OPCIÓN A

2. Considere la siguiente ecuación de una onda :

y (x , t) = A sen (b t - c x) ;

a) ¿qué representan los coeficientes A, b, c ? ; ¿cuáles son sus unidades? ;
b) ¿qué interpretación tendría que la función fuera “coseno” en lugar de “seno” ?; ¿y que el signo dentro del paréntesis fuera + en lugar de - ?

a) Comparando la expresión dada con la ecuación general de una onda encontramos que:

$$y(x,t) = A \cdot sen(\omega t - kx)$$

- A es la amplitud de la onda que indica el valor máximo de la elongación que sufren los puntos del medio por los que pasa la onda. Sus unidades en el S.I. son los metros.
- b es la pulsación o frecuencia angular, $\left(\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\right)$, sus unidades en el sistema angular son rad/s.
- c es el número de ondas $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, indica el número de longitudes de onda que hay en la distancia 2π. Sus unidades son rad/m.

b) Tanto la función seno como la función coseno son útiles para definir el movimiento periódico de una partícula en el espacio o en el tiempo ya que ambas varían de igual modo y toman sus valores entre –1 y +1. La única diferencia entre ambas es que se encuentran desfasadas 90º.

El signo del interior del paréntesis indica el sentido de desplazamiento de la onda. Cuando el signo es positivo la onda se desplaza en el sentido negativo del eje de abscisas y cuando el signo es negativo, la onda se desplaza en el sentido positivo.

PRIMERA PARTE

CUESTIÓN 2

La expresión matemática de una onda armónica es $y(x, t) = 3\ sen(200\pi t - 5x + \pi)$, estando todas las magnitudes en unidades del SI. Determine:
a) La frecuencia y la longitud de onda.
b) La amplitud y la velocidad de propagación de la onda.

La expresión matemática de la onda viene dada por: $y(x, t) = A\ sen(\omega\, t - k\, x + \delta_0)$
o también $y(x, t) = A\ sen(2\pi\upsilon\, t - (2\pi/\lambda)\, x + \delta_0)$

Por tanto comparando los términos semejantes:

a) La frecuencia, $200\pi = 2\pi\upsilon;\qquad \upsilon = \dfrac{200\pi}{2} = 100\,\text{Hz}$

La longitud de onda, $5 = \dfrac{2\pi}{\lambda};\qquad \lambda = \dfrac{2\pi}{5}\,\text{m}$

b) La amplitud, A = 3 m

La velocidad de propagación, $\lambda = \dfrac{v}{\upsilon};\qquad v = \lambda\upsilon = 40\pi\,\text{m/s}$

OPCIÓN A

1. Considere la onda de ecuación :

$$y(x,t) = A\cos(b\,x)\,\mathrm{sen}(c\,t)\,;$$

a) ¿Qué representan los coeficientes A, b, c ? ; ¿cuáles son sus unidades? ; ¿cuál es el significado del factor A cos (b x) ?

b) ¿Qué son los vientres y los nodos? ; ¿qué distancia hay entre vientres y nodos consecutivos?

a) La ecuación dada es la que corresponde a la ecuación del movimiento para una onda estacionaria. Se obtiene superponiendo dos ondas que se propagan con la misma frecuencia, amplitud y dirección pero en distinto sentido.

$$y_1 = A'\mathrm{sen}(\omega t + kx)\,; \qquad y_2 = A'\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

$$y = y_1 + y_2 = A'\mathrm{sen}(\omega t + kx) + A'\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

La suma de dos senos se puede expresar como:

$$\mathrm{sen}\,a + \mathrm{sen}\,b = 2\mathrm{os}\frac{a-b}{2}\cdot\mathrm{sen}\frac{a+b}{2}$$

sustituyendo $a = \omega t + kx$ y $b = \omega t - kx$, tenemos

$$y = 2A'\cos\frac{\omega t + kx - \omega t + kx}{2}\cdot\mathrm{sen}\frac{\omega t + kx + \omega t - kx}{2} = 2A'\cos kx\cdot\mathrm{sen}\omega t$$

Comparando este resultado con las ecuaciones de las ondas que interfirieron inicialmente podemos concluir que:

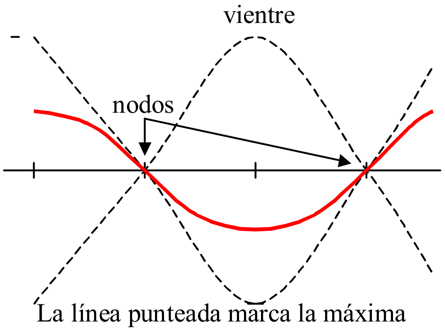
- $A = 2A'$ Es el doble de la amplitud de las ondas incidentes. Se mide en metros
- $B = k$ Es el número de onda que india el número de longitudes de onda que hay en la distancia 2π. Se mide en m^{-1}.
- $C = \omega$ Es la pulsación o frecuencia angular de las ondas incidentes. Se mide en Hercios $Hz = s^{-1}$..
-

El factor A·cos(bx) indica la amplitud con la que vibran cada uno de los puntos de la onda estacionaria que como se puede comprobar depende de la posición..

b) Los vientres son los puntos de la onda en los que se vibra con la máxima amplitud. La distancia entre dos vientres consecutivos es media longitud de onda.

Los nodos son los puntos donde no se produce vibración. La distancia entre dos nodos consecutivos también es media longitud de onda.

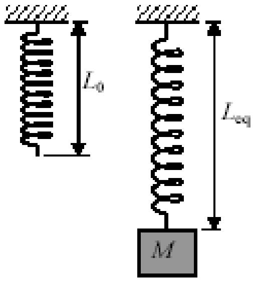
La distancia entre un vientre y un nodo es un cuarto de longitud de onda.



La línea punteada marca la máxima vibración de cada punto de la onda
La línea roja muestra un momento cualquiera de la vibración

EJERCICIO 1

1) Un muelle de masa despreciable tiene una longitud natural L_0 = 20 cm. Cuando de su extremo inferior se cuelga un cuerpo de masa M = 0,1 kg, la longitud en equilibrio del muelle es L_{eq} = 30 cm.



a) Calcula la constante recuperadora, *k*, de este muelle. Considera $g = 10\ m/s^2$. (0,5 p.)

Partiendo de la posición de equilibrio anterior, se desplaza *M* hacia arriba 10 cm, es decir, hasta que el muelle tiene su longitud natural. A continuación se suelta *M* con velocidad inicial nula, de forma que empieza a oscilar armónicamente en dirección vertical.
b) Calcula la longitud máxima del muelle, en el punto más bajo de la oscilación de *M*. (1 p.)
c) Calcula la amplitud y la frecuencia de la oscilación, y la velocidad de *M* cuando pasa por su posición de equilibrio. (1 p.)

a) La fuerza recuperadora del muelle se equilibra con la fuerza del peso del cuerpo.

$$F_k = P \quad \Rightarrow \quad k\cdot\Delta x = m\cdot g; \qquad k = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{0{,}1\cdot 10}{0{,}1} = 10\ N/m$$

b) La amplitud de la oscilación es igual a uno y otro lado de la posición de equilibrio del muelle, por tanto el punto más bajo de la oscilación se encuentra 10 cm por debajo de la posición de equilibrio:

$$L_{max} = 40\ cm = 0{,}4\ m$$

c) La amplitud de la oscilación es un dato del apartado b) (A = 10 cm)
La frecuencia se puede obtener a partir del valor de k:

$$k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}1}{10}} = 10\ rad/s$$

Para el calculo de la velocidad utilizamos la ecuación del m.v.a.s.:

$$y = A\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad v = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad v = -0{,}1\cdot 10\,\mathrm{sen}\,10t = -\mathrm{sen}\,10t$$

Calculamos el valor de t cuando pasa por la posición de equilibrio, es decir cuando y = 0

$$0 = 10\cos 10t; \quad \cos 10t = 0; \quad 10t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{20}\,s$$

sustituyendo en la ecuación de la velocidad

$$v = -\mathrm{sen}\left(10\cdot\frac{\pi}{20}\right) = -\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = -1\ m/s$$

El valor máximo de la velocidad en módulo es 1m/s y se obtiene cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

CUESTIÓN 2

C2. Calcule el valor de la longitud de onda asociada a un fotón de energía 3 keV.
Datos: h = $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s, c = $3 \cdot 10^{8}$ m/s, 1 eV = $1{,}609 \cdot 10^{-19}$ J.

