1) Calculeu

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x+1}$ *(0,5 punts)*

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-1}$ *(0,5 punts)*

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x^2}{5x^2+x}$ *(0,5 punts)*

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(5+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)$ *(1 punt)*

e) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+3x}$ *(1,5 punts)*

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x+1} = \frac{-2}{\infty} = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3}{x^2-1} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim \frac{\frac{-x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}} =$

$= \lim \frac{-1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}} = \frac{-1}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = \frac{-1}{0} = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{5x^2+x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim \frac{\frac{1}{x^2}-2}{5+\frac{1}{x}} =$

$= \frac{\frac{1}{\infty}-2}{5+\frac{1}{\infty}} = \frac{0-2}{5+0} = -\frac{2}{5}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(5+\frac{2x^2}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{5-5x^2+2x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-3x^2}{1-x^2} = \frac{-\infty}{-\infty} =$

$= \lim \frac{\frac{5}{x^2}-\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \frac{\frac{5}{\infty}-3}{\frac{1}{\infty}-1} = \frac{-3}{-1} = 3$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{0+3} = \frac{2}{3}$

2) Donada la funció $f(x) = \frac{2x^2+1}{4-x^2}$

a) Calculeu el domini *(1 punt)*

b) Trobeu les asímptotes verticals i horitzontals. *(2 punts)*

a) $4-x^2=0 \quad x^2=4 \quad x=\sqrt{4}=\pm 2$

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) VERTICALES

$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{2\cdot 4+1}{4-4} = \frac{9}{0} = \infty$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{9}{0} = \infty$

$\boxed{\text{Asíntotas verticales en } x=-2 \text{ y } x=2}$

HORIZONTALES

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \frac{2+0}{0-1} = -2$

$\boxed{\text{Asíntota horizontal en } y=-2}$

3) Donada la funció definida a trossos

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+3} & si\ x\le 1\\ -x+k & si\ x>1\end{cases}$$

a) Digueu quin és el domini de la funció $g(x)$

(1 punt)

b) Trobeu el valor de k per tal que la funció sigui contínua en x=1 *(1 punt)*

c) Calculeu $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ i $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

(1 punt)

a) Se trata de una función a trozos. El primero presenta una discontinuidad en x=-3, ya que el denominador vale cero.

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

El segundo es continuo en todo su intervalo por ser una expresión polinómica.

El dominio será, por tanto:

$$\boxed{\text{Dom } g(x) = \mathbb{R} - \{-3\}}$$

b) Para que la función sea continua en x=1 se ha de cumplir que:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = (1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1+k \qquad g(1)=\frac{1}{2}$$

igualando: $-1+k=\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{k=\frac{3}{2}}$

c) $$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \frac{2}{-\infty+3} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} g(x) = -\infty + \frac{3}{2} = -\infty$$