y la menor, el mínimo. Buscamos, recordemos, el máximo:

$F(0, 0) = 2000\cdot 0 + 3000\cdot 0 = 0$

$F(0, 225) = 2000·0 + 3000·225 = 675000$
$F(50, 225) = 2000·50 + 3000·225 = 775000$
$F(100, 200) = 2000·100 + 3000·200 = 800000$
$F(200, 0) = 2000·200 + 3000·0 = 400000$

Así que $\boxed{\text{el máximo "}\textit{beneficio}\text{" es 800000, para 100 tapices tipo } A \text{ y 200 tipo } B}$.

b) **(0.5 puntos)** ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?.

Se consume, según las condiciones del enunciado:

Seda: $x + 2y = 100 + 2·200 = 500$ kg $\Rightarrow$ Se consume todo el disponible.
Plata: $2x + y = 2·100 + 200 = 400$ kg $\Rightarrow$ Se consume todo el disponible.
Oro: $y = 200$ kg $\Rightarrow$ Sobran 25 kg.

EJERCICIO 2

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f\,'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(–1, 0)$ y $(5, 0)$ y con vértice $(2,–4)$.

a) **(1 punto)** Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.

- Discontinuidades de f ó $f\,'$: No tienen, pues ambas son polinómicas. Si $f\,'$ es un polinomio, su primitiva f también lo es.
- $f\,'(x) = 0$: $x = –1$, $x = 5$ (nos los dan: son los valores que hacen que $y = 0$).

Dividimos R en intervalos mediante los puntos obtenidos, y evaluamos el signo de $f\,'$ en cada uno de ellos, para lo que basta tomar un valor de x cualquiera, puesto que está garantizado que el signo de $f\,'$ es el mismo en todo el intervalo.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f\,'$	+	0	–	0	+
f	↗	**Máx**	↘	**Mín**	↗

Para calcular estos signos hemos tenido en cuenta que $f\,'$ es una parábola convexa, puesto que el vértice, que debe ser máximo o mínimo relativo, es en este caso mínimo, ya que el valor de y en él es inferior al de los puntos de corte con OX. Por tanto, la parábola debe ser decreciente y descendiendo desde $+\infty$ hasta el eje OX, tomando, pues, valores positivos de y, lo que ocurre en $x = –1$ por vez primera. Al atravesar OX toma, ya, valores negativos de y hasta llegar al vértice y volver al eje OX en $x = 5$. Tras atravesarlo, vuelve a ser positiva.

b) **(0.5 puntos)** Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.

Como consecuencia del cuadro de monotonía, tiene un $\boxed{\text{máximo relativo en } x = -1}$, y un $\boxed{\text{mínimo relativo en } x = 5}$.

c) **(1 punto)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(2) = 5$.

- Punto de tangencia: Curva y tangente se tocan en $(2, 5)$, pues la curva pasa por dicho punto, que es donde calculamos la tangente.
- Pendiente de la tangente: $m = f\,'(2) = –4$, que es el vértice de la parábola que constituye la gráfica de $f\,'$.

Por tanto, la tangente pedida es (ecuación *punto-pendiente* de la recta):

$$y - 5 = -4(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -4x + 8 \Rightarrow \boxed{y = -4x + 13}$$

EJERCICIO 3

De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0.3$ y que $P(B^C) = 0.25$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) **(0.75 puntos)** $P(A \cup B)$.

Como A y B son independientes $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot[1 - P(B)] = 0.3(1 - 0.25) = 0.3\cdot 0.75 = 0.225$. Por tanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.75 - 0.225 = \boxed{0.825}$$

b) **(0.75 puntos)** $P(A^C \cap B^C)$.

Según una Ley de Morgan:

$$P(A^C \cap B^C) = P[(A \cup B)^C] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.825 = \boxed{0.175}$$

c) **(1 punto)** $P(A / B^C)$.

Si A y B son independientes $\Rightarrow$ A y B^C también lo son. En efecto:

$$P(A / B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} =$$

Como son independientes:

$$= \frac{P(A) - P(A)\cdot P(B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A)[1 - P(B)]}{1 - P(B)} = P(A)$$

que es lo que se quería demostrar. Por tanto:

$$P(A / B^C) = P(A) = \boxed{0.3}$$

EJERCICIO 4

El tiempo que los españoles dedican a ver la televisión los domingos es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 75 minutos. Elegida una muestra aleatoria de españoles se ha obtenido, para la media de esa distribución, el intervalo de confianza (188.18, 208.82), con un nivel del 99%.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la media muestral y el tamaño de la muestra.

El centro del intervalo de confianza de la media poblacional es la media muestral. Así:

$$\bar{x} = \frac{188.18 + 208.82}{2} = \boxed{198.5}$$

El tamaño n de la muestra aparece en la fórmula del *error máximo cometido*, que es la diferencia entre un extremo y el centro del intervalo de confianza:

$$E = 208.82 - 198.5 = 10.32$$

Dicha fórmula es: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Conocemos E y $\sigma = 75$. Además el *nivel de confianza* es del 99%, es decir:

$$1 - \alpha = 0.99 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.01 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.575$$

Así: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = \dfrac{z_{\alpha/2}\sigma}{E} \;\Rightarrow\; n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{2.575\cdot 75}{10.32}\right)^2 = 350.20$. Por tanto, $\boxed{n = 350}$, ya que no es posible una cantidad fraccionaria de unidades constituyentes de una muestra, y la diferencia 0.20 es debida a errores de redondeo. Si reconstruyésemos el intervalo de confianza con la fórmula del mismo:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

obtendríamos el que tenemos: (188.18, 208.82).

b) **(1 punto)** Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 96%.

$$1 - \alpha = 0.96 \Rightarrow \alpha = 0.04 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$

Por tanto:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \frac{75}{\sqrt{500}} = \boxed{6.89}$$