A partir de la energía calculamos el valor de la frecuencia. En primer lugar pasamos la energía a unidades del sistema internacional.

$$E = 3\,\mathrm{keV} = 3{\cdot}10^{3}\cdot 1{,}69{\cdot}10^{-19} = 5{,}07{\cdot}10^{-16}\ \mathrm{J}$$

$$E = h\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{E}{h} = \frac{5{,}07{\cdot}10^{-16}}{6{,}62{\cdot}10^{-34}} = 7{,}66{\cdot}10^{17}\ \mathrm{Hz}$$

La velocidad del fotón es la de la luz:

$$\lambda\nu = c \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3{\cdot}10^{8}}{7{,}66{\cdot}10^{17}} = 3{,}92{\cdot}10^{-10}\ \mathrm{m}$$

SEGUNDA PARTE OPCIÓN B

C-3. Un tren de ondas atraviesa un punto de observación. En este punto, el tiempo transcurrido entre dos crestas consecutivas es de 0,2 s. De las afirmaciones siguientes, escoja la que sea correcta y justifique la respuesta.
a) La longitud de onda es de 5 m.
b) La frecuencia es de 5 Hz.
c) El período es de 0,4 s.
d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

El tiempo que tardan en pasar 2 crestas consecutivas es lo que conocemos como periodo. T = 0,2 s.

Los únicos apartados que están relacionados con el periodo son el b) y el c) luego el a) no puede ser válido.

Como el c) indica directamente que el periodo es 0,4 s es falso. El apartado b) hace referencia a la frecuencia, que es la magnitud inversa del periodo. Calculamos su valor:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5\text{Hz}$$

El apartado b) es el correcto.

3. Una partícula de 0,5 kg que describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5/π Hz tiene, inicialmente, una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.
a) Calcula la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.
b) Haz un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. ¿Cuál será el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?

La ecuación de la posición de una partícula con un movimiento armónico simple es:
$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi)$
Por tanto la velocidad es: $\dfrac{dx}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi)$
Si sustituimos los valores en las dos expresiones tenemos que:
$x = A \cdot \text{sen}\,(10 \cdot t + \varphi)$
$v = A \cdot 10 \cdot \cos\,(10 \cdot t + \varphi)$
La energía potencial se representa como: $E_p = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$
La energía cinética se representa como: $E_C = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
En un movimiento oscilatorio armónico simple la energía potencial máxima es igual a la energía cinética máxima, de manera que: $\dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x_{max}^2 = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2$
Es decir, $k \cdot A^2 = m \cdot \omega^2 \cdot A^2$
Por tanto; $k = m \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot \pi^{-1})^2 = 50\ N \cdot m^{-1}$

Para t = 0, tenemos:
$E_p = \dfrac{1}{2} \cdot 50 \cdot x_0^2 = 0,8\ J\ ;\ x_0 = 0,18\ m$
$E_c = \dfrac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot v_0^2 = 0,2\ J;\ v_0 = 0,89\ m \cdot s^{-1}$

La velocidad máxima vendrá definida por la energía cinética máxima, que tiene lugar cuando la potencial es cero y su valor es el de la suma de la energía potencial y cinética del instante inicial:
$E_{total} = E_{Cmax} = \dfrac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot v_{max}^2 = 0,8 + 0,2 = 1\ J\ ;\ v_{max} = 2\ m \cdot s^{-1}$
La distancia máxima vendrá definida por la energía potencial máxima, que tiene lugar cuando la cinética es cero:

$E_{total} = E_{Pmax} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot x_{max}^2 = 1\ J$; $x_{max} = 0{,}2\ m$

b) En un ciclo la velocidad y la energía cinética máximas tienen lugar cuando la energía potencial es nula, es decir x = 0. De igual manera la energía potencial máxima tiene lugar cuando el desplazamiento es máximo y la velocidad es nula.
Si ambas energía son iguales, la energía potencial será la mitad de la máxima:

$E_p = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\ J$

Por tanto: $x = 0{,}14\ m$

1. La bolita de un péndulo simple realiza una oscilación aproximadamente horizontal y armónica, en presencia del campo gravitatorio terrestre, con un periodo T = 2 s y una amplitud A = 2 cm.
a) Obtén la ecuación de la velocidad de la bolita en función del tiempo, y represéntala gráficamente. Toma origen de tiempo (t = 0) en el centro de la oscilación. (1 p.)
b) ¿Cuál sería el periodo de oscilación de este péndulo en la superficie de la Luna, donde la intensidad del campo gravitatorio es la sexta parte del terrestre? (1 p.)

a) La frecuencia angular es: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

La oscilación será: $x = 0{,}02\ \text{sen}(\pi\ t)$ (m)

b) El periodo de oscilación de un péndulo es: $T = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{L}{g}}$

Si se varía la gravedad se tendría: $T' = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{L}{g/6}} = \sqrt{6}\ T = \sqrt{6} \cdot 2 = 4{,}9\ \text{s}$

Considera dos tubos de la misma longitud, *L* = 0,68 m, el primero con sus dos extremos abiertos a la atmósfera y el segundo con uno abierto y otro cerrado.
a) Calcula, para cada tubo, la menor frecuencia de excitación sonora para la que se formarán ondas estacionarias en su interior. Calcula la longitud de onda correspondiente en cada caso.
b) Representa la onda estacionaria que se forma dentro de cada tubo, indicando la posición de nodos y vientres.

La velocidad de propagación del sonido en el aire es *v* = 340 m/s.

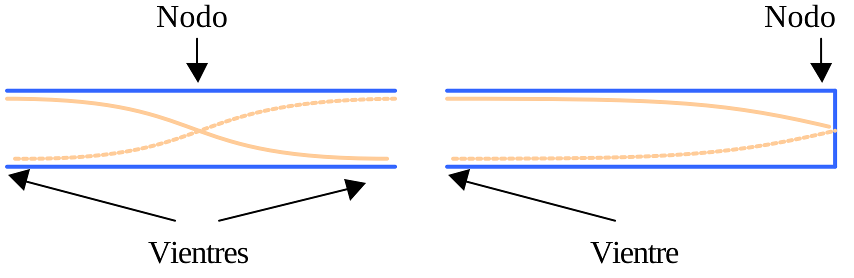
a) Las ondas sonoras estacionarias tienen mínimos en las zonas cerradas de las cavidades y máximos en sus extremos abiertos. Un tubo con los dos extremos abiertos tiene por tanto un máximo en cada extremo, pudiendo tener tan sólo media onda estacionaria. Por tanto la longitud de onda será: $l = 2\,L = 2 \cdot 0{,}68 = 1{,}36$ m.

Su frecuencia será: $f = \dfrac{v}{l} = \dfrac{340}{1{,}36} = 250 \text{ Hz}$

Si el tubo tiene un extremo cerrado y otro abierto puede tener tan sólo un cuarto de onda, por tanto: $l = 4\,L = 4 \cdot 0{,}68 = 2{,}72$ m.

Su frecuencia será: $f = \dfrac{v}{l} = \dfrac{340}{2{,}72} = 125 \text{ Hz}$

b) La representación gráfica es la siguiente:



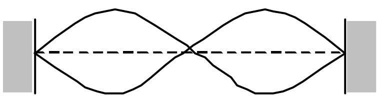
OPCIÓN A

1. Una cuerda tensa, fija por sus dos extremos, tiene una longitud *L* = 1,2 m. Cuando esta cuerda se excita transversalmente a una frecuencia n = 80 Hz, se forma una onda estacionaria con dos vientres.

a) Calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación de las ondas en esta cuerda. (1,5 puntos)

b) ¿Para qué frecuencia inferior a la dada se formará otra onda estacionaria en la cuerda? Representa esta onda. (1 punto)

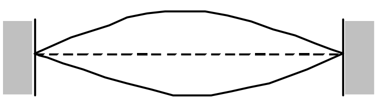
a) Si se forma una onda estacionaria con dos vientres (2º armónico), como se puede observar en la imagen, lo que tenemos entre los dos extremos fijos es una longitud de onda, por lo tanto:



$$\lambda = L = 1{,}2\ \text{m}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = 1{,}2 \cdot 80 = 96\ \text{m/s}$$

b) Se forma otra onda estacionaria cuando entre los extremos fijos solo hay un vientre (1er armónico). En este caso a longitud de onda es:



$$\lambda = 2L = 2{,}4\ \text{m}$$

$$f = \frac{v_p}{2L} = \frac{96}{2{,}4} = 40\ \text{Hz}$$

1. a) Enuncia el Principio de Huygens y, a partir de él, demuestra las leyes de reflexión y refracción para una onda que incide sobre la superficie plana de separación entro des medios, en los que la onda se propaga con velocidades diferentes v_1 y v_2. (1 p)
b) Una onda de frecuencia n = 4 Hz se propaga por un medio con velocidad v_1 = 2 m/s e incide sobre la frontera con otro medio diferente con ángulo de incidencia e = 30º. En el segundo medio la velocidad de propagación de la onda es v_2 = 2,5 m/s. Calcula el ángulo de refracción y la longitud de onda en este segundo medio. (1 p.)

a) El principio de Huygens se basa en que la propagación de una onda se puede describir como la superposición de una serie de ondas secundarias que se forman el frente de ondas de una onda principal.
Esta sencilla descripción permite explicar fenómenos como los de reflexión o refracción de una onda. En la reflexión la velocidad de la onda incidente y de la reflejada son iguales, por tanto sus ángulos también lo serán. En la refracción la onda transmitida viaja a distinta velocidad, lo que hace que el frente de onda se reconstruya con una dirección de propagación diferente a la que tenía inicialmente.
b) La ley de refracción es: v_t sen α_t = v_i sen α_i

Despejando tenemos que: $\text{sen}\,\alpha_t = \frac{v_i}{v_t}\text{sen}\,\alpha_i \Rightarrow \text{sen}\,\alpha_t = \frac{2}{2{,}5}\text{sen}\,30º = 0{,}4 \Rightarrow \alpha_t = 23{,}6º$

Cuando una onda pasa de un medio a otro en el que se mueve con diferente velocidad la frecuencia de la onda se mantiene, mientras que la longitud de onda varía.
Para las ondas, la longitud de onda se define como: $\lambda = v\,T = v\,\nu^{-1} = 2{,}5 \cdot 4^{-1} = 0{,}625$ m

OPCIÓN A

Cuestión 1

Una pequeña fuente sonora emite en el espacio con una potencia de 10 W, uniformemente distribuida en todas las direcciones (onda esférica).
a) Calcula la intensidad del sonido a 10 m de dicha fuente, en unidades del S.I. ***(1 p.)***
b) La intensidad de un sonido también puede medirse en decibelios (dB). Explica en qué consiste la escala decibélica de medida de intensidad acústica. ***(1 p.)***
c) ¿Cuál es la intensidad acústica, en dB, producida por nuestra fuente a 10 m de distancia? ***(0,5 p.)***
La intensidad umbral del oído humano es ***Io*** **= 10^{-12} W/m2.**

a) La intensidad sonora viene dada por la fórmula: $I = \dfrac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$

Sustituyendo los datos del enunciado: $I = \dfrac{10}{4 \cdot \pi \cdot 10^2} = \mathbf{7{,}95 \cdot 10^{-3}\ W \cdot m^{-2}}$

b) El oído humano es capaz de percibir sonidos desde intensidades muy bajas (10^{-12} W· m^{-2}) hasta intensidades de 1 W· m^{-2}. Dado que el rango de intensidades audibles es muy amplio, se ha introducido una escala logarítmica, la **escala decibélica**, para medir intensidades sonoras, que además corresponde mejor con la sensibilidad del oído.

c) Para expresar la intensidad sonora en decibelios se utiliza la siguiente fórmula:

$\beta_{dB} = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_0}$ siendo I_0 la intensidad umbral del oído humano, $I_0 = 10^{-12}$ W· m^{-2}

Por lo tanto, para nuestro caso:

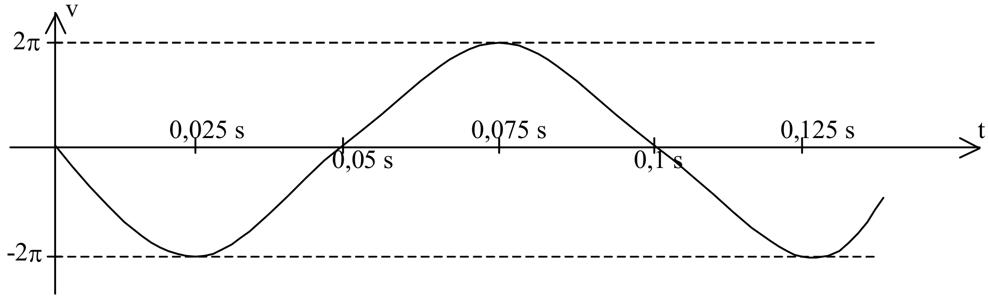
$$\beta_{dB} = 10 \cdot \log \frac{7{,}95 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 99 \ \ \text{dB}$$

OPCIÓN A

1) Una partícula de masa m = 5 g oscila armónicamente a lo largo del eje OX en la forma $x = A\cos\omega t$, con A = 0,1 m y $\omega = 20\pi\ s^{-1}$.
a) Determina y representa gráficamente la velocidad de la partícula en función del tiempo. (1 p.)
b) Calcula la energía mecánica de la partícula. (0,5 p.)
c) Determina y representa gráficamente la energía potencial de m en función del tiempo. (1 p.)

a) La ecuación que representa la velocidad en función del tiempo se obtiene derivando la ecuación de la posición.

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}\omega t; \qquad v = -2\pi\,\mathrm{sen}(20\pi t)$$



b) La energía mecánica será la suma de la energía cinética y de la potencial:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

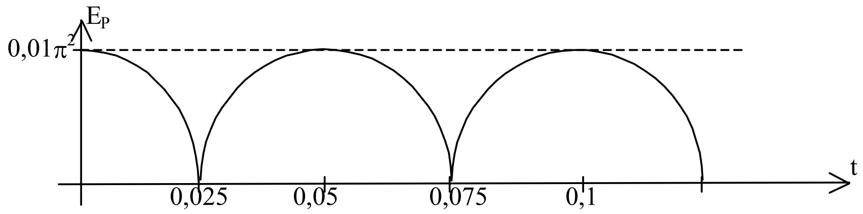
$$E_M = \frac{1}{2}m(-A\omega)^2\mathrm{sen}^2(20\pi t) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(20\pi t) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\mathrm{sen}^2(20\pi t) + \cos^2(20\pi t)\right)$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}0{,}05\cdot 4\pi^2 = 0{,}01\pi^2\ \mathrm{J}$$

c) La energía potencial es: $E_P = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t) = 0{,}01\pi^2\cos^2(20\pi t)$

Como se trata de un coseno al cuadrado, todos sus valores serán positivos y la forma de la función será igual que la del coseno pero con los tramos negativos simétricos respecto al eje OX
Esta función toma sus valores máximos en intervalos de tiempo de 0,05 s y se anula en los valores de tiempo intermedios.

Máximos:	t = 0;	t = 0,05;	t = 0,1;	t = 0,15;…
Mínimos:	t = 0,025;	t = 0,075;	t = 0,125;…	



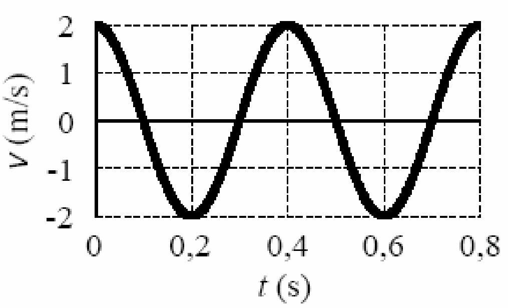
E_P
$0,01\pi^2$
t
0,025
0,05
0,075
0,1

CUESTIÓN 1

1) Un cuerpo de masa *m* = 0,1 kg oscila armónicamente a lo largo del eje OX. En la figura se representa su velocidad en función del tiempo.

a) Determina y representa gráficamente la posición (elongación) de la partícula en función del tiempo. (1,5 puntos)

b) Calcula las energías cinética y potencial de la partícula en el instante *t* = 0,05 s. (1 punto)



a) Para poder representar la elongación en función del tiempo, hay que conocer previamente los valores de la amplitud A y la frecuencia angular ω.
Del valor máximo de la velocidad obtenemos el producto de ambas magnitudes: $A \cdot \omega = 2$
La frecuencia angular esta relacionada con el periodo mediante la expresión:

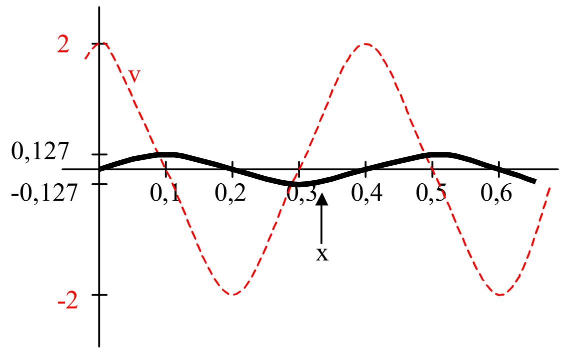
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Calculamos el periodo a partir de la gráfica contando el tiempo que pasa entre dos momentos consecutivos de la onda dibujada que estén en fase. T = 0,4 s.

$$\omega = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi \,\text{rad/s}$$

$$A = \frac{2}{5\pi} = 0{,}127\,\text{m}$$

Ya podemos representar la elongación teniendo en cuenta que cuando la velocidad es máxima la elongación es nula y cuando la elongación es máxima la velocidad es nula. Como el movimiento comienza con la velocidad en su estado máximo y decreciendo, la partícula se encuentra en el punto de equilibrio y se desplaza hacia su máxima elongación



b) A partir de los datos que tenemos construimos las ecuaciones de la elongación y la velocidad.

$$x = \frac{2}{5\pi}\text{sen}\,5\pi t; \quad x(0{,}05) = \frac{2}{5\pi}\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{5\pi}\ \text{m}$$

$$v = 2\cos 5\pi t; \quad v(0{,}05) = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\ \text{m/s}$$

Necesitamos también conocer el valor de la constante de recuperación. Lo obtenemos a partir del producto de la masa por la frecuencia angular.

$$k = m\omega^2 = 0{,}1\cdot(5\pi)^2 = 2{,}5\pi^2\ \mathrm{N/m}$$

Sustituimos en las expresiones de las energías:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = 0{,}1\ \mathrm{J}$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}5\pi^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{5\pi}\right)^2 = 0{,}1\ \mathrm{J}$$

En el instante dado coinciden los valores de las energías cinética y potencial.

CUESTIÓN B

Una onda transversal se propaga por una cuerda, siendo su ecuación (en unidades del SI) $y = 0{,}05$ sen$(4p\,t - 2p\,x)$. Se pide:

a) ¿Cuánto vale la velocidad de propagación de la onda?

b) ¿Cuál será la velocidad de un punto que se encuentra a 2 m del origen en el instante t = 5 s?

a) La velocidad se define como $v = \nu\, \lambda = 2 \cdot 1 = 2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

b) La velocidad del punto será la velocidad transversal de la onda, que es la derivada de la posición de cada punto: $v_y = \dfrac{dy}{dt} = 0{,}05 \cdot 4\,\pi\, \cos(4\pi\, t - 2\pi\, x)$

$v_y = 0{,}05 \cdot 4\,\pi\, \cos(4\,\pi\, 5 - 2\,\pi\, 2) = 0{,}2\,\pi\, \cos(16\,\pi) = 0{,}628\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

OPCIÓN DE PROBLEMAS Nº 2

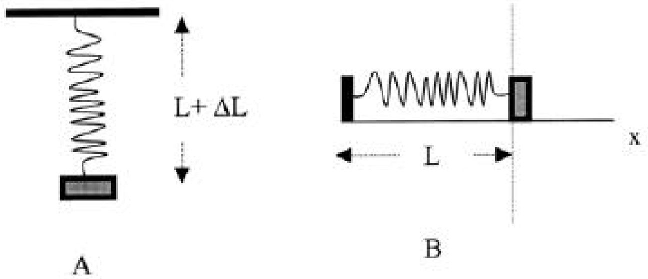
2.1

Cierto muelle, que se deforma 20 cm cuando se le cuelga una masa de 1,0 Kg (Figura A), se coloca sin deformación unido a la misma masa sobre una superficie sin rozamiento, como se indica en la figura B. En esta posición se tira de la masa 2,0 cm y se suelta. Despreciando la masa del muelle, calcular:

a) La ecuación de la posición para el m.a.s. resultante.

b) Las energías cinética, potencial elástica y mecánica total cuando ha transcurrido un tiempo t = (3/4)T, donde T es el período del m.a.s.

Datos: g = 9,8 m/s



a) De la ecuación general de un resorte elástico y con los datos aportados por el enunciado se puede obtener la constante elástica.

$$F = k\cdot\Delta x \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{9{,}8\cdot 1}{0{,}2} = 49\ \mathrm{N/m}$$

El período de oscilación se calcula según la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{49}} = 0{,}89\ \mathrm{s}$$

Escribimos ecuación general del m.a.s. y se sustituyen los valores obtenidos:

$$x = A\cdot \mathrm{sen}(wt) = A\cdot \mathrm{sen}(\frac{2\pi}{T}t) = 0{,}02\cdot \mathrm{sen}7t$$

b)

$$\mathbf{Ec} = \frac{1}{2}k\cdot(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}\cdot 49\cdot\left[0{,}02^2 - \left(0{,}02\cdot\mathrm{sen}(7\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{7})\right)^2\right] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Ep} = \frac{1}{2}k\cdot x^2 = \frac{1}{2}\cdot 49\cdot\left(0{,}02\cdot\mathrm{sen}\left(7\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2\pi}{7}\right)\right)^2 = \mathbf{0{,}0098\ J}$$

$$\mathbf{Em = Ec + Ep = 0{,}0098\ J}$$

PRIMERA PARTE

CUESTIÓN A

A. a) 1 PUNTO **En un movimiento armónico simple, ¿cuál es la relación entre la energía total y la amplitud?**

b) 1 PUNTO **Un oscilador armónico se encuentra en un momento dado en una posición igual ala mitad de su amplitud (x = A/2), ¿cuál es la relación entre la energía cinética y la energía potencial en ese momento?**

a) La expresión de la energía total es:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Las ecuaciones de la velocidad y la posición son:

$$x = A\cos\omega t \qquad x^2 = A^2\cos^2\omega t$$
$$v = -A\omega \mathrm{sen}\omega t \qquad v^2 = A^2\omega^2 \mathrm{sen}^2\omega t$$

Sustituyendo en la expresión de la energía tenemos:

$$E_T = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\mathrm{sen}^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\mathrm{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t\right)$$

$$E_T = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

Luego podemos concluir que la energía total depende del cuadrado de la amplitud.

b) Para que la posición sea igual a la mitad de la amplitud:

$$A\cos\omega t = \frac{A}{2} \qquad \cos\omega t = \frac{1}{2}; \qquad \omega t = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$$

Para ese valor de la fase, la velocidad es:

$$v = -A\omega\mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{A\omega\sqrt{3}}{2} = \frac{3A^2\omega^2}{4}$$

La relación entre ambas energías es:

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}m\frac{3A^2\omega^2}{4}}{\frac{1}{2}m\omega^2\frac{A^2}{4}} = \frac{3/4}{1/4} = 3$$

La energía cinética es tres veces mayor que a energía potencial.

PROBLEMAS

OPCIÓN 2

2-1. Una masa de 20 g realiza un movimiento vibratorio armónico simple en el extremo de un muelle que da dos oscilaciones, siendo la amplitud del mismo 5 cm. Calcular:

a) 0,75 PUNTOS **La velocidad máxima de la masa que oscila.**

b) 0,75 PUNTOS **La aceleración de la masa en el extremo del movimiento.**

c) 0,5 PUNTOS **La constante del muelle.**

a) Escribimos en primer lugar la ecuación del movimiento:

$$x = A\cos\omega t = 0{,}05\cos 4\pi t$$

La velocidad será:

$$v = -4\pi\cdot 0{,}05\,\mathrm{sen}\,4\pi t$$

Su valor máximo se obtiene cuando sen $4\pi t$ = -1

$$v_{max} = 4\pi\cdot 0{,}005 = 0{,}2\,\pi\ \mathrm{m/s}$$

b) La ecuación de la aceleración es:

$$a = -(4\pi)^2\cdot 0{,}05\cos 4\pi t = -(4\pi)^2\cdot x$$

En el extremo del movimiento x = A de modo que sustituyendo se tiene:

$$a = -(4\pi)^2\cdot 0{,}05 = 7{,}9\ \mathrm{m/s^2}$$

c) La constante del muelle se obtiene a partir de la expresión de la frecuencia:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad\Rightarrow\quad k = 4\pi^2 f^2 m = 4\pi^2\cdot 2^2\cdot 0{,}02 = 3{,}16\ \mathrm{N/m}$$

CUESTIÓN B

Dos partículas describen sendos movimientos armónicos simples (m.a.s.) de frecuencias n_1 = 1 kHz y n_2 = 2 kHz y de la misma amplitud A = 1 cm.

a) ¿En qué instante de tiempo la partícula 2 tendrá la misma velocidad que la que tiene la partícula 1 en t = 1 s?

b) ¿Cuál de los dos m.a.s. tendrá una mayor energía mecánica sabiendo que la masa de ambas partículas es la misma, $m_1 = m_2 = 10^{-3}$ kg?

a) Los movimientos serán: $y_1 = A\cos(2\pi\nu_1 t)$; $y_2 = A\cos(2\pi\nu_1 t)$

Las velocidades son las derivadas y serán: $v_1 = -2\pi A\nu_1 \operatorname{sen}(2\pi\nu_1 t)$; $v_2 = -2\pi A\nu_2 \operatorname{sen}(2\pi\nu_2 t)$

La velocidad de la partícula 1 en t = 1 s será: $v_1 = -2\pi A\nu_1 \operatorname{sen}(2\pi \cdot 10^3 \cdot 1) = 0$

Un instante de tiempo en el que la primera partícula tendrá la misma velocidad que la segunda será también para t = 1 s.

b) La energía de un m.a.s. es: $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 = 2\pi^2 m\,\nu^2 A^2$

La partícula que tenga mayor frecuencia será la de mayor energía, la partícula 2.

CUESTIONES

C

a) El sonido ¿es una onda longitudinal o transversal? Explica cómo se propaga.
b) ¿Pueden una onda longitudinal y una transversal tener la misma velocidad de propagación en el mismo medio material? Dar un ejemplo de cada tipo de onda.

a) Las ondas sonoras se producen como consecuencia de una compresión del medio a lo largo de la dirección de propagación, son, por tanto, **ondas longitudinales**.
Se puede explicar la propagación de las ondas sonoras viendo el símil con las ondas que se propagan a lo largo de un muelle como consecuencia de una compresión longitudinal del mismo.

b) No, porque la velocidad de propagación depende de las características del medio de propagación, y un medio no tiene las mismas características en todas las direcciones.

Un ejemplo de onda transversal, es la onda que se produce cuando se lanza una piedra a un río. Por otro lado, una onda longitudinal sería la producida al comprimir un muelle.

OPCIÓN DE PROBLEMAS Nº 2

1-2 Una onda transversal se propaga en un medio material según la ecuación:
y(x,t) = 0,2· sen(2p (50t-x/0,10)), en unidades del SI.
a) Determinar la amplitud, período y longitud de onda.
b) Calcular la velocidad de propagación de la onda.¿En qué sentido se propaga?
c) ¿Cuál es la máxima velocidad de vibración de las partículas en el medio?
d) Calcular la diferencia de fase, en un cierto instante t, entre dos puntos que distan entre sí 2,5 cm.

a) La ecuación general de una onda es la siguiente:

$$y(x,t) = A \cdot sen 2\pi(ft \pm kx)$$

Identificando los parámetros de la ecuación del enunciado:

Amplitud: **A = 0,2**

Período: $\mathbf{T} = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = \mathbf{0{,}02s}$

Longitud de onda: $\mathbf{ë} = \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}1} = \mathbf{10m}$

b) La velocidad de propagación se calcula según la fórmula:

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 10 \cdot 50 = \mathbf{500m/s}$$

La onda se propaga en el sentido negativo del eje x debido al signo negativo de la ecuación.

c) Para calcular la velocidad de vibración se deriva la ecuación de la onda:

$$V = \frac{\partial y}{\partial t} = 0{,}2 \cdot (2\pi \cdot 50) \cdot \cos 2\pi(50t - x/0{,}1) \Rightarrow V_{max} = 0{,}2 \cdot 2\pi \cdot 50 = \mathbf{62{,}83m/s}$$

d)

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0{,}2 \cdot sen 2\pi(50t - \frac{x_1}{0{,}1}) \\ y_2 = 0{,}2 \cdot sen 2\pi(50t - \frac{x_2}{0{,}1}) \end{array}\right. \Rightarrow \delta = 2\pi(50t - \frac{x_1}{0{,}1}) - 2\pi(50t - \frac{x_2}{0{,}1}) = \frac{2\pi}{0{,}1}(x_1 - x_2) = \frac{\mathbf{ð}}{\mathbf{2}}\mathbf{m}$$

PRIMERA PARTE

CUESTIÓN A

A. Para una masa m realizando oscilaciones armónicas de amplitud A y pulsación ω, alrededor del punto x = 0,

a) 1 PUNTO **Calcular la relación entre la energía cinética y la potencial en x = A/3.**

b) 1 PUNTO **¿En qué puntos de la trayectoria es máxima la energía potencial?**

a) Las expresiones de ambas energías son:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\mathrm{sen}^2\omega t$$

Calculamos el valor del seno:

$$x = \frac{A}{3};\quad \frac{A}{3} = A\cos\omega t \quad\Rightarrow\quad \cos\omega t = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t = 1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}^2\omega t = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Sustituyendo:

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{8}{9}}{\frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1}{9}} = 8 \quad\Rightarrow\quad E_c = 8E_p$$

b) El valor de la x se hace máxima en los extremos de la trayectoria que coincide con la amplitud x = A, luego la energía potencial será:

$$E_{p,\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

PROBLEMAS

OPCIÓN 1

1-1. La Luna tiene una masa que es 0,0123 veces la de la Tierra y su radio es cuatro veces menor. Calcular:

a) 1 PUNTO **La longitud del péndulo que bate segundos en la Luna (péndulo de periodo 1 segundo)**

b) 1 PUNTO **El ahorro de energía, respecto de la necesaria en la Tierra, al levantar un cuerpo de masa 1000 kg a una altura de 10 metros sobre el nivel del suelo.**

Datos: g = 9,8 m/s^2.

a) El periodo de un péndulo depende del valor del campo gravitatorio, g. Como conocemos el valor del campo en la Tierra, intentaremos escribir el de la Luna en función de este.

$$g_T = G\frac{M}{R_T^2}; \qquad g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{0{,}0123 M_T}{R_T^2 / 16} = 16 \cdot 0{,}0123 \cdot G\frac{M_T}{R_T^2}$$

$$g_L = 16 \cdot 0{,}0123 \cdot 9{,}8 = 1{,}9286\,\mathrm{m/s^2}$$

Conocido el valor del campo, despejamos de la expresión del periodo del péndulo el valor de la longitud.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{g_L T^2}{4\pi^2} = \frac{1{,}9286 \cdot 1}{4\pi^2} = 0{,}05\,\mathrm{m}$$

b) El trabajo realizado por las fuerzas del campo en las proximidades de la superficie se puede expresar como:

$$T = -\Delta E_P = E_{p0} - E_{pf} = mg(h_0 - h_f) = -1000 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = -98000\,\mathrm{J}$$

Que el trabajo sea negativo quiere decir que se realiza en contra de las fuerzas del campo ya que lo que se ha hecho es aumentar la energía del cuerpo. Es decir vamos a considerar que hemos ejercido98000 J.

En la Luna será:

$$T = -mg\Delta h = 1000 \cdot 1{,}9286 \cdot 10 = -19286\,\mathrm{J}$$

La diferencia entre ambas energías es: 98000 – 19286 = 78724 J

Es decir que tenemos que nos ahorramos78724 J si estamos en la Luna.

OPCIÓN B

Problema 2

Un extremo de una cuerda tensa horizontal de 3 m de longitud está sometido a un movimiento oscilatorio armónico. En el instante t = 4 s la elongación de ese punto es de 2 cm. Se comprueba que la onda tarda 0,9 s en llegar de un extremo a otro de la cuerda y que la longitud de onda es de 1 m. Calcule:
a) La amplitud del movimiento ondulatorio *(1,5 puntos)*.
b) La velocidad de vibración en el punto medio de la cuerda para t = 1 s *(1,5 puntos)*.

a) La expresión de la ecuación general de la posición de la onda es $y(x,t) = A\cdot \text{sen}(ft + Kx)$
De los datos del enunciado la longitud de onda λ, es 1 m, por lo que K = 1.

El enunciado dice que una onda tarda 0,9 s en llegar de un extremo a otro de la cuerda, o lo que es lo mismo, en recorrer 3 m. Por la tanto la velocidad será 3,33 m/s.

Como $v = \lambda\cdot f$, f = 3,33 Hz

El enunciado dice que en t = 4 s, la elongación del extremo es 2:

$$y(3,4) = A\cdot \text{sen}(3{,}33\cdot 4+3)=0{,}9\cdot A = 0{,}02$$

$$\mathbf{A = 2{,}22\ cm}$$

b) Derivando la anterior ecuación se obtiene la de la velocidad:

$$V = A\cdot 2\pi f\cdot \cos 2\pi(ft + Kx)$$

Sustituyendo los valores anteriores:

$$V(1{,}5\ ,\ 1) = 0{,}0222\cdot 2\pi\cdot 3{,}33\cdot \cos 2\pi(3{,}33\cdot 1 + 1\cdot 1{,}5) = \mathbf{0{,}22\ m/s}$$

OPCIÓN B

Problema 2

Una onda transversal se propaga según la ecuación:

y = 4· sen2p [(t/4)+(x/1,8)] (en unidades S.I.)

Determine:

a) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración máxima de un punto alcanzado por la onda *(2 puntos)*.
b) La diferencia de fase, en un instante dado, de dos puntos separados 1 m en la dirección de avance de la onda *(1 punto)*.

a) La ecuación general de una onda es:

$$y = A \cdot sen 2\pi\left[ft + \frac{x}{\lambda}\right]$$

Identificando términos con la ecuación dada en el enunciado se obtiene:
A = 4; f = 0,25 Hz; λ = 1,8 m

Para calcular la velocidad de propagación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 1{,}8 \cdot 0{,}25 = \mathbf{0{,}45\ m/s}$$

La velocidad de vibración máxima se obtiene derivando la ecuación de la posición:

$$V = 2\pi \cdot f \cdot A \cdot \cos 2\pi(ft + Kx)$$

$$Vmax = 2\pi \cdot f \cdot A = \mathbf{2p\ \ m/s}$$

b)

$$\left.\begin{matrix} y_1 = 4 \cdot sen 2\pi\left(\frac{t}{4} + \frac{x_1}{1{,}8}\right) \\ y_2 = 4 \cdot sen 2\pi\left(\frac{t}{4} + \frac{x_2}{1{,}8}\right) \end{matrix}\right. \Rightarrow \delta = 2\pi\left(\frac{t}{4} + \frac{x_1}{1{,}8}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{4} + \frac{x_2}{1{,}8}\right) = \frac{2\pi}{1{,}8}(x_1 - x_2) = \mathbf{3{,}49\ m}$$

Una onda se propaga en el sentido negativo del eje *X*, siendo 20 cm su longitud de onda. El foco emisor vibra con una frecuencia de 25 Hz, una amplitud de 3 cm y fase inicial nula.

Determina:

a) La velocidad con que se propaga la onda.

b) La ecuación de la onda.

c) El instante en que un punto que se encuentra a 2,5 cm del origen alcanza, por primera vez, una velocidad nula.

a) La velocidad de propagación está relacionada con la longitud de onda y la frecuencia a través de la ecuación: $v = l\ n$

$$v = 0{,}2 \cdot 25 = 5 \text{ m/s}$$

b) La ecuación de la onda será:

$$y = A\cos(kx - wt) = A\cos\left(\frac{2p}{l}x - 2p\,nt\right) = 0{,}03\cos(10px - 50pt)$$

c) La velocidad es la derivada con respecto al tiempo del desplazamiento. Por tanto será:

$$v = -50p \cdot 0{,}03\,\text{sen}(10px - 50pt) = 4{,}71\,\text{sen}(10p \cdot 0{,}025 - 50pt) = 0$$

$$10p \cdot 0{,}025 - 50pt = 0 \Rightarrow t = \frac{0{,}25p}{50p} = 5 \cdot 10^{-3}\text{ s}$$

OPCIÓN A

CUESTIÓN 4

En un partido de fútbol un espectador canta un gol con una sonoridad de 40 dB. ¿Cuál será la sonoridad si gritaran a la vez y con la misma intensidad sonora los 1000 espectadores que se encuentran viendo el partido?

$I_0 = 10^{-12}$ W· m^{-2}

Cuando grita una persona:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{Io} = 40 \text{ db}$$

Si gritan 1000 personas a la vez:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log \frac{1000 \cdot I}{Io} = 10 \cdot \log 1000 + 10 \cdot \log \frac{I}{Io} = 30 + \beta = \mathbf{70\ dB}$$

Problema 2

2.- La ecuación de una onda armónica que se propaga en una cuerda es:

$$y(x, t) = 0{,}5 \text{ sen } (0{,}1\pi t - \pi x - \pi/3)$$

expresada en el S.I. de unidades. Determinar:

a) La amplitud, el periodo, la longitud de onda y la frecuencia angular

b) La velocidad de propagación

c) La velocidad transversal de un punto de la cuerda situado en x = 2 m en el instante t = 10 s

Comparamos la onda dada con la ecuación general de una onda:

$$y(x,t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\left(0{,}1\pi t - \pi x - \frac{\pi}{3}\right); \qquad y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

a) $A = 0{,}5\,\text{m}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20\,\text{s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,\text{m}$$

$$\omega = 0{,}1\pi\,\text{rad/s}$$

b) La velocidad de la onda es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2}{20} = 0{,}1\,\text{m/s}$$

c) Derivando la ecuación de la posición con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de la velocidad de vibración de las partículas de la cuerda.

$$v(x,t) = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0{,}1\pi \cdot 0{,}5\cos\left(0{,}1\pi t - \pi x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Sustituyendo x = 2 m; t = 10 s

$$v(x,t) = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\cos\left(0{,}1\pi \cdot 10 - 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -1{,}25 \cdot 10^{-3}\,\text{m/s}$$

CUESTIÓN 1

1.- Una onda armónica de frecuencia 100 Hz y 0'5 m de amplitud se propaga con una velocidad de 10m/s en el sentido positivo del eje X. En el instante inicial (t = 0 s) y en el origen (x = 0m) la elongación es y = +0'5 m. Hallar: a) la ecuación de la onda; b) la diferencia de fase entre dos puntos separados 0'2 m; y c) la velocidad y aceleración máximas de un punto del medio. ***(3 puntos)***

a) Escribimos la ecuación de una onda que se propaga en el sentido positivo del eje x y vamos calculando las magnitudes que necesitamos.

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$\omega = 2\pi f = 200\pi \ \mathrm{rad/s}$

$v_p = \lambda f; \qquad \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{10}{100} = 0{,}1\,\mathrm{m}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi\,\mathrm{m}^{-1}$

$$y(x,t) = 0{,}5\cos(200\pi t - 20\pi x + \varphi_0)$$

Sustituyendo x = 0 m y t = 0 s, comprobamos que el coseno vale la unidad cuando el desfase inicial $\varphi_0 = 0$, de modo que la ecuación queda:

$$y(x,t) = 0{,}5\cos(200\pi t - 20\pi x)$$

b) Restamos las fases:

$$(200\pi t - 20\pi x_1) - (200\pi t - 20\pi x_2) = 20\pi(x_2 - x_1) = 20\pi \cdot 0{,}2 = 4\pi\,\mathrm{rad}$$

c) Derivando la elongación obtenemos la ecuación de la velocidad y derivando esta obtenemos la de la aceleración.

$$v(x,t) = -200\pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{sen}(200\pi t - 20\pi x); \qquad v_{max} = 100\pi\,\mathrm{m/s}$$

$$a(x,t) = -(200\pi)^2 \cdot 0{,}5\cos(200\pi t - 20\pi x); \qquad a_{max} = 20000\pi^2\,\mathrm{m/s^2}$$

OPCIÓN B

Problema 1

Sometemos el extremo de una cuerda tensa a un vibrador que provoca la propagación de una onda armónica de ecuación Y(x,t) = 0,1· sen(0,8π t-160π x) expresada en el sistema internacional de unidades.

a) Determina amplitud, velocidad de propagación y longitud de onda.

b) Determina la velocidad de vibración de un punto de la cuerda que se encuentra a 10 cm del vibrador en el instante t = 0,5 s. ¿Qué tipo de movimiento describe dicho punto?

a) La ecuación general de una onda viene dada por la siguiente expresión:

$$Y(x,t) = A\cdot \text{sen}\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Identificando los términos con la ecuación del enunciado:

$$Y(x,t) = 0{,}1\cdot \text{sen}(0{,}8\pi t - 160\,\pi x)$$

$$\mathbf{A = 0{,}1}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 0{,}8\pi \Rightarrow T = 2{,}5\ \text{s}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 160\,\pi \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0{,}0125\,m}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}0125}{2{,}5} = \mathbf{0{,}005\,m/s}$$

b) Derivando la posición, se obtiene la ecuación de la velocidad:

$$V(x,t) = 0{,}1\cdot 0{,}8\pi\cdot \cos(0{,}8\pi t - 160\,\pi x)$$

$$V(0{,}1\,,\,0{,}5) = 0{,}1\cdot 0{,}8\pi\cdot \cos(0{,}8\pi\cdot 0{,}5 - 160\,\pi\cdot 0{,}1) = \mathbf{0{,}16\ m/s}$$

Realiza un movimiento armónico simple

Cuestiones

2.- ¿Qué diferencia existe entre movimiento armónico simple y un movimiento vibratorio?. Cita un ejemplo de cada uno de ellos.

Un movimiento es armónico simple cuando el sistema o cuerpo que lo realiza está sometido a la ley de Hooke.

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$$

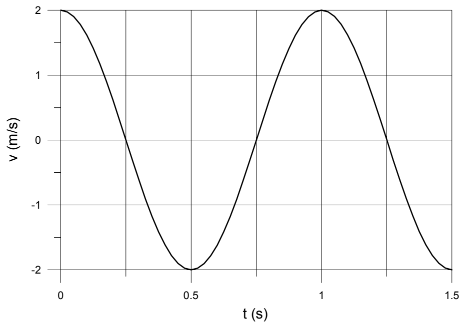
Para que el sistema pueda oscilar (vibrar) a uno y otro lado de la posición de equilibrio, es necesario que además pueda almacenar algún tipo de energía potencial y poseer una masa que le permita alcanzar energía cinética.

Es un ejemplo de movimiento armónico simple el que puede realizar un cuerpo suspendido de un muelle.

Un movimiento vibratorio es un movimiento cualquiera de vaivén como puede ser el que realiza la punta de la rama de un árbol cuando es empujada por la fuerza del viento

PROBLEMAS

1.- Una partícula de 10g de masa oscila armónicamente según la expresión x = A·sen (ω·t). En la figura se representa la velocidad de esta partícula en función del tiempo. Calcula:



a) La frecuencia angular, "ω", y la amplitud, "A", de la oscilación

b) La energía cinética de la partícula en el instante t_1 = 0.5s, y la energía potencial en t_2 = 0.75s

c) ¿Qué valor tiene la energía en los dos instantes anteriores?

a) La ecuación de la velocidad que se representa en la gráfica se corresponde con la función:

$$v = A\omega \cdot \cos \omega t$$

Como el movimiento se repite cada segundo, el periodo T = 1 s y la frecuencia que es el valor inverso del periodo es f = 1 Hz, de modo que la frecuencia angular vale:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \, \text{rad/s}$$

Conocido el valor de la amplitud de la velocidad, despejamos el de la amplitud de la posición:

$$A\omega = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{\omega} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \text{m}$$

b) Las expresiones de las energías cinética y potencial son:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 0{,}01 \cdot 2^2 \cdot \cos^2 2\pi t = 0{,}02 \cdot \cos^2 2\pi t$$

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} 0{,}01 \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \text{sen}^2 2\pi t = 0{,}02 \cdot \text{sen}^2 2\pi t$$

Sustituyendo para los valores del tiempo dados:

$$E_c = 0{,}02 \cdot \cos^2 2\pi \cdot 0{,}5 = 0{,}02 \cdot \cos^2 \pi = 0{,}02 \, \text{J}$$

$$E_p = 0{,}02 \cdot \text{sen}^2 2\pi \cdot 0{,}75 = 0{,}02 \cdot \text{sen}^2 1{,}5\pi = 0{,}02 \, \text{J}$$

c) La energía total tiene un valor constante que es:

$$E_T = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} 0{,}01 \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} = 0{,}02 \, \text{J}$$

Como el valor coincide con los obtenidos en cada uno de los instantes del apartado quiere esto decir que en t = 0,5 s no hay elongación y por tanto toda la energía es cinética y en el

instante
t = 0,75 s no hay velocidad y toda la energía es potencial

PRIMERA PARTE

C2. La ecuación de una onda transversal, en unidades del SI, es y = 0,04 sin 2p (t/2 - x/4). Determine el periodo la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación.

La ecuación de la onda es:

$$y = A\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Comparando con la ecuación dada se tiene:

$$T = 2\ \mathrm{s}; \quad \upsilon = \frac{1}{T} = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$$

$$\lambda = 4\,\mathrm{m}; \quad v = \lambda\upsilon = 2\,\mathrm{m/s}$$

PRIMERA PARTE

Q1. Una partícula de masa 500 g describe un movimiento vibratorio armónico de manera que su posición (en unidades del sistema internacional) esta dada por x = 0,20 sen (10π t), donde t es el tiempo. Calcula la energía cinética máxima de la partícula y la fuerza máxima que actúa sobre ella. Indica en que puntos de la oscilación se adquieren estos valores máximos.

Para calcular la energía cinética y la fuerza hay que conocer previamente las expresiones de la velocidad y de la aceleración del movimiento vibratorio, por tanto derivamos en la ecuación del movimiento para obtenerlas:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos(10\pi t); \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -20\pi^2 \operatorname{sen}(10\pi t)$$

Sustituyendo en la fórmula de a energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot 4\pi^2 \cos^2(10\pi t)$$

El valor máximo se da cuando la velocidad alcanza su valor máximo en el punto medio de la oscilación.

$$E_{c,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot 4\pi^2 = 9{,}87\,J$$

De igual modo el valor de la fuerza es:

$$F = m\,a = -0{,}5 \cdot 20\pi^2 \operatorname{sen}(10\pi t)$$

Su valor máximo se obtiene para el valor máximo de su aceleración en los extremos de la trayectoria:

$$F_{max} = m\,a_{max} = -0{,}5 \cdot 20\pi^2 = 98{,}7\,N$$

La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

$$y\ (x,\ t) = 8\ \mathrm{sen}[p\ (100\ t - 8\ x)]$$

donde *x* e *y* se miden en centímetros y *t* en segundos. Calcula el tiempo que tardará la onda en recorrer una distancia de 25 m.

La ecuación de una onda es: $y = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{2p}{T}t - \frac{2p}{l}x\right)$

Dado que la velocidad es: $v = \frac{l}{T}$ se puede calcular realizando el cociente entre el factor que multiplica al tiempo dividido por el que multiplica a la posición. Por tanto:

$$v = \frac{100p}{8p} = 12{,}5\ \mathrm{cm/s}$$

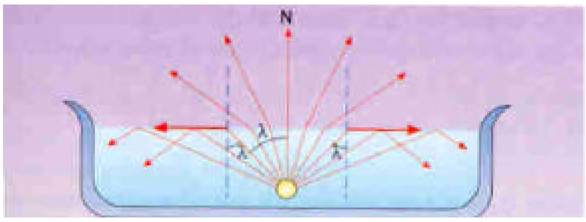
Por tanto en recorrer 25 m tardará 200 s.

BLOQUE III

OPCIÓN A

Un foco luminoso puntual se encuentra situado en el fondo de un estanque lleno de agua de *n = 4/3* y a *1* metro de profundidad. Emite luz en todas las direcciones. En la superficie del agua se observa una zona circular iluminada de radio *R*. Calcula el radio *R* del círculo luminoso.

Los extremos del círculo luminoso vendrán dados por el ángulo límite λ a partir del cual se produce el fenómeno de reflexión total y los rayos no salen a la superficie.



$$n1 \cdot sen\varepsilon 1 = n2 \cdot sen\varepsilon 2$$

$$\frac{4}{3} sen\lambda = 1 sen(90) \Rightarrow sen\lambda = \frac{3}{4}$$

$$\lambda = 48{,}59^{o}$$

Como nos piden el radio del círculo luminoso:

$$R = h \cdot tg\lambda \Rightarrow R = 1 \cdot tg(48{,}59) = \mathbf{1{,}13\,m}$$

BLOQUE II – CUESTIONES

Opción A

Un cuerpo dotado de movimiento armónico simple de *10 cm* de amplitud, tarda *0,2 s* en describir una oscilación completa. Si en el instante *t = 0 s* su velocidad era nula y la elongación positiva, determina

1. La ecuación que representa el movimiento del cuerpo

2. La velocidad del cuerpo en el instante *t = 0,25 s*.

La ecuación de un movimiento vibratorio armónico simple es: $y = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Su velocidad se obtiene derivando con respecto al tiempo la ecuación del movimiento:

$$v = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Si en el instante t = 0 la velocidad es nula el desfase debe ser cero, $\varphi = 0$

Se calcula el valor de ω a partir del dato del periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi\,\text{rad/s}$$

1. La ecuación de este movimiento armónico es:

$$y = 0,1\cos(10\pi t)$$

2. La ecuación de la velocidad es:

$$v = -\pi \operatorname{sen}(10\pi t)$$

$$v(0,25) = -\pi \operatorname{sen}(10\pi\cdot 0,25) = -\pi \operatorname{sen}(2,5\pi) = -\pi \text{ m/s}$$

BLOQUE II

OPCIÓN A

De una onda armónica se conoce la pulsación *w = 100 s⁻¹* y el número de ondas *k = 50 m⁻¹*. Determina la velocidad, la frecuencia y el período de la onda.

Conocida la pulsación se pude calcular el período y la frecuencia.

$$w = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{100} = \mathbf{\frac{\pi}{50}\ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \mathbf{\frac{50}{\pi}\ s^{-1}}$$

Con el número de ondas se puede calcular la longitud de onda, λ, y con la longitud de onda y el período se obtiene la velocidad:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{T} = \frac{\frac{2\pi}{50}}{\frac{\pi}{50}} = \mathbf{2\ m/s}$$

BLOQUE II – PROBLEMAS

Opción A

Una onda armónica transversal progresiva tiene una amplitud de *3 cm*, una longitud de onda de *20 cm* y se propaga con velocidad *5 m/s*. Sabiendo que en *t = 0 s* la elongación en el origen es *3 cm*, se pide:

1. Ecuación de la onda. (0,7 puntos)

2. Velocidad transversal de un punto situado a *40 cm* del foco en el instante *t = 1 s*. (0,7 puntos)

3. Diferencia de fase entre dos puntos separados *5 cm* en un instante dado. (0,7 puntos)

1. La ecuación de una onda armónica viene dada por la expresión:

$$y(x,t) = A\cdot\text{sen}(\omega t - kx)$$

Calculamos las magnitudes que desconocemos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi$$

Para calcular ω hay que conocer previamente el periodo:

$$\frac{\lambda}{T} = v; \qquad T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0{,}2}{5} = 0{,}04\,\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}04} = 50\pi\,\text{rad/s}$$

Como para t = 0 s en el punto x = 0 la elongación es igual a A, el valor del seno debe ser la unidad luego hay que introducir un desfase de π/2.

$$y(x,t) = 0{,}03\cdot\text{sen}\left(50\pi t - 10\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Derivando con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de la velocidad de vibración:

$$v(x,t) = 50\cdot 0{,}03\cdot\pi\cdot\cos\left(50\pi t - 10\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(0{,}4;1) = 1{,}5\pi\cos\left(50\pi - 4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}5\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,\text{m/s}$$

3. La longitud de la onda es 20 cm, esto quiere decir que cada 20 cm encontraremos puntos que vibran en fase. Como 5 cm es la cuarta parte de la longitud de la onda, cualquier pareja de puntos que se encuentren a 5 cm de distancia estarán desfasados la cuarta parte de la longitud de onda.

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{4}$$

PRIMERA PARTE

2. Escriba la expresión matemática de una onda armónica unidimensional como una función de x (distancia) y t (tiempo) y que contenga las magnitudes indicadas en cada uno de los siguientes apartados:
a) frecuencia angular w y velocidad de propagación v
b) período T y longitud de onda l
c) frecuencia angular w y número de onda k.
d) Explique por qué es una función doblemente periódica.

a) $y(x,t) = A\cdot \text{sen}\,\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{\lambda}{T} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow y(x,t) = A\cdot \text{sen}\,2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow y(x,t) = A\cdot \text{sen}(\omega t - kx)$$

d) La función es doblemente periódica, porque la función sinusoidal tiene una doble dependencia, temporal y espacial.

OPCIÓN A

2. Considere la siguiente ecuación de una onda :

y (x , t) = A sen (b t - c x) ;

a) ¿qué representan los coeficientes A, b, c ? ; ¿cuáles son sus unidades? ;
b) ¿qué interpretación tendría que la función fuera "coseno" en lugar de "seno" ?; ¿y que el signo dentro del paréntesis fuera + en lugar de - ?

a) Comparando la expresión dada con la ecuación general de una onda encontramos que:

$$y(x,t) = A{\cdot}\mathrm{sen}(\omega t - kx)$$

- A es la amplitud de la onda que indica el valor máximo de la elongación que sufren los puntos del medio por los que pasa la onda. Sus unidades en el S.I. son los metros.
- b es la pulsación o frecuencia angular, $\left(\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f\right)$, sus unidades en el sistema angular son rad/s.
- c es el número de ondas $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, indica el número de longitudes de onda que hay en la distancia 2π. Sus unidades son rad/m.

b) Tanto la función seno como la función coseno son útiles para definir el movimiento periódico de una partícula en el espacio o en el tiempo ya que ambas varían de igual modo y toman sus valores entre –1 y +1. La única diferencia entre ambas es que se encuentran desfasadas 90º.

El signo del interior del paréntesis indica el sentido de desplazamiento de la onda. Cuando el signo es positivo la onda se desplaza en el sentido negativo del eje de abscisas y cuando el signo es negativo, la onda se desplaza en el sentido positivo.